1. Introducción

- Una ***inecuación*** es una desigualdad que relaciona dos expresiones algebraicas por medio de uno de los siguientes signos: $>$,$<$,$\leq$, o $\geq$.
- Ejemplos de inecuaciones:

$$\begin{array}{cc} 2x+1<3 & 2x+1\geq 3 \\ 2x^2+1>2 & 3x^5+x^2-1\leq 7 \end{array}$$

- Resolver una inecuación significa encontrar todos los valores de la variable que satisfacen la desigualdad involucrada en la inecuación.
- Las soluciones de una inecuación la podemos expresar mediante:
  1) Un conjunto.
  2) Una representación gráfica.
- En el caso de que la variable sea real entonces el conjunto puede ser una colección de puntos y/o de intervalos (abiertos, cerrados, y/o semiabiertos).
- En esta unidad trataremos solo inecuaciones lineales y cuadráticas.

2. Inecuaciones lineales en una variable

Una ***inecuación lineal*** en una variable es una inecuación donde la variable es lineal (tiene grado 1). Ejemplos de inecuaciones:

$$3+4x<3x+1 \qquad \ln(4)\geq 3x+\ln(2)$$

2.1. Resolución de inecuaciones lineales en una variable

Ejemplo 1. *Resolver la inecuación lineal real*

$$2x-1<7.$$

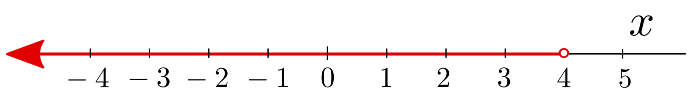
Para encontrar los valores en $\mathbb{R}$ *de* x *que satisfacen la desigualdad, aislamos* x*:*

$$2x<8 \qquad \longrightarrow x<4.$$

Por lo tanto los valores de x *que satisfacen la inecuación planteada son todos los números reales menores que* 4.
La solución la podemos expresar como:

1) Solución: $t\in(-\infty,4)$.

2) Solución:



Ejemplo 2. *Resolver la inecuación lineal real*

$$2x - 1 \leq 7x + 4.$$

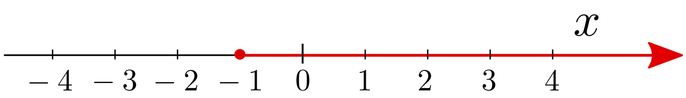
Para encontrar los valores en $\mathbb{R}$ *de* x *que satisfacen la desigualdad, aislamos* x*:*

$$-5 \leq 5x \qquad \longrightarrow -1 \leq x.$$

Por lo tanto los valores de x *que satisfacen la inequacion planteada son todos los números reales mayores o iguales que* -1*.*
La solución la podemos expresar como:

1) *Solución:* $t \in [-1, \infty)$.

2) *Solución:*



2.2. Inecuaciones con denominador

Ejemplo 3. *Resolver la inecuación real*

$$\frac{x-4}{x+3} < 0$$

La resolveremos aplicando los siguientes pasos:

1) *Obtenemos los ceros (raices) de cada función lineal. Los ceros del numerador y denominador son:* 4 *y* -3*, respectivamemnte.*

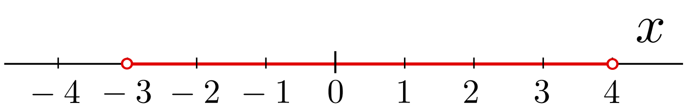
2) *Construimos una tabla que resume los signos de las expresiones* $x-4, x+3$ *y* $\frac{x-4}{x+3}$ *en los intervalos* $(-\infty, -3), (-3, 4)$ *y* $(4, \infty)$ *, como sigue*

x	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 4)$	4	$(4, \infty)$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{x-4}{x+3}$	$+$		$-$	0	$+$

