1. Introducción

La programación lineal es un método de resolución de problemas que se ha desarrollado para ayudar a profesionales de distintos ambitos a tomar mejores decisiones. Desde su aparición a finales de la década de 1940, la programación lineal (PL) ha demostrado que es una de las herramientas más efectivas para describir un gran número de situaciones reales en las siguientes áreas: militar, industrial, agrícola, de transporte, de la economía, de sistemas de salud, e incluso en las ciencias sociales y de la conducta, donde se trata de asignar o compartir determinados recursos sólo disponibles en cantidades limitadas.

Un factor, importante en el amplio uso de esta técnica es la disponibilidad de programas de computadora muy eficientes para resolver problemas extensos de PL. La programación lineal tiene en el análisis, planificación y control operativo de sistemas eléctricos de generación y transporte de energía, uno de sus campos de actuación más destacados. Cuestiones como, generación de energía a mínimo coste, control de stock, mantenimiento de equipos, transporte y distribución, abastecimientos de combustibles a centrales de generación, planificación de nuevos equipamientos generadores, control de inversiones, etc, son sólo unos pocos ejemplos que se resuleven por medio de la programación lineal.

Algunos ejemplos de aplicaciones clásicas de la programación lineal son:

1) Se quiere elaborar una dieta diaria para un colectivo de personas de tal forma que se suministre a cada individuo una cantidad mínima de varios ingredientes nutritivos provenientes de ciertos alimentos distintos. El problema es hallar las cantidades a comprar cada día de cada alimento de tal forma que el coste total sea mínimo.

2) Un fabricante desea elaborar un programa de producción y una política de inventarios que satisfaga la demanda de ventas en periodos futuros. De forma ideal, el programa y la política permitirán a la compañía satisfacer la demanda y al mismo tiempo *minimizar* los costos totales de producción e inventarios.

3) Un gerente de mercadotecnia desea determinar la mejor forma de asignar un presupuesto de publicidad fijo entre diversos medios tales como radio, televisión , periódicos y revistas. Al gerente le gustaría determinar la combinación de medios que *maximiza* la eficacia de la publicidad.

4) Un analista financiero debe seleccionar una cartera de inversiones a partir de diversas alternativas de inversión en bonos y acciones. Al analista le gustaría establecer la cartera que *maximice* el rendimiento sobre la inversión.

2. Programación lineal

Los problemas de programación lineal comparten dos características:

1) La maximización o minimización de alguna cantidad: ***función objetivo***.

2) Existen limitaciones o restricciones sobre las variables de la función objetivo.

El nombre de programación lineal se debe básicamente a dos propiedades:

1) La función objetivo es una función lineal de las variables involucradas en el problema.

2) Las restricciones o inequaciones son lineales en las variables del problema.

2.1. Ejemplos de problemas de programación lineal

Ejemplo 1. Unos grandes almacenes encargan pantalones y chaquetas deportivas a un fabricante. El fabricante dispone de $750\,m$ de tejido de algodón y $1000\,m$ de tejido de poliéster para la confección. Cada pantalón precisa $1\,m$ de algodón y $2\,m$ de poliéster. Para cada chaqueta se necesitan $1{,}5\,m$ de algodón y $1\,m$ de poliéster. Los almacenes fijan el precio del pantalón en 50€ y el de la chaqueta en 40€ . ¿Qué número de pantalones y chaquetas debe suministrar el fabricante a los almacenes para que estos consigan un beneficio máximo?

Solución.

a) Primero debemos asignar las variables de nuestro problema:

x = número de pantalones a ser suministrados.
y = número de pantalones a ser suministrados.

b) En segundo lugar determinamos la función objetivo

$$f(x,y) = 50x + 40y.$$

c) Ahora determinamos las restricciones que deben satisfacer las variables. Para ello usamos los datos del problema, los cuales podemos resumir en la siguiente tabla.

	pantalón	chaqueta	disponibilidad
algodón	1	1,5	750
poliéster	2	1	1000

Entonces las restricciones son:

$$x + (1{,}5)y \leq 750 \quad \Longleftrightarrow 2x + 3y \leq 1500$$

y

$$2x + y \leq 1000.$$

Además, como el número de pantalones y chaquetas es no negativo, tenemos dos resoluciones más:

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0.$$

En resumen, el método de programación lineal consiste en buscar la solución del siguiente problema:

$$\begin{array}{llcl}
\text{Máximizar} & 50x + 40y & & \\
\text{Sujeta a} & 2x + 3y & \leq & 1500 \\
 & 2x + y & \leq & 1000 \\
\text{y} & x, y & \geq & 0.
\end{array}$$

Ejemplo 2. Se trata de elaborar una dieta diaria para dos personas de tal forma que se suministre a cada individuo una cantidad mínima de dos ingredientes nutritivos I_1 y I_2. Supongamos que existen en el mercado dos alimentos distintos A_1 y A_2, a unos costes unitarios c_1 y c_2, y que se quiere programar una dieta que contenga al menos b_1 y b_2 unidades de los dos ingredientes nutritivos. Si el alimento A_j contiene a_{ij} unidades del ingrediente I_i, $i = 1, 2$ y $j = 1, 2$. Hallar las cantidades a comprar cada día de cada alimento de tal forma que el coste total sea mínimo.

Solución.

a) Primero debemos asignar las variables de nuestro problema:

x = número de unidades del alimento A_1
y = número de unidades del alimento A_2

b) En segundo lugar determinamos la función objetivo

$$f(x, y) = c_1x + c_2y.$$

c) Ahora determinamos las restricciones que deben satisfacer las variables. Para ello usamos los datos del problema, los cuales podemos resumir en la siguiente tabla.

