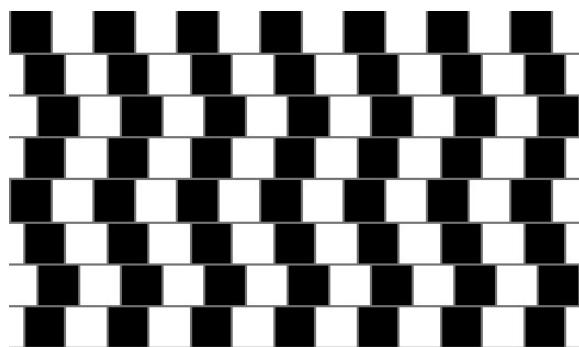
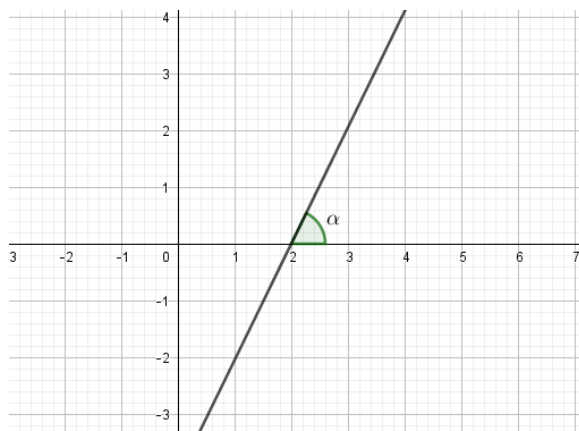




¿Líneas rectas?

1. La línea recta

1.1. Inclínación de una recta



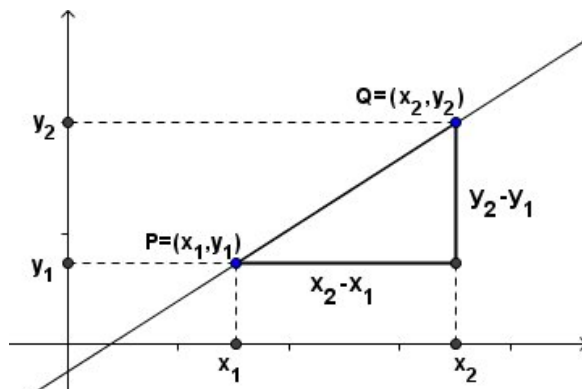
Inclínación de una recta

La inclinación de una recta L (que no sea paralela al eje X) es el menor de los ángulos que la recta forma con el semieje X positivo, medido en sentido positivo (contrario a las manecillas del reloj). En la figura, la inclinación es α .

Notas:

- a) Cuando L es paralela al eje X , su inclinación se define igual a 0.
- b) $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$

1.2. Pendiente de una recta



La pendiente de una recta corresponde a la tangente de su ángulo de inclinación, en la figura anterior

$$\text{pendiente de } L = m_L = \tan(\alpha)$$

Notas: Una recta vertical no tiene pendiente.

2. Teorema

Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos distintos de una recta L , entonces su pendiente se calcula por la siguiente fórmula:

$$m_L = \tan(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\text{diferencias de ordenadas}}{\text{diferencia de abscisas}}, \quad \text{con } x_1 \neq x_2. \quad (1)$$

3. Diferentes ecuaciones de una recta

3.1. Ecuación pendiente-punto de una recta

La ecuación de la recta que pasa por el punto $P = (a, b)$ y tiene pendiente m es

$$y - b = m(x - a) \quad (2)$$

Nota:

1. En este caso no se incluyen las rectas verticales. ¿Por qué?.
2. La ecuación de una recta vertical que intersecta al eje X en el punto $(a, 0)$, es $x = a$.

3.2. Ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada en el origen

La recta cuya pendiente es m y cuya ordenada en el origen es b tiene por ecuación es

$$y = mx + b$$

3.3. Ecuación simétrica de la recta

La recta cuyas intercepciones con los ejes X e Y son $a \neq 0$ y $b \neq 0$, respectivamente, tiene por ecuación

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

3.4. Ecuaciones general de una recta

Es claro que, la ecuación de toda recta se puede presentar en la forma

$$Ax + By + C = 0, \tag{3}$$

con $A \neq 0$ o $B \neq 0$. Esta ecuación se denomina *ecuación general de una recta*.

