Fundación POLAR
UltimasNoticias

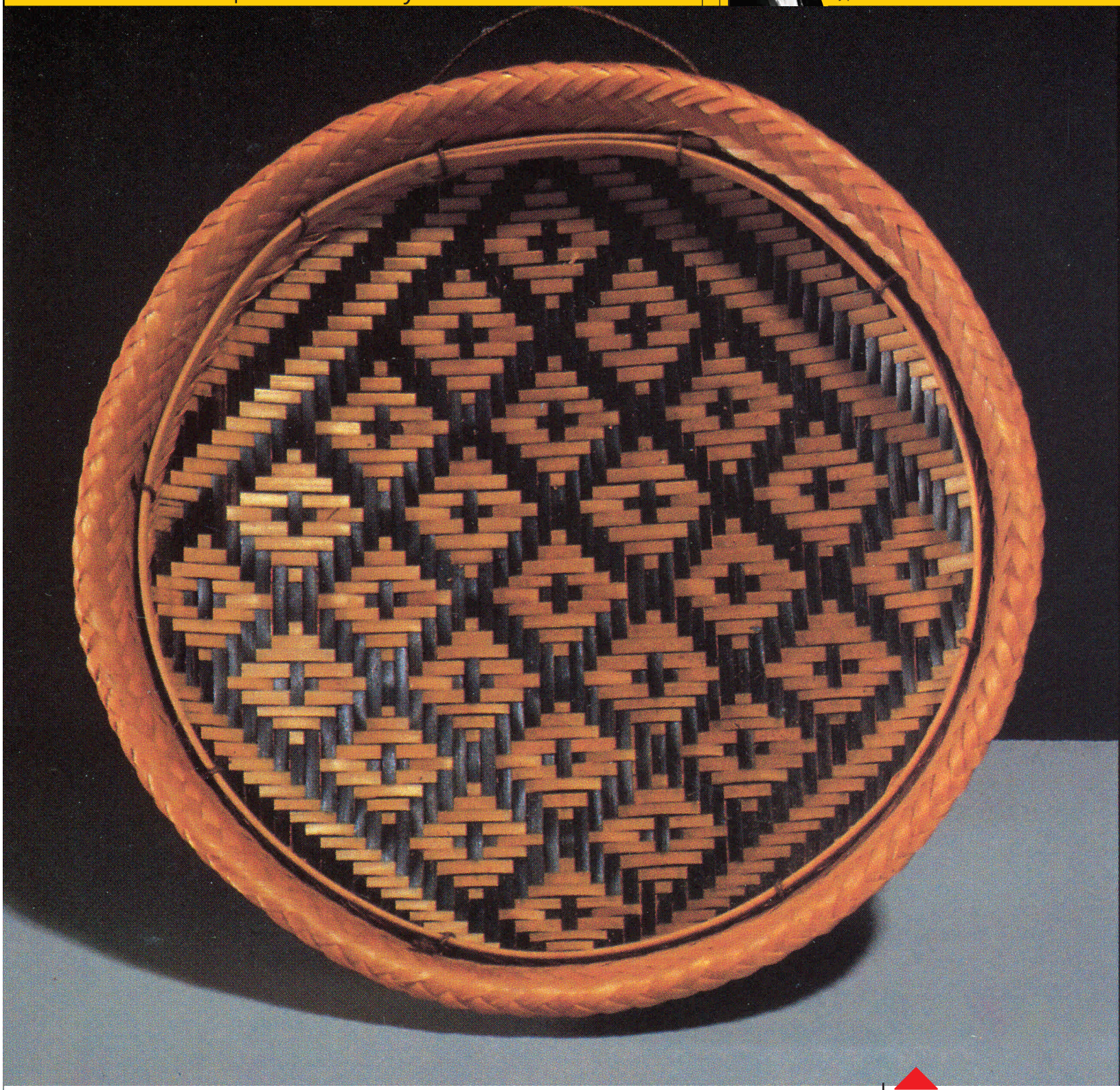
Matemática para todos

Fascículo 4

El mundo de los movimientos y de las simetrías

Geometría III

Juan Manuel Cajigal y Odoardo (1803-1856)
Ingeniero, militar, matemático y periodista venezolano

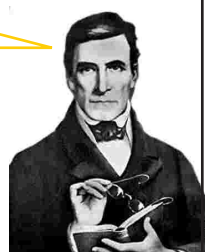


Wapa de la etnia panare donde se observan simetrías.

Fotografía: Cristina Paván, Casa Alejo Zuloaga. San Joaquín, estado Carabobo.

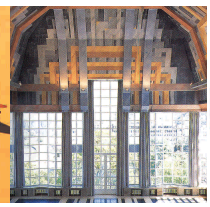
"Los que conocen a este señor deploraban y deploran que no se haya hecho uso de las ventajas que ofrece un joven venezolano que a una vasta ilustración en las matemáticas que ha estudiado por más de catorce años en España y Francia, une la noble ambición de consagrarse al bien de su país sin más recompensa, además de una módica subsistencia, que el honor de tributarle sus servicios y merecer de este modo la estimación pública".

José María Vargas, refiriéndose a Juan Manuel Cajigal (en el tope), en su informe del 3 de octubre de 1830 en relación con la creación de la Academia de Matemática, de la que Cajigal fue su primer maestro y primer director.



Descubriendo el mundo de los movimientos

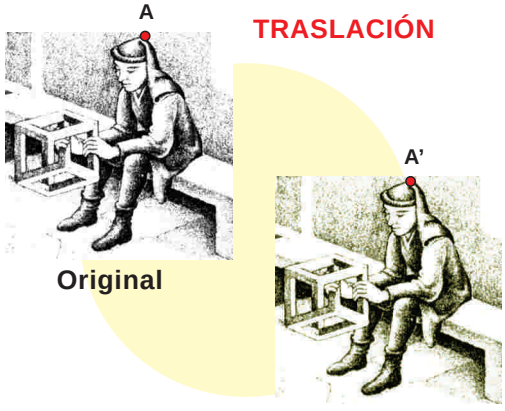
La geometría no es sólo el estudio de las figuras y sus propiedades, sino también los movimientos de esas figuras. El deslizarse en una patineta o en una pista de hielo, trasladarse en una escalera mecánica, girar en un auto o en la rueda o verse en un espejo son movimientos físicos. Algo interesante en estos movimientos es que la persona o el objeto que se desliza, gira o se voltea no cambia de forma ni tamaño. Esos movimientos inducen en la geometría el estudio de las transformaciones de figuras. **Traslación, rotación, reflexión** de figuras son movimientos estudiados por la geometría. La geometría describe los movimientos al estudiar la correspondencia entre los puntos de la figura original y los puntos de la nueva figura o imagen.



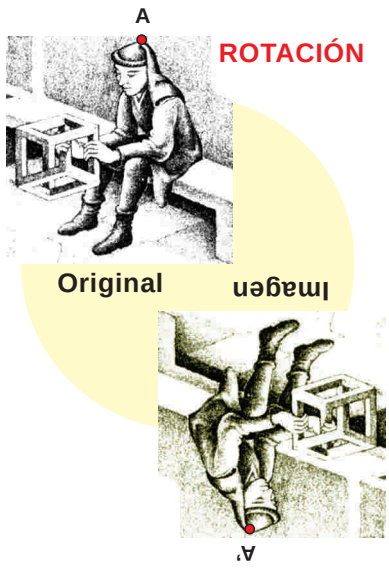
Isometrías

Cada imagen es la transformada de una figura. Observa en las imágenes de abajo cómo a cada punto de la figura original (**A**) le corresponde un solo punto de la imagen (**A'**) y a cada punto de la imagen le corresponde un solo punto de la figura original. Estas transformaciones tienen algo adicional: no cambian el tamaño ni la forma de la figura, sólo cambian su posición. Estas transformaciones se llaman isometrías. La palabra isometría (iso: igual, metría: medida) describe muy bien estos movimientos. Las traslaciones, rotaciones y reflexiones son isometrías. Veremos como estos movimientos son utilizados en los diseños de papel tapiz, diseños de cerámicas y en el arte en general.

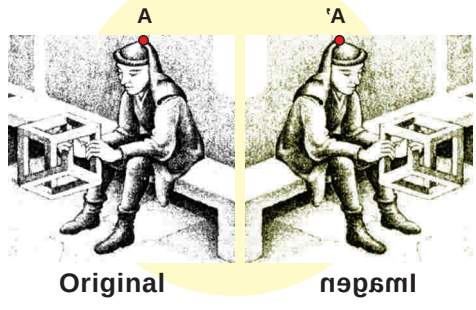
TRASLACIÓN



ROTACIÓN

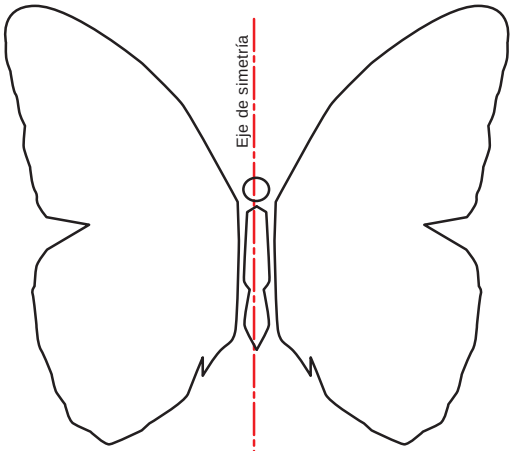


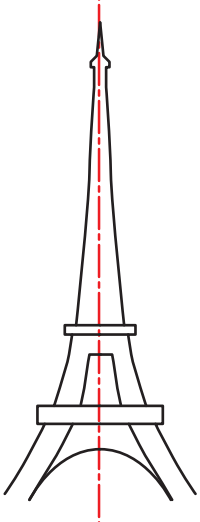
REFLEXIÓN



Simetría axial o reflexión respecto de una recta (bilateral)

En la naturaleza, en el arte, en las cerámicas, papeles de decoración de las paredes (ornamentación geométrica) y otros, se encuentran simetrías bilaterales (reflexiones respecto de rectas o ejes).





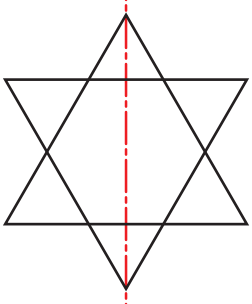
Torre Eiffel
París, Francia.