	A_1	A_2	unidades mínimas de ingredientes nutritivos
I_1	a_{11}	a_{12}	b_1
I_2	a_{21}	a_{22}	b_2

Entonces las restricciones son:

$$a_{11}x + a_{12}y \geq b_1$$

y

$$a_{21}x + a_{22}y \geq b_2$$

Además, como el número de unidades de los alimentos es no negativo, tenemos dos restricciones más:

$$x \geq 0 \quad \text{y} \quad y \geq 0.$$

En resumen, se busca la solución del siguiente problema:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Máximizar} & c_1x + c_2y & & \\ \text{Sujeta a} & a_{11}x + a_{12}y & \geq & b_1 \\ & a_{21}x + a_{22}y & \geq & b_2 \\ \text{y} & x, y & \geq & 0. \end{array}$$

En general, el método de programación lineal consiste en buscar la solución de un problema de la forma:

$$\begin{array}{lrcl}
\text{Máximizar/Mínimizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & & \\
\text{Sujeta a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & @ & b_1 \\
 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \# & b_2 \\
 & \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\
 & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & * & b_m \\
\text{y} & x_i & \&_i & r_i.
\end{array}$$

donde

- $c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.
- $b_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, 2, \ldots, m$.
- $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
- $@, \#, *, \&_i \in \{<, >, \leq, \geq\}$.
- $r_i \in \mathbb{R}$.

3. Resolución de problemas de programación lineal

En esta sección y en lo que sigue nos concentraremos en los problemas de programación Lineal de dos variables. Para resolver de manera correcta un problema de este tipo la idea es seguiente. Primero, debemos determinar la *región factible*, es decir, el conjunto solución de las inecuaciones. En segundo lugar debemos hallar las coordenadas del punto en la región factible que máximiza/mínimiza la función objetivo de acuerdo al planteamiento del problema que se este estudiando.
El método que utilizaremos es el llamado método de punto esquina.

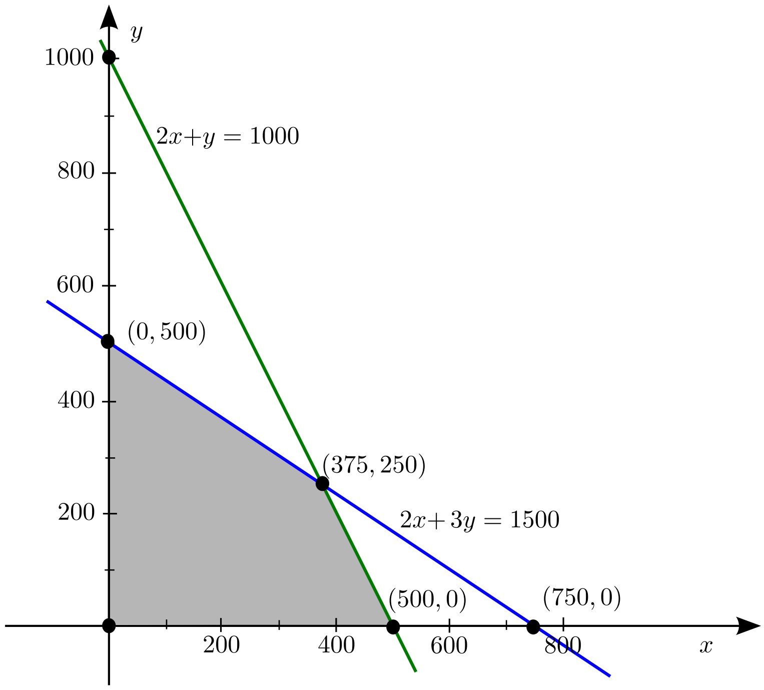
3.1. Método de punto esquina

Los pasos para obtener la solución al problema de programación lineal por medio del método de punto esquina son los siguientes.

1) Establecer cuál eje del plano cartesiano representa a cada variable (antes de empezar a graficar, es necesario que asignes a ambas variables el eje que la representará).
2) Representar las restricciones de manera gráfica
3) Identificar la región factible (el conjunto de restricciones graficadas en el plano cartesiano nos indica la región en donde se encuentran el conjunto de soluciones y la solución óptima a nuestro problema. Para ello es necesario resaltar o sombrear el área que respeta las especificaciones dadas por las restricciones.
4) Establecer en la gráfica los puntos esquina dentro de la región factible y sus coordenadas (un punto de la región factible es esquina si satisface al menos dos inecuaciones)
5) Evaluar las coordenadas en la función objetivo.
6) Seleccionar el punto que cumpla con el objetivo de nuestro problema, si se busca maximizar, la mejor solución será la de resultado mayor, si se busca minimizar será la de menor resultado.

4. Ejemplo resuelto

Aplicaremos el método grafico y el método de punto esquina para resolver el problema planteado en el Ejemplo 1. Aplicando el método grafico obtenemos que la región factible es la de la figura siguiente.



Por lo tanto los puntos equina son cuatro y sus coordenadas son:

$$(0, 0), \quad (500, 0), \quad (375, 250), \quad (0, 500).$$

Ahora, evaluando la función objetivo $f(x, y) = 50x + 40y$ en estos puntos obtenemos:

$$f(0, 0) = 50(0) + 40(0) = 0€$$

$$f(0, 500) = 50(0) + 40(500) = 20000€$$
$$f(375, 250) = 50(375) + 40(250) = 28750€$$
$$f(500, 0) = 50(500) + 40(0) = 25000€$$

Por lo tanto, la solución óptima es fabricar 375 pantalones y 250 chaquetas para obtener un beneficio de 28750€ .

5. Referencias

- http://www.sectormatematica.cl/contenidos/ejproglin3.htm
- http://zeth.ciencias.uchile.cl/ preymond/Otros/optimizacion2./clase2.pdf