Nota: En la ecuación general de la recta (3), la pendiente es $m = -A/B$ (cuando $B \neq 0$).

4. Rectas paralelas-perpendiculares

Sean L_1 y L_2 dos rectas con pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Entonces:

$$L_1 \parallel L_2 \iff m_1 = m_2 \tag{4}$$

$$L_1 \perp L_2 \iff m_1 \cdot m_2 = -1 \tag{5}$$

5. Posiciones relativas de dos rectas

Sean $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ las ecuaciones de 2 rectas L_1 y L_2 respectivamente, entonces se cumple una y solo una de las siguientes opciones:

- a) $L_1 \parallel L_2$: $AB' - A'B = 0$
- b) $L_1 \perp L_2$: $AA' + BB' = 0$
- c) Coincidentes: $A = kA'$, $B = kB'$, $C = kC'$, ($k \neq 0$)
- d) Se intersectan en un punto: $AB' - A'B \neq 0$

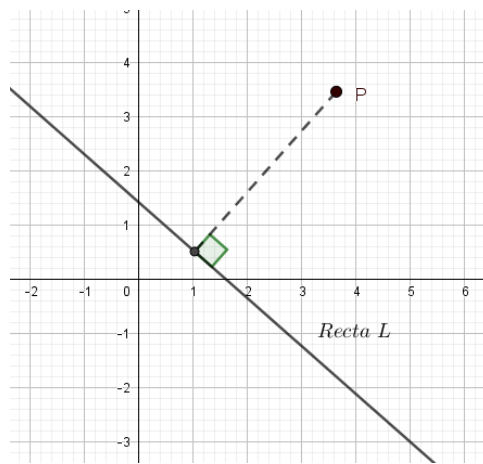
Nota: Si las ecuaciones de las rectas L_1 y L_2 se escriben en su forma pendiente-ordenada en el origen:

$$L_1 : y = m_1x + b_1, \quad L_2 : y = m_2x + b_2$$

los resultados precedentes quedan:

- a) $L_1 \parallel L_2: m_1 = m_2$
- b) $L_1 \perp L_2: m_1 \cdot m_2 = -1$
- c) Coincidentes: $m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$
- d) Se intersectan en un punto: $m_1 \neq m_2$

6. Distancia punto-recta

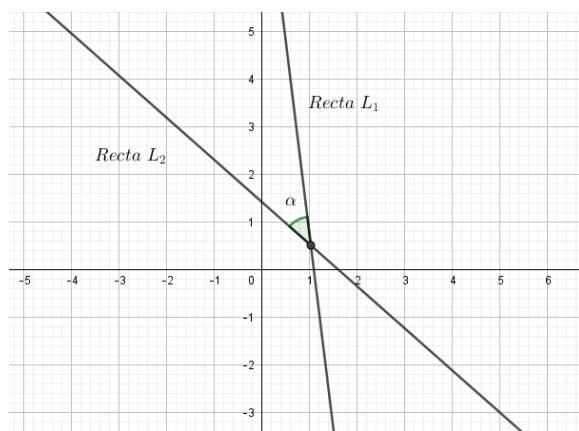


Distancia punto-recta

Sean $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera del plano y $L : Ax + By + C = 0$ una recta. La distancia del punto P a la recta L se calcula por medio de la siguiente fórmula:

$$d(P, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (6)$$

7. Ángulo formado por dos rectas



Ángulo formado por 2 rectas

Sean L_1 y L_2 dos rectas de pendientes m_1 y m_2 , respectivamente. El ángulo *agudo* α que ellas forman, se puede calcular a partir de la fórmula:

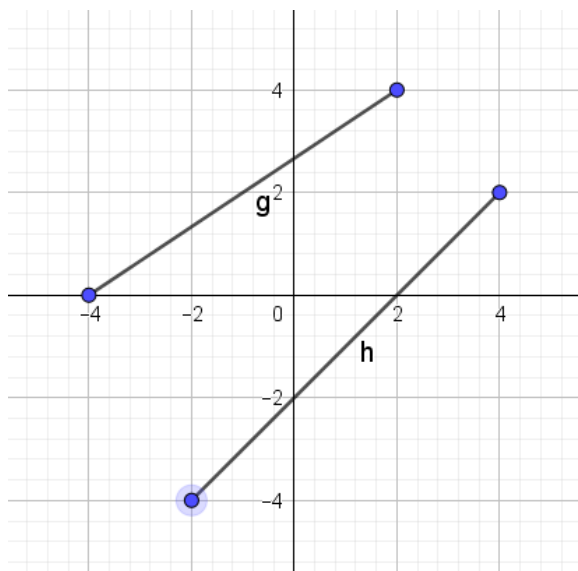
$$\tan \alpha = \left| \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \quad (7)$$

Nota: Observar que de esta fórmula es posible deducir las relaciones (4) y (5).

Observación importante: Se sugiere trabajar las actividades y/o revisar sus resultados en el programa Geogebra.

8. Actividades

1. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -4 , y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y - 8 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$. *Sol.* $y + 4x - 10 = 0$.
2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (a, b) y por la intersección de las rectas $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ y $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$. *Sol.* $b^2x - a^2y = ab(b - a)$.
3. El punto P de ordenada 10 está sobre la recta cuya pendiente es 3 y que pasa por el punto $(7, -2)$. Calcular la abscisa de P . *Sol.* 11.
4. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento que los ejes coordenados determinan en la recta $5x + 3y - 15 = 0$. *Sol.* $3x - 5y + 8 = 0$.
5. Determinar el punto de intersección de las rectas que contienen los segmentos en la siguiente figura



6. Hallar las intersecciones con los ejes coordenados de la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y es perpendicular a la recta $2x - 7y + 2 = 0$. *Sol.* $(-\frac{17}{2}, 0)$, $(0, \frac{17}{7})$.
7. Sean L_1 la recta de ecuación $y + 8x = 0$ y L_2 la recta que pasa por el punto $(0, 18)$ y tiene pendiente -3 . Se pide encontrar:
- El punto B de intersección entre L_1 y L_2 .
 - El área del triángulo OBC , donde O es el origen y C es el punto donde L_2 corta el eje X .
- Sol.* a) $(-\frac{18}{5}, \frac{144}{5})$ b) $\frac{432}{5}$
8. Determinar el valor de k ($k > 0$) para que la recta $4x + 5y - k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo de área igual a $\frac{5}{2}$ unidades cuadradas. *Sol.* 10.
9. Probar que la recta que pasa por los puntos $(4, -1)$ y $(7, 2)$ bisecta (dimidia) al segmento cuyos extremos son los puntos $(8, -3)$ y $(-4, -3)$.
10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (a, b) y por la intersección de las rectas $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ y $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ *Sol.:* $b^2x - a^2y = ab^2 - a^2b$
11. Determinar el(los) valor(es) de k para que:
- La recta $L_1 : kx + (3 - k)y + 7 = 0$ sea perpendicular a la recta $x + 7y + 1 = 0$.
 - La recta $L_2 : kx + (k - 1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $3x - 2y - 11 = 0$.
 - La recta $L_3 : (2 + k)x - (3 - k)y + 4k = -14$ contenga al punto $P(2, 3)$.
- Sol.* a) $\frac{21}{6}$ b) $\frac{3}{5}$ c) -1 .