Eje t

pppppppppppp

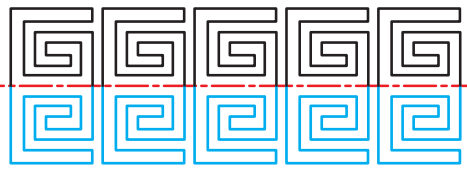
bbbbbbbbbbbb

La secuencia de letras b es simétrica de la secuencia de letras p respecto al eje t.

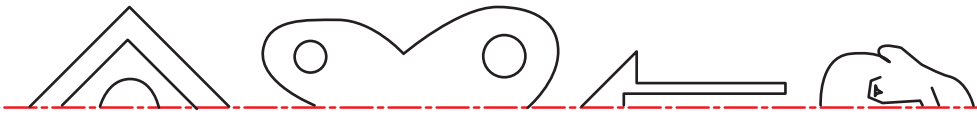


Estrella de seis puntas (la estrella de David) simétrica según diversos ejes. Dibuja los otros ejes de simetría.

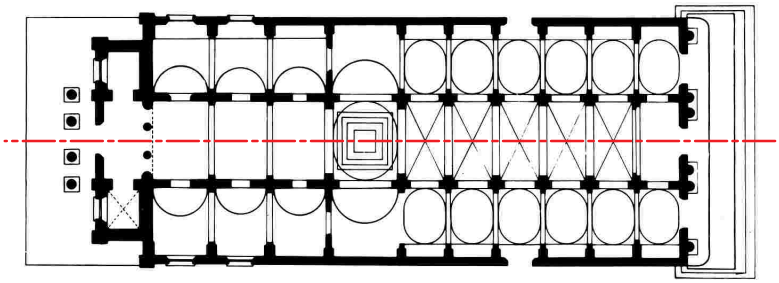
Eje



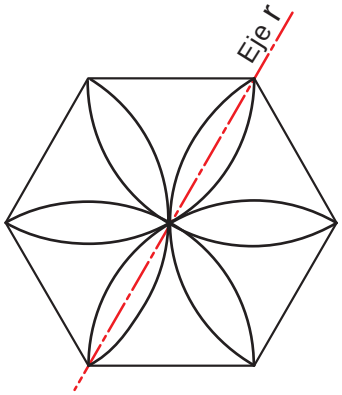
Completa la figura según el eje de simetría



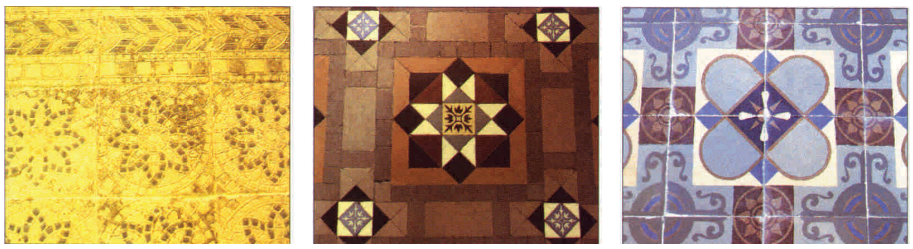
Simetría axial o reflexión respecto de una recta (bilateral)



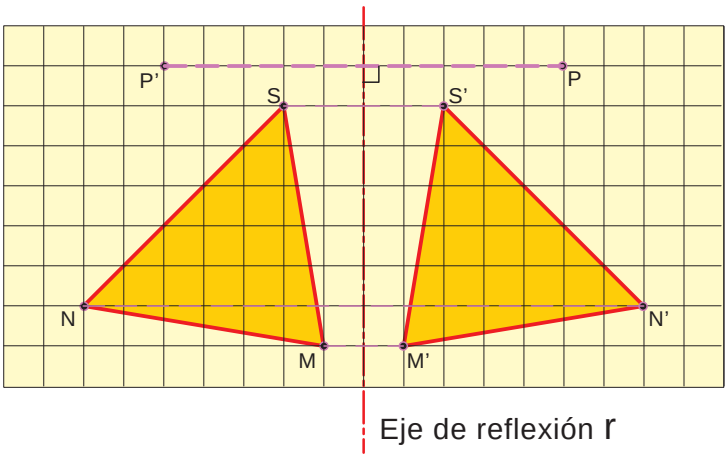
Iglesia de Santa Teresa
Caracas, 27 de octubre de 1876



El hexágono regular y la flor con seis pétalos son simétricos respecto al eje r. Dibuja los otros ejes de simetría.

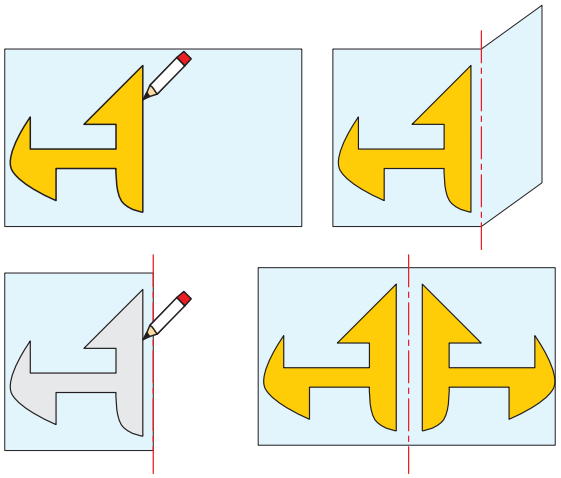


En diseños geométricos hay gran variedad de simetrías bilaterales.



Eje de reflexión r

Una reflexión o simetría axial es una isometría del plano que deja fijos los puntos de una recta r (el eje de reflexión o de simetría).
Si P es un punto que no pertenece al eje r, entonces su imagen P', mediante la reflexión del eje r, es tal que PP' es perpendicular a r y las distancias de los puntos P y P' a r son iguales (el eje r es mediatriz del segmento PP').



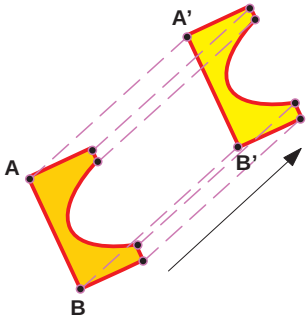
Una forma práctica de realizar simetrías axiales es la siguiente: Se dibuja una figura en un papel transparente, se dobla en alguna parte (preferiblemente la recta del pliegue que no atraviese la figura) y se calca la figura. Al desplegar el papel resultan dos figuras simétricas respecto de la recta de pliegue. Esto también se puede realizar con dos acetatos superpuestos.

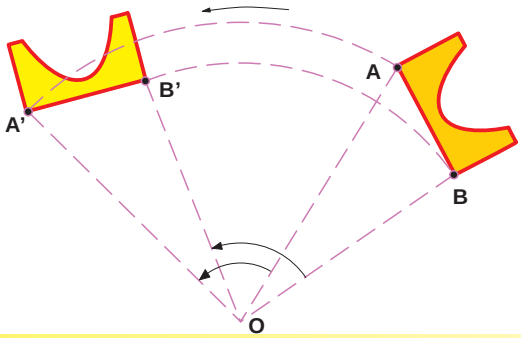
Las siguientes letras tienen ejes de simetría. Dibuja otras que también lo tengan.

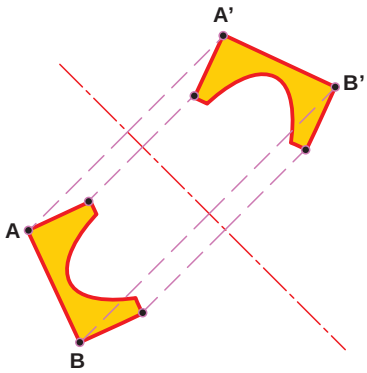
Simetrías de traslación, rotación y axial

INTERESANTE

Las isometrías (movimientos rígidos o congruencias) de un plano, diferentes de la identidad, se clasifican según la cantidad de puntos fijos que tienen.





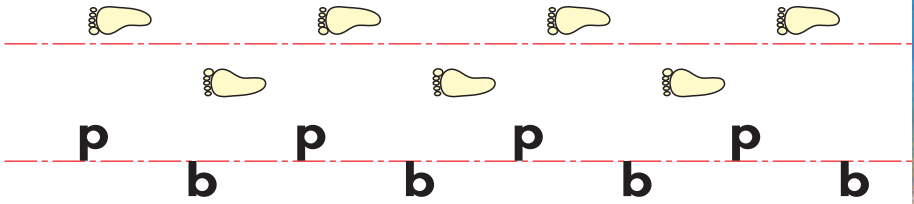


Las que no tienen puntos fijos son las traslaciones (**simetría de traslación**).

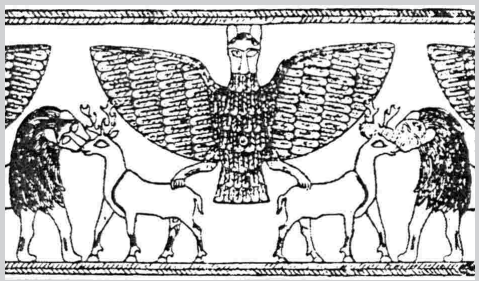
Las que tienen un único punto fijo **O**, son las rotaciones de centro **O** (**simetría rotacional**). Las rotaciones de ángulo 180º son las simetrías centrales.

Las que tienen más de un punto fijo, por lo tanto tienen fijos todos los puntos de una recta, son las reflexiones cuyo eje es esa recta (**simetría axial o bilateral**).

Hay las combinaciones (composiciones) de esos tipos de isometrías, entre las que mencionamos las reflexiones con deslizamiento: es una reflexión seguida de una traslación paralela al eje de reflexión (o en el orden contrario). Ese tipo de isometría se manifiesta en las huellas que dejan los pies al caminar sobre la arena de playa y en la disposición de hojas de helechos, entre otros.



¿SABíAS QUE...?



Las simetrías han sido utilizadas desde la antigüedad por diversas civilizaciones. Los sumerios fueron particularmente aficionados a la simetría bilateral, de esto hay gran variedad de ejemplos.

Para H. Weyl “La simetría, independientemente de la amplitud con que se defina su significado, es una idea por medio de la cual el hombre, a través de los tiempos, ha intentado comprender y crear orden, belleza y perfección”.

