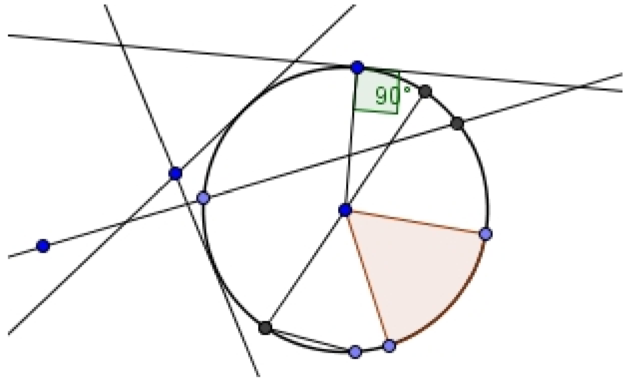


Algunos elementos claves en una circunferencia. ¿Cuántos puede reconocer?

1. Definición

Dados (elementos bases de la circunferencia)

- *Un punto* $P_0 = (x_0, y_0)$ *del plano.*
- *Un número positivo* r.

se llama **circunferencia** *de centro* P *y radio* r, *que se anota* $C(P, r)$, *al conjunto de todos los puntos* $P(x, y)$ *que satisfacen la condición*

$$d(P, P_0) = r \tag{1}$$

es decir, que cumplen la ecuación

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \tag{2}$$

o sea,

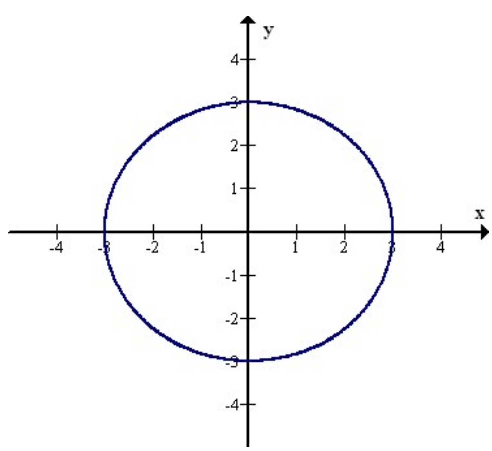
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \tag{3}$$

Por lo tanto,

$$(x, y) \in C(P, r) \quad \Longleftrightarrow \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

es decir,

$$C(P, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$



Circunferencia de centro $(0, 0)$ *y radio* 3.
Ecuación $x^2 + y^2 = 3^2$.

Nota: Desarrollando la ecuación (3), se obtiene

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{4}$$

donde $D = -2x_0$, $E = -2y_0$ y $F = x_0^2 + y_0^2 - r^2$.

El siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales la ecuación (4) representa una circunferencia.

2. Teorema

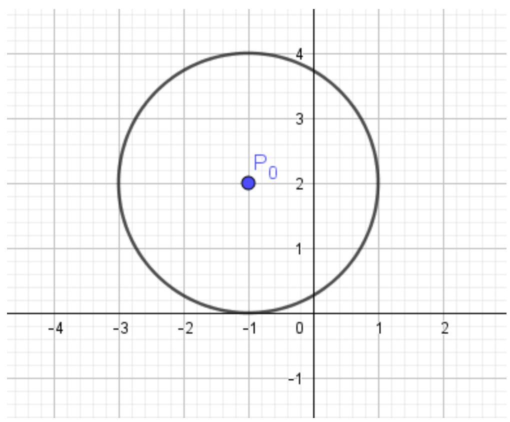
La ecuación (4):

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

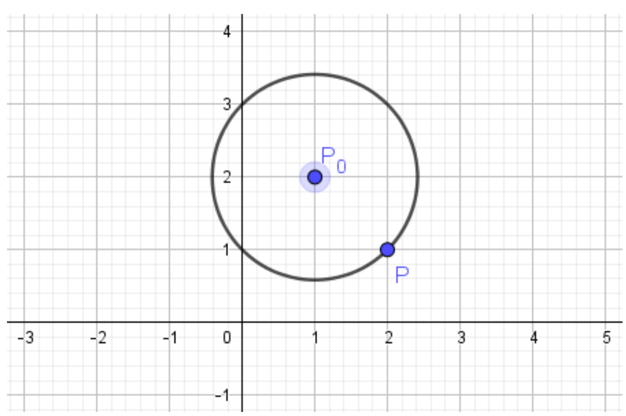
representa una circunferencia siempre y cuando $D^2 + E^2 - 4F > 0$.

