INECUACIONES

En general, se llama *desigualdad* a un planteamiento que establece que una expresión es menor, menor o igual, mayor, mayor o igual que otra.

Cuando una desigualdad contiene variables recibe el nombre de *inecuación*.

Un problema de particular interés es el de *resolver* una inecuación, es decir, encontrar todos los posibles valores de la variable que la satisfacen.
Tal como ocurre en las ecuaciones no hay métodos generales para resolver una inecuación, todo depende de la habilidad del estudiante para utilizar las propiedades de las desigualdades.

Algunas reglas para operar con desigualdades

1. Ley transitiva: Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$

2. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

3. (a) Si $a < b,\ c > 0$, entonces $ac < bc$

   (b) Si $a < b,\ c < 0$, entonces $ac > bc$

4. Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$

5. Si $ab > 0$, entonces a y b son positivos, o ambos son negativos.

6. Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a + c < b + d$

7. Si $0 < a < b$, entonces $0 < b^{-1} < a^{-1}$

Nota: En esta oportunidad estudiaremos inecuaciones que contienen sólo una variable.

Inecuaciones lineales: Por inecuación lineal o de primer grado se entiende cualquier expresión que tiene alguna de las formas siguientes:

$$ax+b < 0, \quad ax+b \leq 0, \quad ax+b > 0, \quad ax+b \geq 0$$

donde $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ y x es una variable real.

Inecuaciones cuadráticas: Una inecuación cuadrática o de segundo grado es cualquier expresión en la forma de una desigualdad del tipo:

$$ax^2+bx+c<0, \quad ax^2+bx+c\leq 0, \quad ax^2+bx+c>0,$$

donde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ y x es una variable real.
Como es de suponer, gran parte de las desigualdades de primer y de segundo grado no tienen ninguna de las formas anteriores, pero se pueden reducir a ellas.

0.0.1. Ejemplos

1. Resolver la inecuación: $3x - 1 < x + 5$

Solución:

$$
\begin{aligned}
3x - 1 &< x + 5 && / + (-x + 1) \\
-x + 1 + 3x - 1 &< -x + 1 + x + 5 \\
2x &< 6 && / \cdot (\tfrac{1}{2}) \\
x &< 3
\end{aligned}
$$

El conjunto solución: $S = \{x \in \mathbf{R} \ / \ x < 3\} =]-\infty, 3[$

2. Resolver: $-3 < 7 - 2x \leq 7$

Solución: Se trata de resolver las inecuaciones lineales siguientes:

$$-3 < 7 - 2x, \quad \text{y} \quad 7 - 2x \leq 7$$

Esto se puede realizar en forma simultánea como sigue:

$$\begin{array}{rcccl}
-3 & < & 7-2x & \leq 7 & /+(-7) \\
-3-7 & < & 7-2x-7 & \leq 7-7 & \\
-10 & < & -2x & \leq 0 & /\cdot(-\frac{1}{2}) \\
-10/(-2) & > & -2x/(-2) & \geq 0 & \\
5 & > & x & \geq 0 &
\end{array}$$

El conjunto solución $S = \{x \in \mathbf{R} \ / \ 5 > x \geq 0\} = [0, 5[$

3. La inecuación $\dfrac{x+1}{2x-3} \geq 1$ no es de primer ni de segundo grado, pero puede resolverse como una de primer grado.

   Notar que *no* se puede multiplicar por $2x-3$ pues este número puede ser positivo o negativo. Un procedimiento correcto es:

$$\frac{x+1}{2x-3} \geq 1 \quad / + (-1)$$

$$\frac{x+1}{2x-3} - 1 \geq 0$$

$$\frac{-x+4}{2x-3} \geq 0$$

   Una fracción es positiva si el numerador y denominador tienen el mismo signo. Analizaremos el signo de ellos. El numerador se anula (es cero) en el 4, el denominador se anula en el $\frac{3}{2}$. Estos puntos son "claves" para el análisis del signo de la fracción.