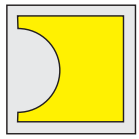
También nuestras poblaciones indígenas se valen de la simetría para la decoración de diversos objetos como las cestas. La fotografía nos da un excelente ejemplo de ello.

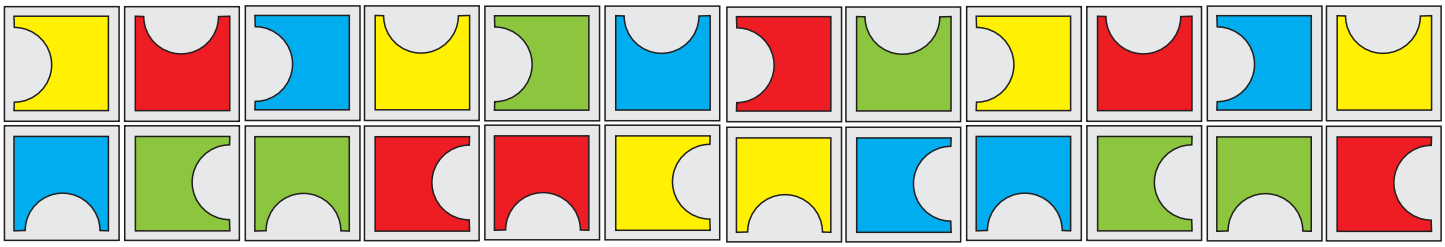
Simetría y decoración

Utilizando un motivo (una figura) y por repetición del mismo, mediante simetrías de diversos tipos, se obtienen diseños geométricos con los cuales se pueden realizar ornamentaciones (decoraciones). Cuando el motivo generador se repite a lo largo de una faja, se obtienen los frisos (bandas o cenefas) y si se recubre una parte del plano, sin dejar "huecos" ni superponerse (bien acoplados), se obtienen mosaicos o teselaciones. También hay diseños denominados grupos puntuales de Leonardo (en honor a Leonardo da Vinci) que son figuras con centro (un punto fijo: rotaciones con un centro en ese punto y reflexiones respecto de ejes que pasan por ese punto).

Palacio Saarbrücken
Alemania

Un friso con motivo generador

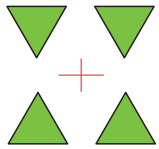




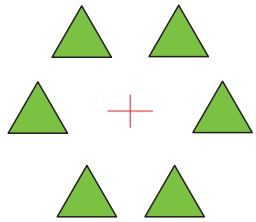
Partiendo de un (Motivo inicial o motivo generador) al que aplicamos sucesivas isometrías bilaterales y rotacionales (un grupo puntual o de Leonardo).

Motivo generador

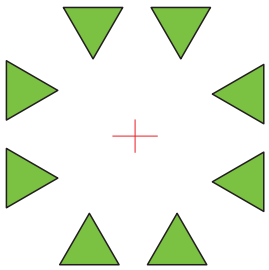
Simetría axial



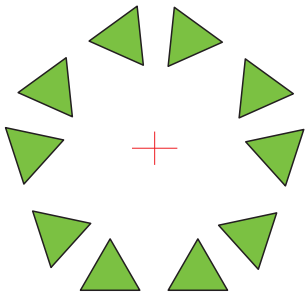
Rotación de 180º
(180º = 360º/2)



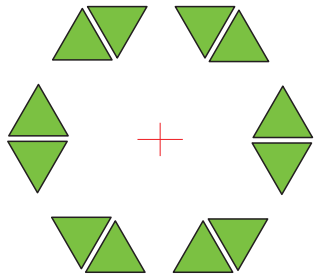
Rotación de 120º
(120º = 360º/3)



Rotación de 90º
(90º = 360º/4)

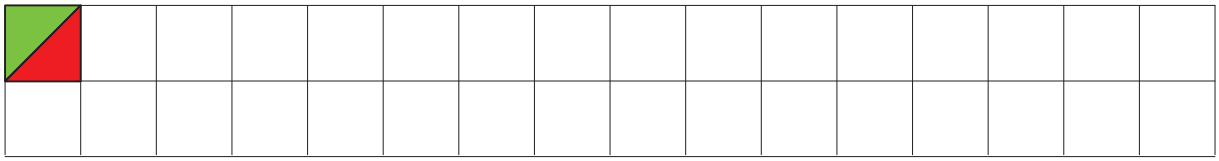


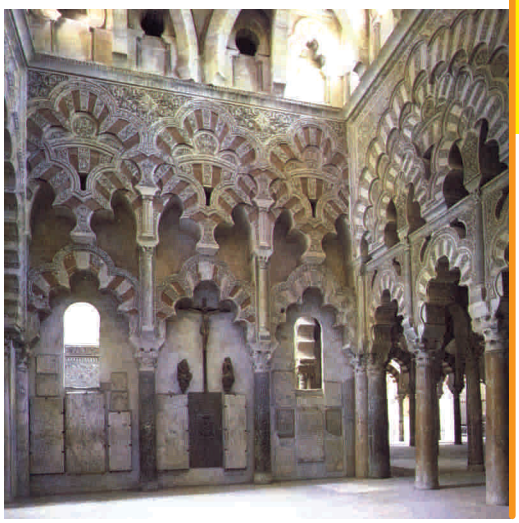
Rotación de 72º
(72º = 360º/5)



Rotación de 60º
(60º = 360º/6)

Crea tu propio friso





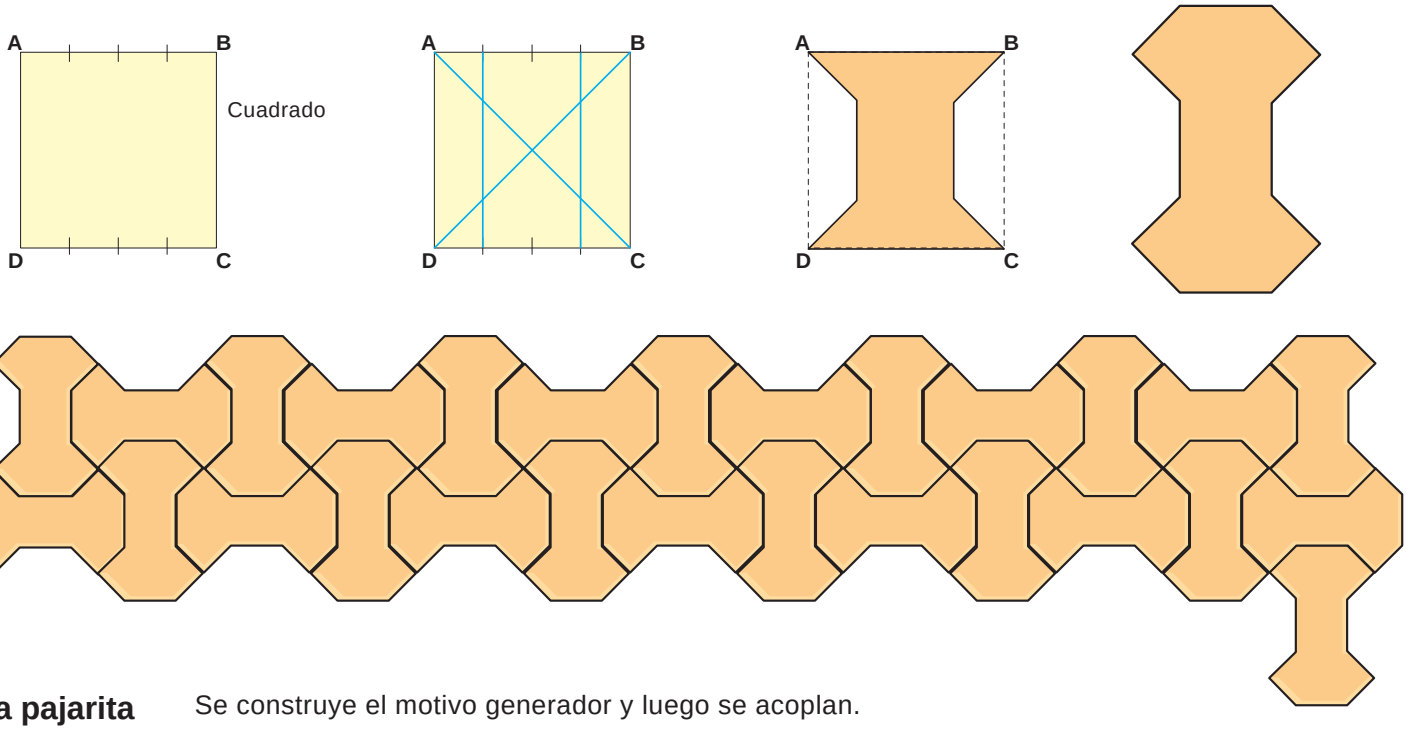
Capilla de Villaviciosa
Córdoba, España.

Geometría y arte

El arte islámico es muy rico en diseños geométricos. Entre estos, los árabes decoraron sus palacios con una gran variedad de ornamentos construidos a partir de figuras geométricas mediante su repetición y acoplamiento. Este arte islámico tiene su mayor exponente en la **Alhambra de Granada**. Dos ejemplos de estos mosaicos son el polihueso y la pajarita.