12. Demostrar que el ángulo agudo formado por las dos rectas $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$ está dado por

$$\alpha = \arctan \left| \frac{A'B - AB'}{AA' + BB'} \right|$$

13. Dados los puntos $A(-1, 1)$; $B(3, 5)$ y $C(0, -2)$. Se pide:

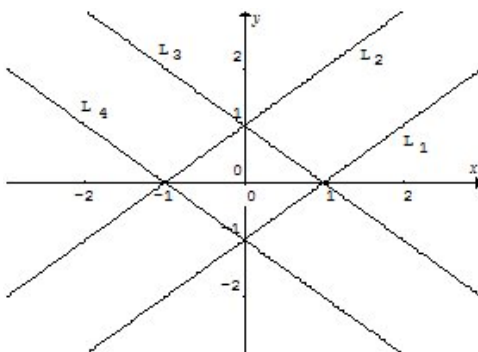
- Encontrar la ecuación de la recta L que pasa por C y el punto medio del segmento AB .
- Determinar la ecuación de la recta M que pasa por B y C .
- Calcular la distancia de A a la recta M y el área del triángulo ABC .

Sol. a) $7x - 3y = 6$ b) $7x - 3y = 6$ c) $\frac{8}{29}, \frac{4\sqrt{58}}{29}$.

14. Determinar el valor del parámetro k correspondiente a la recta de la familia $5x - 12y + k = 0$ cuya distancia del origen es igual a 5. Teniendo el parámetro. hállese la ecuación de la recta. (Dos soluciones.).

Sol.: $5x - 12y + 65 = 0, 5x - 12y - 65 = 0$

15. Determinar las ecuaciones de las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4 que aparecen en la siguiente figura:

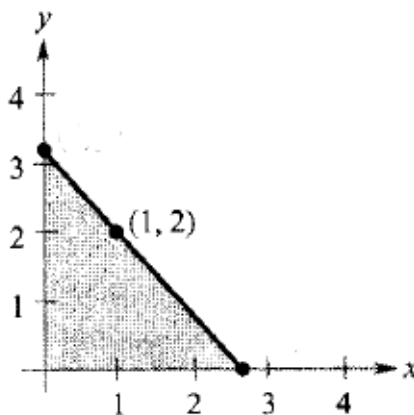


Sol. $L_1 : x - y = 1, L_2 : y - x = 1, L_3 : x + y = 1, L_4 : x + y = -1$

16. Sea T el triángulo de vértices $A(-2, 1)$, $B(4, 7)$ y $C(6, -3)$.

- Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el vértice B y trisecan (lo dividen en 3 partes iguales) al lado opuesto AC .
- Hallar los vértices del triángulo formado por las rectas que pasan por los vértices A, B y C y son paralelas a los lados opuestos.
- Hallar las ecuaciones de las medianas y las coordenadas de su punto de intersección. ¿Cómo se llama este punto?

- d) Hallar las ecuaciones de las mediatrices de los lados y las coordenadas de su punto de intersección. ¿Cómo se llama este punto?
- e) Hallar las ecuaciones de las alturas y su punto de intersección. ¿Cómo se llama este punto?
- f) Encontrar, de 3 maneras diferentes, el área de T .
17. Los vértices de un triángulo son $(1, 1)$, $(4, 7)$ y $(6, 3)$. Verificar que el baricentro (punto de intersección de las medianas), el circuncentro (punto de intersección de las mediatrices) y el ortocentro (punto de intersección de las alturas) son colineales.
18. Un rectángulo en el primer cuadrante tiene su vértice inferior izquierdo en el origen y su vértice opuesto en la recta $x + 2y = 8$.
19. Un rectángulo en el primer cuadrante tiene su vértice inferior izquierdo en el origen y su vértice opuesto en la recta $x + 2y = 8$.
- a) Ilustrar la situación planteada en Geogebra. Trabajando en GGB determinar las dimensiones del rectángulo de mayor área.
- b) Encontrar, en términos de su base, la función, $A = A(x)$, que corresponde al área del rectángulo.
- c) Usando la función $A = A(x)$, encontrar las dimensiones del rectángulo de mayor área.
20. Un triángulo rectángulo está formado en el primer cuadrante por los ejes coordenados y por una recta que pasa por el punto $(1, 3)$. Sea s el segmento de la recta ubicado en el primer cuadrante.



- a) Ilustrar la situación planteada en Geogebra. Trabajando en GGB determinar las dimensiones del segmento m de menor longitud.
- b) Encontrar la función que representa la longitud de m .
- c) Graficando la función anterior, determinar la mínima longitud del segmento m .