3) *La solución de la inecuación está compuesta por los intervalos donde el polinomio tiene el signo que cumple la desigualdad, en este caso, negativo. Por lo tanto podemos decir que:*

   a) *La solución es:* $t \in (-3, 4)$.

   b) *La representación gráfica del conjunto solución es:*



3. Inecuaciones cuadráticas

Una ***inecuación cuadrática*** en una variable es una inecuación donde la variable es cuadrática (tiene grado 2).
Ejemplos de inecuaciones:

$$3 + 4x^2 < 3x + 1 \qquad \ln(4) \geq 2x^2 + \ln(2)$$

3.1. Resolución de inecuaciones cuadráticas en una variable

Ejemplo 4. *Resolver la inecuación cuadrática:*

$$x^2 - 6x + 8 \geq 0.$$

La resolveremos aplicando los siguientes pasos:

1) *Igualamos el polinomio de segundo grado del primer miembro a cero*

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

y obtenemos los ceros (raices) de la función cuadrática aplicando la fórmula para ecuaciones cuadraticas:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Los ceros son: 4 *y* 2. *Los ceros también los obtenemos al percatarnos que el polinomio se factoriza como*

$$x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2).$$

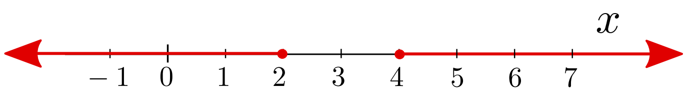
2) *Construimos una tabla que resume los signos de las expresiones* $x-4, x-2$ *y* $(x-4)(x-2)$ *en los intervalos* $(-\infty, 2), (2, 4)$ *y* $(4, \infty)$ *, como sigue*

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 4)$	4	$(4, \infty)$
$x-2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-4)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

3) *La solución de la inecuación está compuesta por los intervalos donde el polinomio tiene el signo que cumple la desigualdad, en este caso, positivo. Por lo tanto podemos decir que:*

   a) *La solución es:* $t \in (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$.

   b) *La representación gráfica del conjunto solución es:*



3.2. Inecuaciones con denominador

Ejemplo 5. *Al realizar un estudio en un sector minero se encontró un gran porcentaje de personas con niveles elevados de plomo en la sangre. El instituto de salud pública decidió comenzar un tratamiento con un costoso medicamento a las personas que tengan un 6 % de sangre contaminada. El porcentaje que describe la cantidad del plomo en la sangre como efecto de x gramos del medicamento, viene dado por la relación*

$$P = \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 + x + 1},$$

con P expresado en %. ¿Al menos cuántos gramos deben administrarse para que el porcentaje de plomo sea menor o igual que 2 %?

Solución. Como la expresión está dada en porcentaje, debemos encontrar la solución de la inecuación

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x + 1} \leq 2.$$

Note que la función cuadrática $x^2 + x + 1$ no tiene ceros en $\mathbb{R}$ (su discriminante $\Delta = 1 - 4 < 0$), de hecho $x^2 + x + 1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Así, podemos multiplicar la inecuación por esta expresión sin que la desigualdad cambie, obteniendo

$$x^2 + 5x + 6 \leq 2(x^2 + x + 1).$$

Una manipulación algebraica da

$$0 \leq x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1).$$

Siguiendo la idea del ejemplo anterior construimos una tabla que resume los signos de las expresiones $x - 4, x + 1$ y $(x - 4)(x + 1)$ en los intervalos $(-\infty, -1), (-1, 4)$ y $(4, \infty)$, como sigue

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 4)$	4	$(4, \infty)$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x - 4)(x + 1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

La solución de la inecuación está compuesta por los intervalos donde el polinomio tiene el signo que cumple la desigualdad, en este caso, positivo o cero: $(-\infty, -1] \cup [4, \infty)$.
Tomando encuanta el planteamiento del problema y en base al análisis realizado, podemos afirmar que se deben administrar 4 gramos del medicamento para que el porcentaje de plomo sea menor o igual que 2 %.