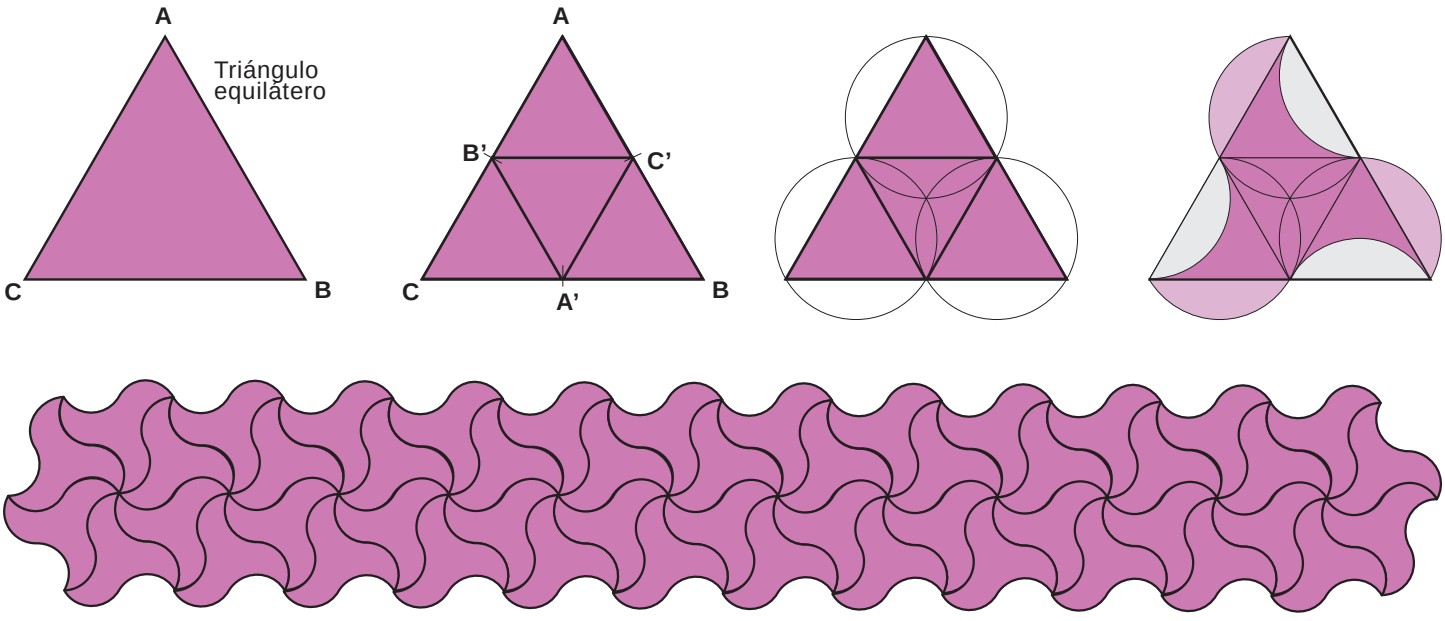
El polihueso

Primero se construye el hueso a partir de un cuadrado y luego se acoplan éstos para construir el embaldosado.

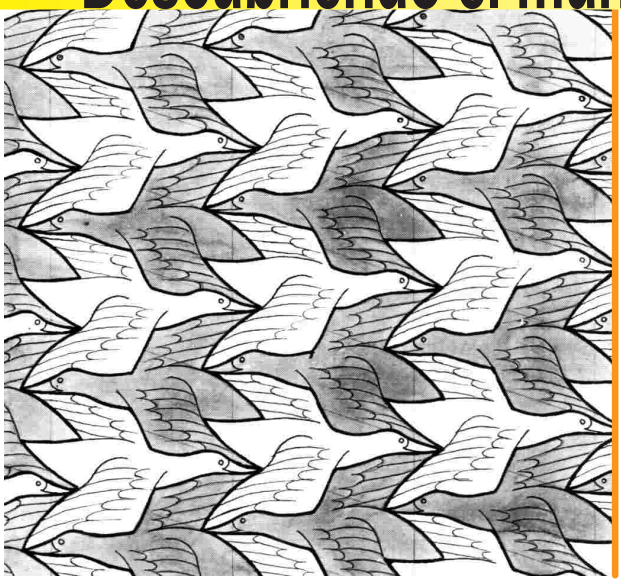


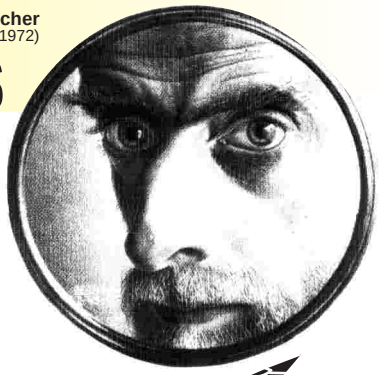
La pajarita

Se construye el motivo generador y luego se acoplan.



Descubriendo el mundo de los movimientos

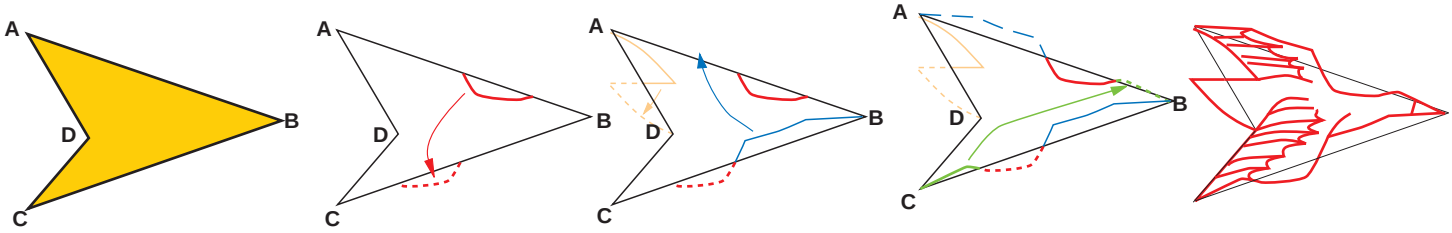




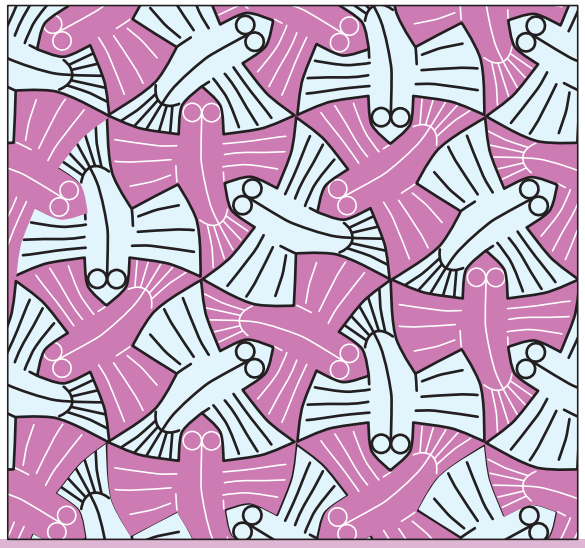
Mauritz Cornelis Escher
(1898-1972)

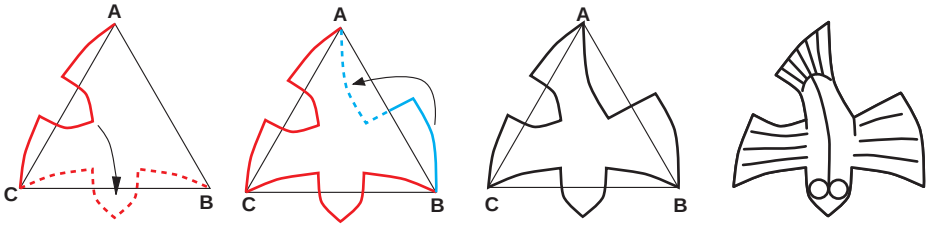
Rotaciones y embaldosar

El artista holandés M. C. Escher, inspirado en el embaldosado de La Alhambra en España, aprendió a usar traslaciones, rotaciones y reflexiones para cambiar la forma de los triángulos equiláteros, paralelogramos y hexágonos regulares en figuras como pájaros, peces y reptiles que también sirvieran para embaldosar. A la izquierda está una ilustración donde utilizó rotaciones sobre el cambio de forma de un polígono. Observa, abajo, la creación de la figura de un pato a partir del polígono ABCD.

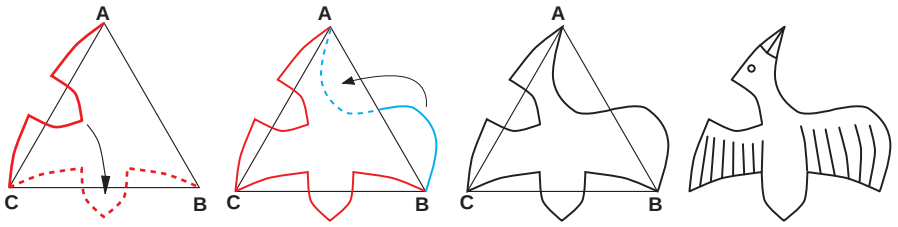


Observa, abajo, la creación de un “pez volador” (M.C. Escher) a partir de un triángulo equilátero.



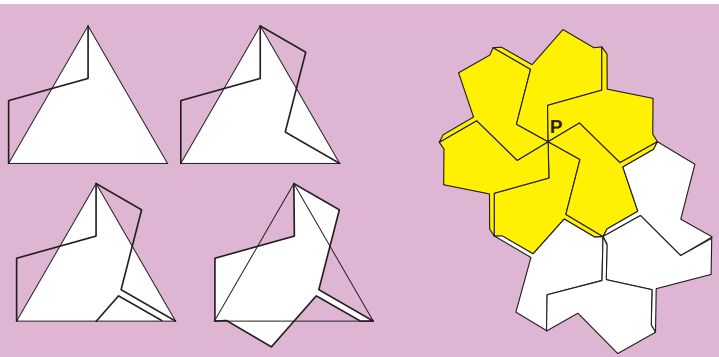


Observa cómo con pequeñas variaciones en las curvas aparecerá la figura de un pájaro en vez de pez volador. Recorta el modelo y tesela el plano.



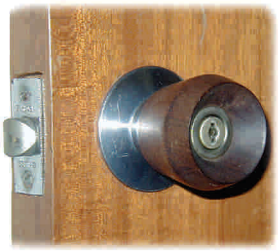
Reto

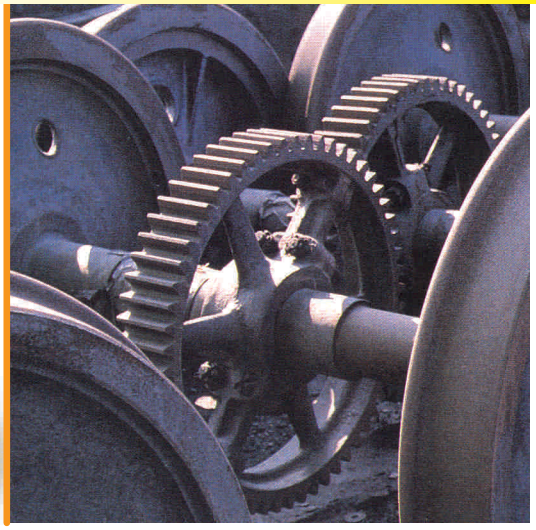
Observa las modificaciones y rotaciones de un triángulo equilátero. Recorta el modelo y tesela el plano como se ve a la derecha. Nombra todas las rotaciones con centro en el punto P que aplica esta tesela sobre sí misma.