   Los puntos claves dividen a la recta real en tres tramos. Se analiza el signo de la expresión en cada tramo según el siguiente esquema:

	$-\infty < x < 3/2$	$3/2 < x < 4$	$4 < x < +\infty$
	0	2	5
$-x+4$	$+$	$+$	$-$
$2x-3$	$-$	$+$	$+$
$\frac{-x+4}{2x-3}$	$-$	$+$	$-$
	no sirve	sirve	no sirve

Si es necesario, se elige un número de cada tramo para verificar el signo de la expresión, en este caso se eligieron el 0, 2 y 5, respectivamente.

La expresión es positiva en $]3/2, 4[$ además vale 0 en 4, luego el conjunto solución es: $S =]3/2, 4]$

4. La inecuación $x^2 + 3x - 4 < 0$ es de segundo grado.

La expresión del lado izquierdo es una función polinomial que se puede factorizar, luego:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x - 4 &< 0 \\ (x+4)(x-1) &< 0 \end{aligned}$$

Un producto es negativo (< 0) si cada factor es de distinto signo. Analizaremos el signo de ellos. El primer factor se anula en el -4, el segundo factor se anula en el 1. Estos puntos son "claves" para el análisis del signo del producto.

	$-\infty < x < -4$	$-4 < x < 1$	$1 < x < +\infty$
	-5	0	2
$x+4$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$(x+4)(2x-3)$	$+$	$-$	$+$
	no sirve	sirve	no sirve

Los números elegidos en cada tramo para verificar el signo de la expresión son el -5, 0 y 2, respectivamente.

La expresión es negativa en $]-4,\ 1[$, además vale 0 en -4 y en 1, pero éste caso no se contempla, luego el conjunto solución es: $S =]-4,\ 1[$

5. La inecuación $x^2+1 > 0$ es de segundo grado.

El polinomio $p(x) = x^2+1$ no es factorizable sobre $\mathbf{R}$, en consecuencia, $p(x)$ es siempre positivo o siempre negativo. Pero x^2 es siempre positivo o bien 0, de modo que, x^2+1 es siempre positivo. Así, la solución de $x^2+1 > 0$ es $]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}$

6. La inecuación $x^2 + 1 < 0$ no tiene solución, luego el conjunto solución $S = \emptyset$. A esta conclusión se llega a través del análisis del ejemplo anterior.

7. Un constructor debe decidir si ha de arrendar o comprar una máquina excavadora. Si la arrendara, tendría que pagar \$600 al mes (sobre una base anual), y el costo diario (gasolina, aceites y el conductor) sería de \$60 por cada día que se utilizara. Si la comprara, su costo fijo anual sería de \$4000, y los costos diarios de operación y mantenimiento serían de \$80 por día. ¿Cuál es el número mínimo de días al año, que tendría que utilizar la máquina para justificar el arrendarla en vez de comprarla?.

Solución: Sea d el número de días que se utiliza la máquina al año. Si se arrienda, los costos anuales totales estarían formados por los pagos de renta, que serían de (12)(600) y los cargos diarios de $60d$. Si se compra la máquina, el costo anual es de $4000 + 80d$. Se desea que:

$$\begin{aligned} \text{costo}_{\text{renta}} &< \text{costo}_{\text{compra}} \\ 12(600) + 60d &< 4000 + 80d \\ 7200 + 60d &< 4000 + 80d \\ 3200 &< 20d \\ 160 &< d \end{aligned}$$

Por ello, el constructor debe utilizar la máquina cuando menos 161 días para justificar su alquiler. Notar que aquí, por razones prácticas, los valores posibles para d son números enteros mayores o iguales que 161.

En un experimento de química, una solución de ácido clorhídrico se mantuvo a no más de 35°C y a no menos de 30°C. Si C representa la temperatura en °C, y $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ (F temperatura en °F), determinar la variación de temperatura en °F. Expresar la respuesta en notación de intervalo.