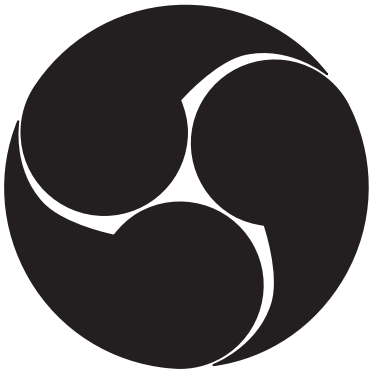


Rotaciones

Girar, como deslizar, es un movimiento físico que hemos experimentado desde temprana edad, abrir la puerta de un cuarto, ver girar las agujas de un reloj, en un engranaje, las ruedas de una bicicleta o de un automóvil, en un tiovivo, en muchas obras de arte.





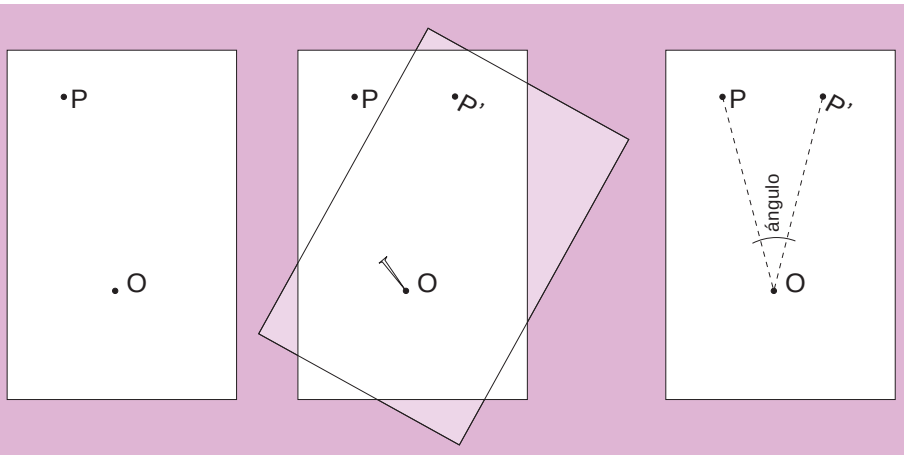


Símbolo Shinto: representa la revolución del Universo

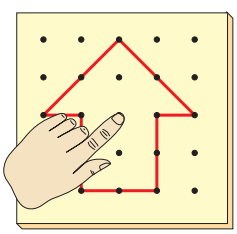
Movimiento perpetuo de Leonardo da Vinci

Dibuja un punto P y un punto O en el cuaderno y copia el punto P en una hoja de papel transparente. Fija en el punto O el papel transparente, con un alfiler, y gira el papel hacia la derecha. Marca con P' la nueva posición de P. P' es la imagen rotada del punto P.

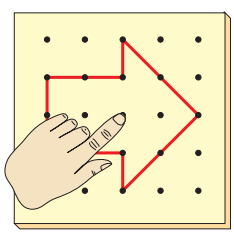
En una rotación, los puntos de cualquier figura original giran una cantidad constante de grados alrededor de un punto fijo. Así: un punto fijo, el punto O (centro de rotación) y el punto rotado definen una rotación.

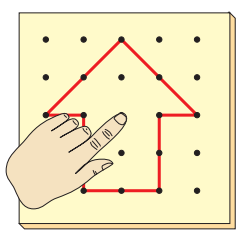


OBSERVA ROTACIONES CON EL GEOPLANO

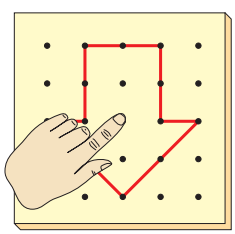


Girar un cuarto de vuelta o 90º alrededor del punto centro.

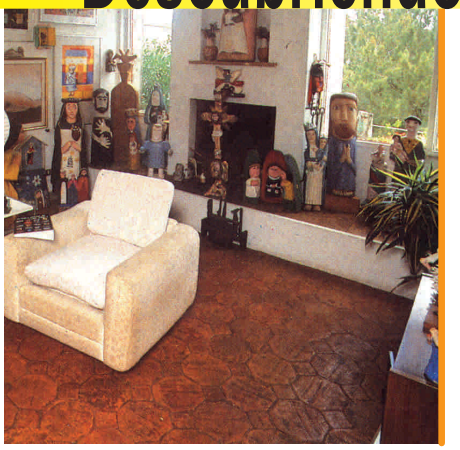




Girar media vuelta o 180º alrededor del punto centro.

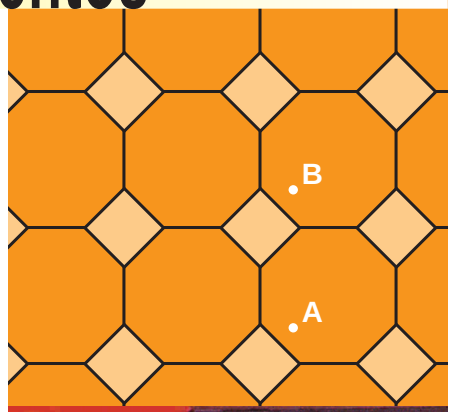


Descubriendo el mundo de los movimientos

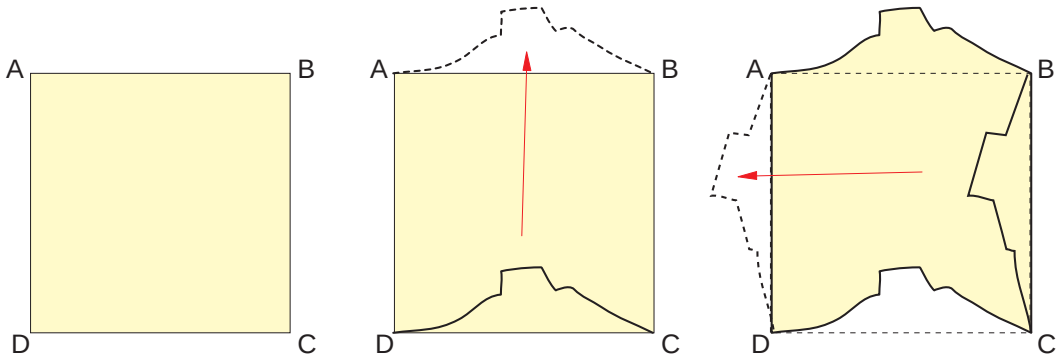


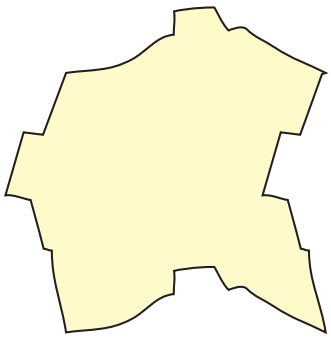
Trasladar y embaldosar

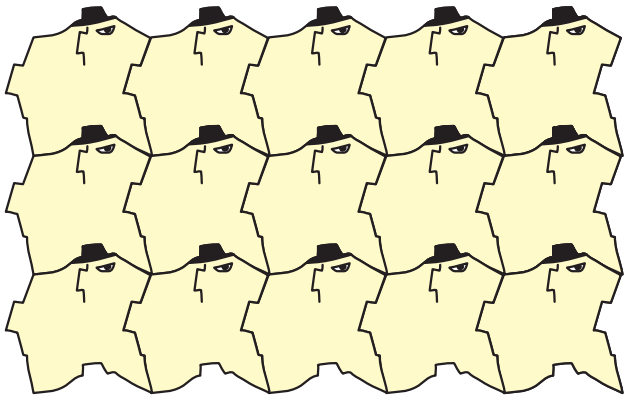
Embaldosar o teselar un plano consiste en cubrir el plano con figuras de tal forma que no queden huecos entre las figuras ni que las figuras se solapen.
Observa cómo la traslación de un octógono y de un cuadrado constituye el embaldosado de la derecha (mosaico semirregular)

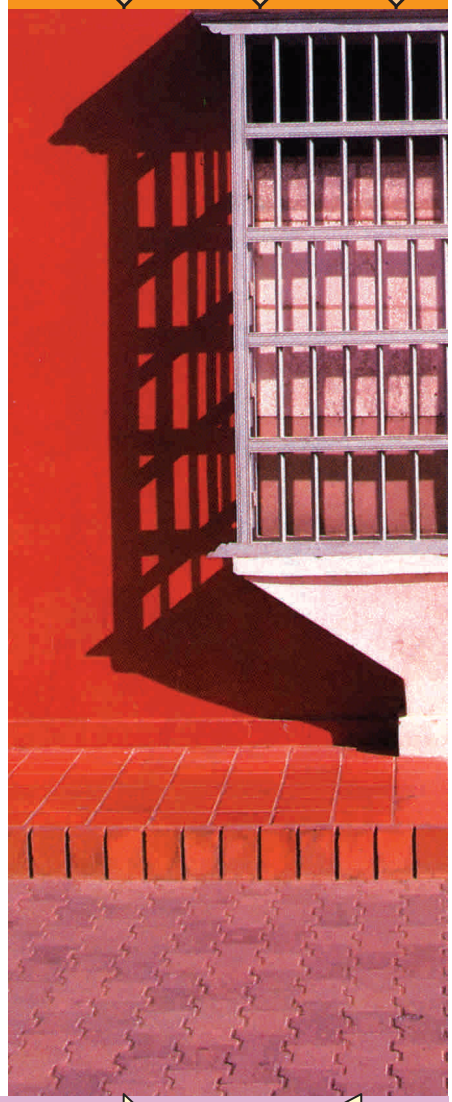


Observa un embaldosado especial: *El salto del sapo*, creación de Robert Canete, un estudiante de geometría. Observa la creación de la figura que se traslada por cambio de los lados opuestos de un cuadrado.



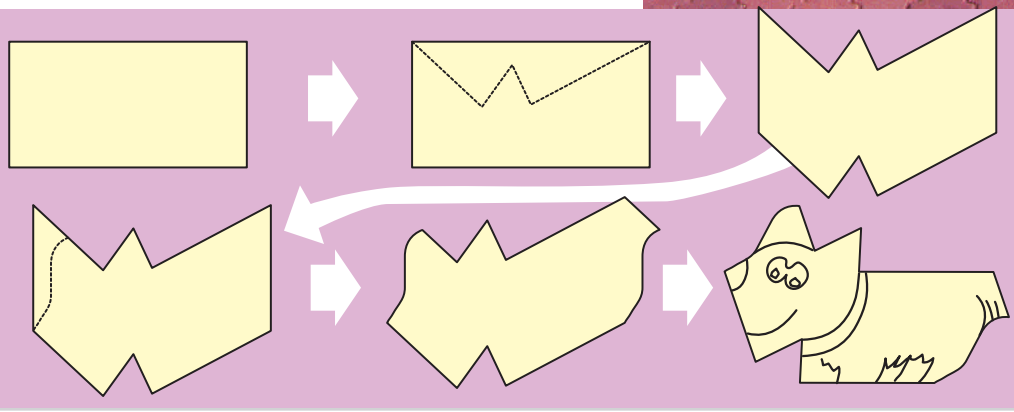






Reto

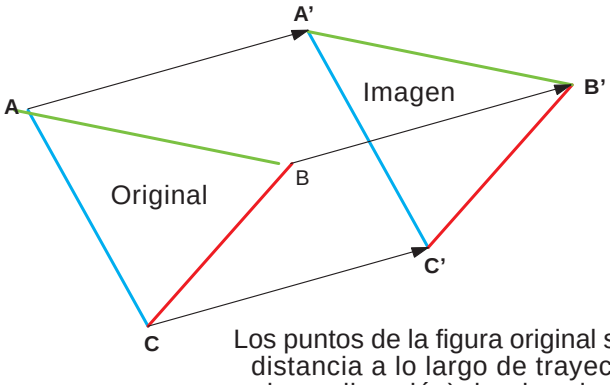
Corta el rectángulo según el modelo y tesela el plano. Observa que lo que quitas en un lado lo agregas en el lado opuesto.

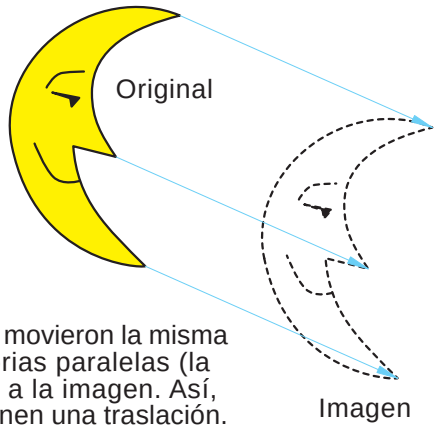


Traslaciones

Observa modelos físicos de traslaciones: montarse en un ascensor o en una escalera mecánica y pasar de un piso a otro de un edificio, el deslizarse por un tobogán recto, el caminar de un punto a otro en una calle.

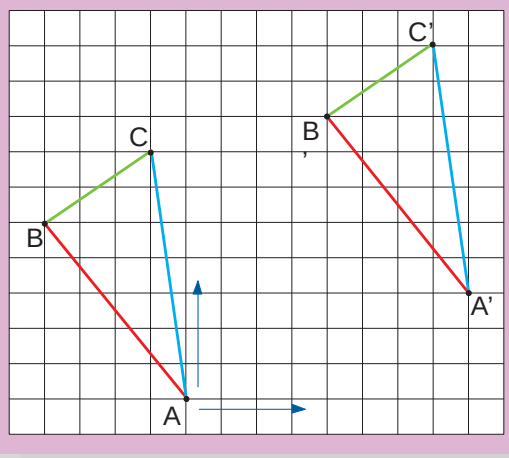
Dibuja un triángulo o una media luna en tu cuaderno y cópialos en una hoja de papel transparente. Desliza la hoja una cierta distancia, en cualquier dirección, sin que gire y copia las figuras en el cuaderno: la nueva figura es la **imagen trasladada** de la original.

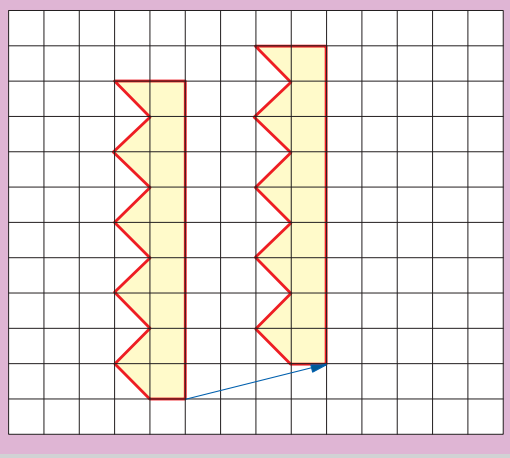


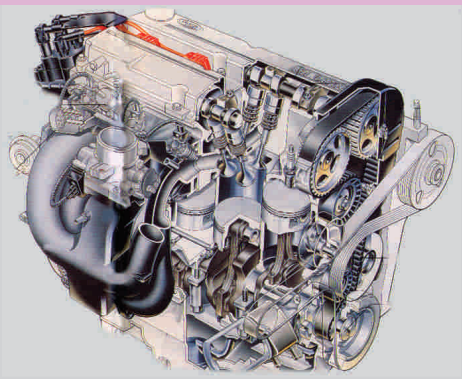


Los puntos de la figura original se movieron la misma distancia a lo largo de trayectorias paralelas (la misma dirección) dando origen a la imagen. Así, una distancia y una dirección definen una traslación. Se utiliza una flecha, llamada **vector traslación**. La longitud de la flecha define la distancia, y su dirección, la dirección de traslación.

En papel cuadriculado o en papel punteado, el vector traslación puede definirse usando un par ordenado: el primer número expresa la distancia en la que un punto de la figura se mueve horizontalmente y el segundo número cuánto se mueve verticalmente. La primera figura se movió ocho unidades a la derecha y tres unidades hacia arriba: vector traslación (8,3). Segunda figura, vector traslación (4,1).







¿SABÍAS QUE...?

Existen muchas máquinas que combinan movimientos de rotación y traslación. Una de ellas es el motor de los automóviles: los pistones se trasladan y con el árbol de levas generan un movimiento de rotación que al final hace que el automóvil se traslade. Averigua qué otras cosas utilizan estos dos movimientos simultáneamente y discútelas con tus amigos y profesor o maestro.

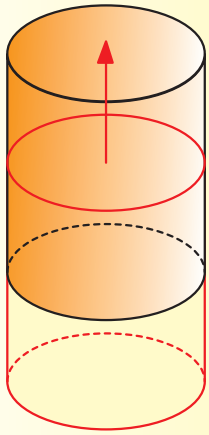
Descubriendo el mundo de los movimientos

INTERESANTE

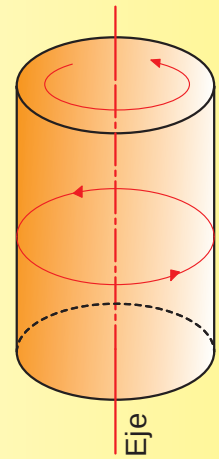
Las isometrías (movimientos rígidos o congruencias) del espacio, diferentes de la identidad, se clasifican según los puntos fijos que tienen:

En un cilindro se pueden observar estos tres tipos de isometrías:

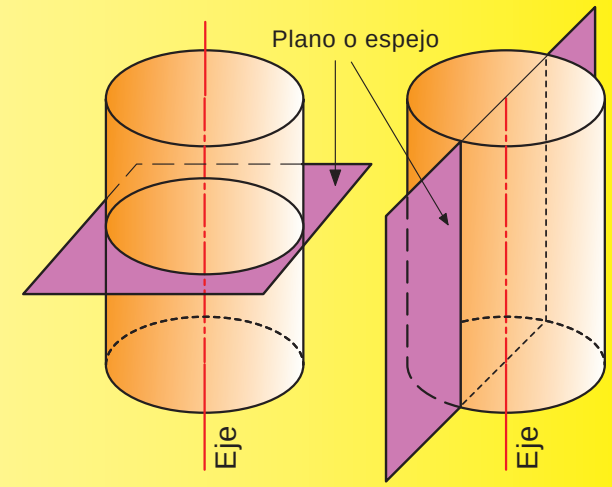
Las que no tienen puntos fijos son las **traslaciones**.



Las que tienen una recta de puntos fijos (un eje) son las **rotaciones** en torno de esa recta.



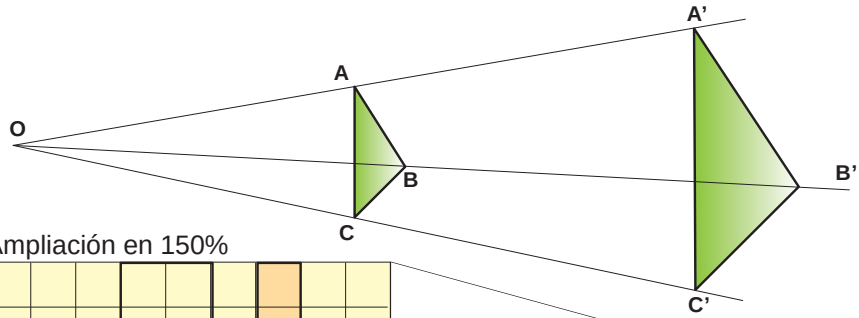
Las que tienen un plano de puntos fijos, son las **simetrías especulares** (**simetría respecto a un espejo**).



También hay las combinaciones (composiciones) de esos tipos de isometrías.

Semejanzas

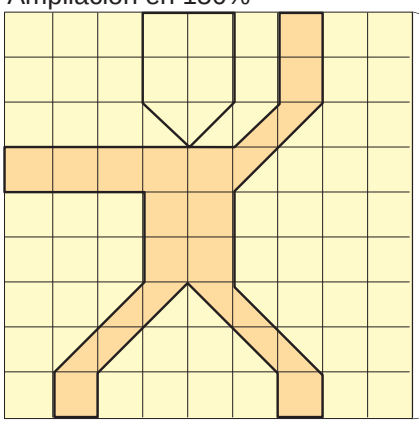
Además de las isometrías, bien sea de un plano o del espacio, hay otras transformaciones geométricas como las semejanzas. Éstas conservan las formas de las figuras pero alteran su tamaño, tal como se hace al reducir o ampliar en fotocopias alguna figura o texto.



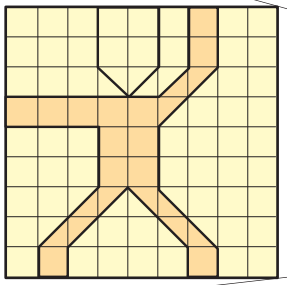
Una **homotecia** de centro **O** y razón igual a **2**. **Los lados del triángulo A'B'C'**, imagen del triángulo **ABC**, aumentaron el doble en longitud. **El área del triángulo A'B'C'** es cuatro veces el área del triángulo **ABC**. ¿Por qué?

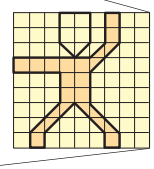
Con las isometrías se definen las **figuras congruentes**.
Con las semejanzas se definen las **figuras semejantes**.

Ampliación en 150%

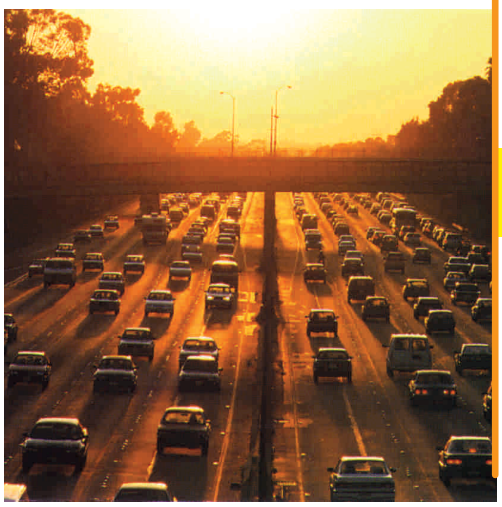


Tamaño real





Reducción al 50%



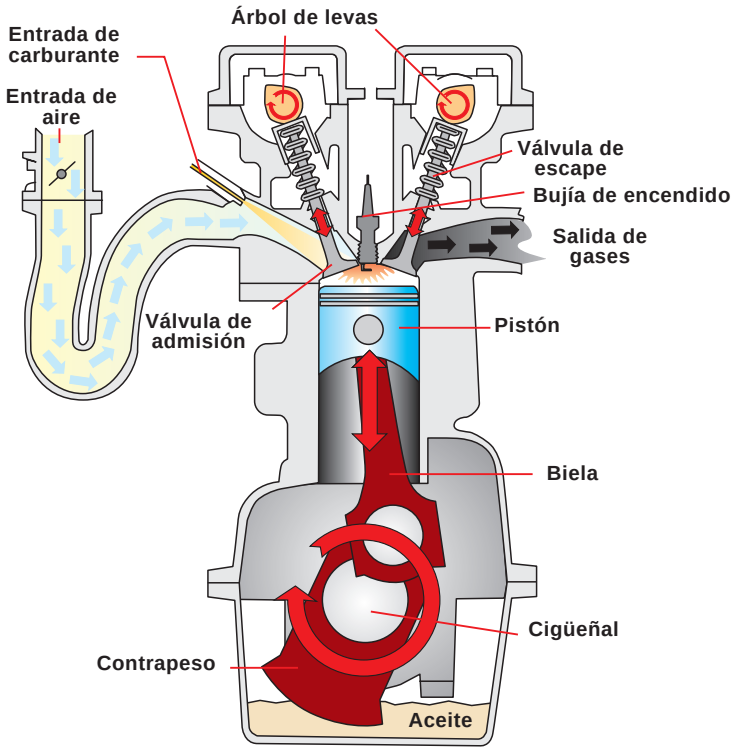
Geometría y ciencia-tecnología

Motor de combustión interna

El motor de combustión interna es un mecanismo inventado para la facilidad del transporte. Creado por el escocés Dugald Clerk, en 1878 y modificado por Joseph Day, en 1891, ha sido el motor por excelencia de vehículos y motocicletas. El motor tiene cilindro, pistón, cigüeñal y bujía. Sus fases de funcionamiento son admisión, compresión, combustión y escape de gases, y se cumple en un movimiento completo del pistón hacia arriba y hacia abajo: un movimiento de traslación del pistón y se generan así movimientos de rotación del cigüeñal que al final hace que las ruedas giren. El ciclo de trabajo se inicia cuando el pistón se traslada del punto muerto inferior al punto muerto superior. Este movimiento de traslación del pistón en el cilindro genera el movimiento de rotación del cigüeñal. Observa esto en el diagrama aquí ilustrado.

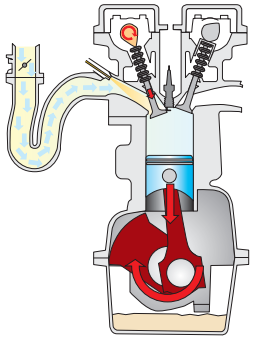
Uno de los primeros automóviles propulsados por un motor de combustión interna fue construido por Karl Benz en 1885. En diez años, su fábrica creó y comercializó numerosos automóviles. El modelo Benz Velo (Fotografía, 1898) fue el primer vehículo vendido en grandes cantidades.

Modelo de vehículo utilizado en las carreras Fórmula 1. Estos automóviles alcanzan velocidades hasta de 320 km/h, pero sus motores deben ser reconstruidos al final de cada carrera.



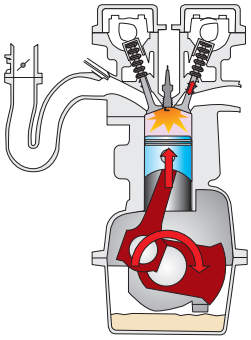
Entrada de aire y combustible

Al inicio, el pistón baja y el árbol de levas abre la válvula de admisión. El combustible (gasolina) y el aire son aspirados dentro del cilindro.



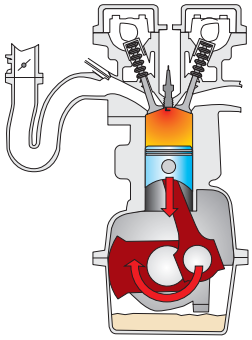
Subida del pistón y compresión de la mezcla

El pistón sube. El aire y el combustible son comprimidos y se recalientan. Se enciende la bujía.



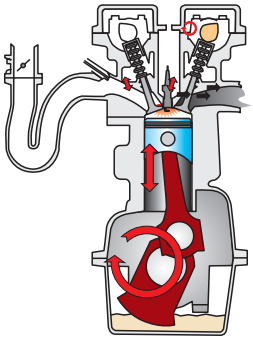
La mezcla se enciende y el pistón es empujado hacia abajo

Se enciende el combustible y el pistón es empujado hacia abajo.



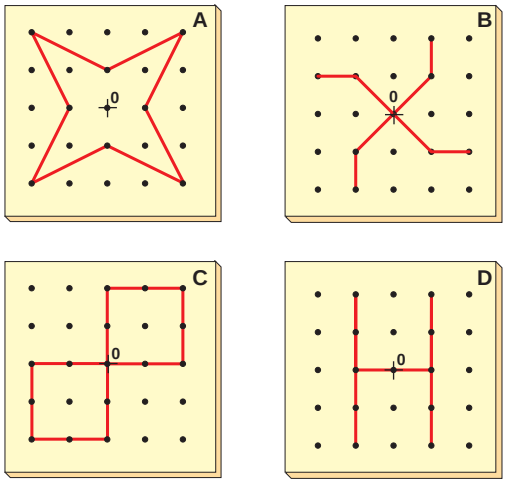
Expulsión de gases

La válvula de escape se abre por la rotación del árbol de levas, y los gases residuales son expulsados al exterior.

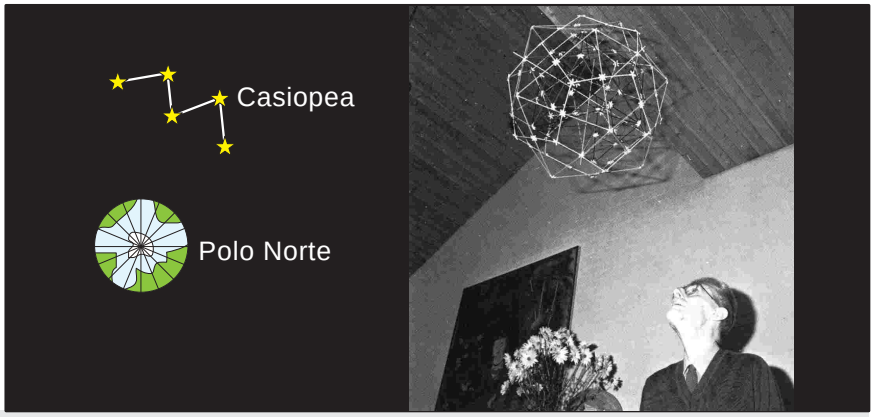


Tengo que pensarlo

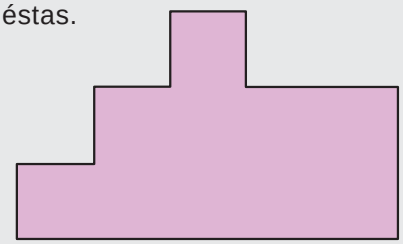
1 ¿Cuál de estas figuras será la misma después de una rotación de 1/4 de vuelta? ¿Y de 1/2 vuelta?



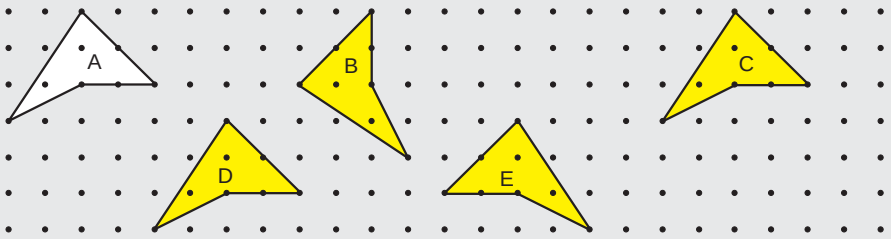
2 Un astrónomo está construyendo un mapa de estrellas para demostrar la posición de la constelación Casiopea. El mapa muestra su posición respecto al Polo Norte a las 9:00 p.m. ¿Cuál es la posición de la constelación a las 3:00 de la mañana?



3 Esta figura recibe el nombre de Polimino. Construye un rectángulo con cuatro de éstas.



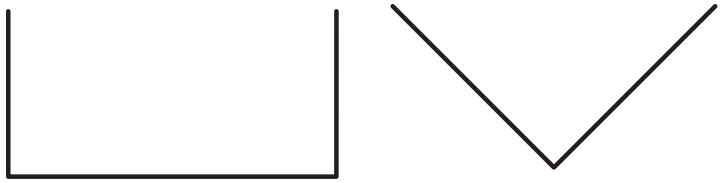
4 ¿Cuáles de estas figuras son rotaciones, simetrías o traslaciones de la figura A?



5 Coloca un espejo plano en posición vertical sobre la línea AB del siguiente dibujo. ¿Qué ves?

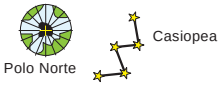
A 1380803 B

6 Completa un cuadrado con cada una de las figuras de abajo, utilizando para ello un espejo plano.

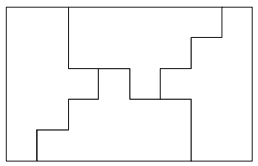


Resultados

1. A, B y C son las mismas rotándolas $\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{2}$ vuelta. D varía al rotarla $\frac{1}{4}$ de vuelta, y queda igual rotándola $\frac{1}{2}$ vuelta.

2. 

De 9:00 p.m. a 3:00 a.m. transcurren 6 horas. La Tierra da una vuelta entera en 24 horas, por lo que 6 horas = $\frac{1}{4}$ de vuelta, es decir, una rotación con centro de rotación en el Polo Norte y un ángulo de 90º.

3. 

4. B es resultado de traslación y rotación de 90º. C y D son traslaciones de A. E es resultado de traslación y simetría según el eje vertical.

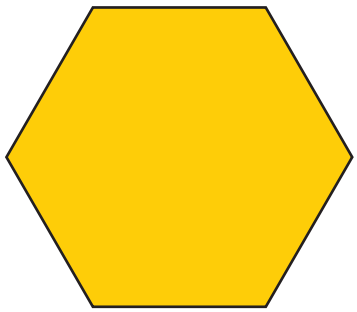
Poliedro con flores
Maurits Escher

Ventana didáctica

Estrategias sugeridas al docente

La Simetría se propone en los Programas Oficiales de Matemática a partir del 1er Grado de la Educación Básica en Venezuela. Se trabaja en los tres primeros Grados de la 1ª Etapa de una manera intuitiva, mediante trazados, dobleces, recorte y completación de figuras para obtener unas imágenes simétricas. Por medio de variados procedimientos se va desarrollando el concepto, y en la 2ª Etapa se sistematizan algunas de sus nociones hasta llegar al 6º Grado, donde se considera logrado el concepto de simetría bilateral o axial.

Las experiencias previas que los niños han logrado en su entorno (cuando, por ejemplo, construyen el "barquito de papel" y hacen numerosos dobleces, que son simétricos; superponen las alas de la mariposa al capturarla; observan las hojas de las plantas con su nervadura central y sus dos partes iguales de ambos lados, que pueden juntarse quedando del mismo tamaño) y una oportuna y efectiva motivación del docente que los lleve al recuento y a la reflexión, los enfrenta a una situación –problema– que les interesa resolver.



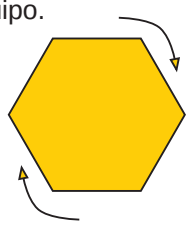
Hexágono regular

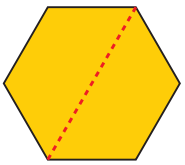
Por ejemplo, en el 4º Grado:

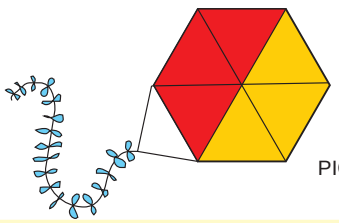
Determinar y dibujar los ejes de simetría en el hexágono regular que construyeron para hacer una Picúa (papagayo de forma hexagonal amarrado sobre los tres supuestos ejes de simetría).

Los estudiantes se preguntan ¿cómo lo vamos a lograr? La búsqueda de la resolución los conduce a la acción y a la creación de variadas formas de hacer. Se organizan en equipos e intercambian ideas. La maestra incentiva la actividad con algunas preguntas y les facilita el material: espejos, compás, tijeras, reglas y lápices de color.

Observan el hexágono regular que construyeron y está dibujado en hojas de trabajo para cada equipo.







PICÚA

Determinan las propiedades del hexágono: ¿cuántos lados? ¿cuántos vértices? ¿cuántos ejes de simetría le podemos trazar?

La maestra pregunta: ¿Cómo saben que el segmento trazado es un eje de simetría? Pruébenlo usando el espejo. Colóquenlo verticalmente de vértice a vértice pasando siempre por el centro. ¿Qué observan? ¿Cuántos ejes de simetría encontraron en el hexágono? ¿Sólo tiene esos? Averígüenlo con el espejo, dibújenlos y digan el resultado. ¿Cuántos ejes de simetría deben trazar ahora en el hexágono para hacer la Picúa? Los estudiantes piensan, usan los espejos que aplican verticalmente sobre la línea punteada en rojo, y ven reflejada la otra mitad de la figura.

Cada vez que lo rotan hacia el próximo vértice y van trazando un eje de simetría, ¿cuántos ejes trazaron?

La maestra les dice: ¿Están seguros de que esos segmentos son ejes de simetría? Los niños intervienen, hacen preguntas.

Proceden a armar una "PICÚA" en cada equipo, colocando un pedazo de verada sobre cada uno de los ejes de simetría dibujados.

Comparan su papagayo con otros que enseña la maestra. Se dan cuenta de que todos son simétricos.

Finalmente proyectan hacer la colección completa de papagayos. La maestra se propone aprovechar esa oportunidad para que los niños determinen los ejes de simetría de otros polígonos regulares usando “libros de espejos" (dos espejos que se unen con cinta adhesiva).

Bibliografía

Baena Ruiz, Julián y otros (1998), *La esfera*, Edit. Síntesis, Madrid, España.

Memorias (1998) III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Caracas, Venezuela.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM-2000).

Christine Kinsey y Teresa Moore (2002), *Symmetry, shapes and space*. Key College Publishing & Springer, EE.UU.

Software (programas informáticos)

Logo, Sketchpad (EE.UU.) y Cabri (Francia).
Programas que permiten dibujar figuras geométricas y estudiar sus propiedades.

Revistas

Resources in Education (RIE)
Superintendent of Documents. U.S. Government Printing Office. Washington DC 20402-9371

Nació en Anaco, estado Anzoátegui, en 1959. Cursó estudios superiores en la Universidad Simón Bolívar, donde obtuvo su licenciatura en Física (*cum laude*), en 1980. Realizó estudios doctorales en la Universidad de Texas en Austin, EE.UU., la cual le confirió el título de PhD en 1987. Es especialista en teorías unificadoras de la Física, particularmente en teorías de supercuerdas. Ha hecho contribuciones significativas en compactificación y fenomenología de cuerdas, así como en el estudio de simetrías de dualidad y simetrías espejo en cuerdas. La doctora Font es profesora visitante frecuente de universidades y centros científicos del exterior. Obtuvo el Premio "Lorenzo Mendoza Fleury" de la Fundación Polar en 1991. Actualmente es profesora titular de la Escuela de Física, de la Facultad de Ciencias, de la Universidad Central de Venezuela y miembro del Sistema de Promoción al Investigador (Nivel III).

Fotografía: Carlos Rivodó

Ana María Font

La matemática y el Premio "Lorenzo Mendoza Fleury"*

Según nos cuenta con entusiasmo la doctora Font, "... en la búsqueda de una teoría de las interacciones de las partículas fundamentales, los físicos se guían por el principio de simetría. Se entiende por simetría la invariancia al realizar ciertas transformaciones. Por ejemplo, sabemos que la dinámica de un sistema de partículas debe ser independiente de cómo se definen las direcciones en el espacio. La teoría debe ser entonces invariante al realizar una rotación. Existe un teorema maravilloso, demostrado por la matemática alemana Emmy Noether, el cual establece que a cada simetría o invariancia le corresponde una cantidad conservada".

En este fascículo trataremos entre otros temas del concepto de simetría, su relación con el arte, la naturaleza y diversas manifestaciones del intelecto humano. Lo expresado por la doctora Font está estrechamente relacionado con estas ideas. La noción de simetría en Matemáticas y Física es importante por las propiedades que preservan las figuras que son simétricas, es como cuando uno se mira en el espejo a diario, ahí está uno, la imagen nos muestra cómo lucimos. Nuestra imagen es una figura simétrica a nosotros y nos vemos iguales a como somos, es decir, aparecemos del otro lado del espejo de manera invariante, no hay variación en nuestra imagen. Esto sucede en los espejos planos como los que tenemos en casa, no así en espejos curvos, alabeados, como los que podemos encontrar en circos o ferias; al mirarnos en ellos nos hemos deformado, nuestra imagen no es invariante con respecto a nosotros.

Estas consideraciones sobre la noción de simetría y lo expresado por la doctora Font nos motivaron para comenzar este fascículo con una pequeña reseña de ella, ganadora del Premio "Lorenzo Mendoza Fleury" en su edición del año 1991, por sus trabajos en Física Teórica. Trabajos que muestran la estrecha y profunda relación entre la Matemática y la Física y en los cuales los conceptos de simetría e invariancia bajo transformaciones juegan un papel determinante. Finalizamos citando al gran sabio Galileo Galilei: *El gran libro de la Naturaleza está escrito en lenguaje matemático*. (Galileo: Saggiatore, Opere VI, p. 232).

* El Premio "Lorenzo Mendoza Fleury" fue creado por Fundación Polar en 1983, para reconocer el talento, creatividad y productividad de los científicos venezolanos. Se otorga cada dos años a cinco de nuestros más destacados investigadores y en el año 2003, su undécima edición, lo recibieron los químicos Sócrates Acevedo y Yosslen Aray, el físico Jesús González, el biólogo José R. López Padrino y el matemático Lázaro Recht.

Sabores GOLDEN