3. Ejemplos

1. Escribir una ecuación de la circunferencia de centro $(-1, 2)$ y radio 2.



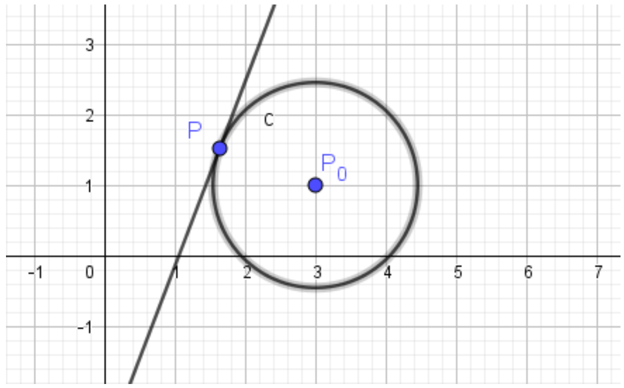
2. Encontrar el centro y el radio de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$
3. Encontrar una ecuación de la circunferencia de centro $(1, 2)$ y que pasa por el punto $(2, 1)$.



4. Circunferencias y rectas tangentes

En este ámbito hay 3 situaciones a analizar:

1. Dada una circunferencia C y un punto P en ella, encontrar la ecuación de la recta tangente a C en P.

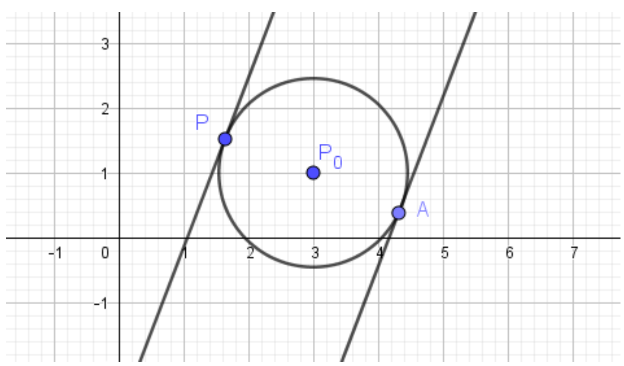


   Ejemplo: Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$$

   en su punto $(3, 5)$. Resp. $x - 2y + 7 = 0$

2. Hallar la ecuación dr la tangente a una circunferencia dada y que tiene una pendiente dada.

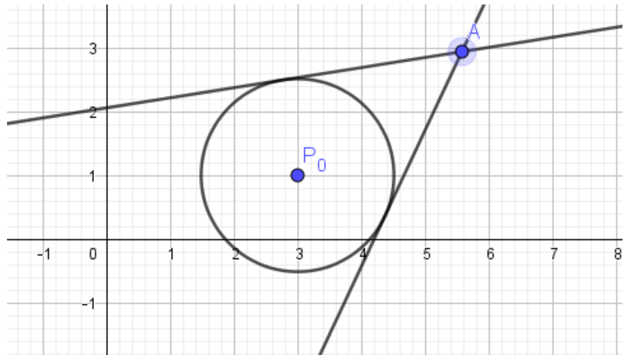


   Ejemplo: Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 18 = 0$$

   y que tienen pendiente igual a 1. Resp. $y = x - 2$, $y = x - 10$

3. Dada una circunferencia C y un punto P exterior ella, encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a C en P.



Ejemplo: Hallar la ecuación de la tangente trazada del punto $(8,6)$ a la circunferencia $x^2+y^2+2x+2y-24=0$. Resp. $x-5y+22=0$, $23x-11y-18=0$

5. Actividades

1. *a*) Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $(-1,5)$ y $(-3,-3)$. Encontrar su ecuación. *Sol.* $(x+2)^2+(y-1)^2=17$.
   b) Si (x_1,y_1) y (x_2,y_2) son los extremos de un diámetro de una circunferencia, comprobar que su ecuación puede escribirse como $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.
   c) Comprobar su respuesta en (a) usando (b).

2. Hallar una ecuación de la(s) circunferencia(s) pasa por el origen, tiene radio 2 y su centro esta en la recta $y=2x$. *Sol.* $(x\pm\frac{2}{\sqrt{5}})^2+(y\pm\frac{4}{\sqrt{5}})^2=4$

3. Hallar la circunferencia que pasa por los puntos $(2,3)$ y $(5,2)$ sabiendo que su centro esta el la recta $2x-y+6=0$. *Sol.* $(x-14)^2+(y-34)^2=1105$.

4. Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $(2,5)$ y es tangente a la recta $y=2x$.

   Sol. $(x-2)^2+(y-5)^2=\frac{1}{5}$.

5. Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $(2,5)$ y es tangente a la circunferencia $x^2+y^2=1$. *Sol.* $(x-2)^2+(y-5)^2=(\sqrt{29}-1)^2$.

6. Encontrar, *de dos maneras diferentes*, la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(2,3)$, $B(1,-1)$ y $C(-3,1)$. *Sol.* $9x^2+9y^2+5x-26y-49=0$.

7. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2-4x-4y-8=0$, trazadas desde el punto $A(-1,-2)$. *Sol.* $y+2=-\frac{24}{7}(x+1)$, $\quad y=-2$

8. ¿En qué puntos se cortan la recta $x+y-5=0$ con la circunferencia centrada en el origen y de radio $\sqrt{13}$? *Sol.* $(2,3)$, $(3,2)$.

9. Calcular, en caso que existan, los puntos de intersección entre los siguientes pares de circunferencias:

   a) $C_1: x^2+y^2-4x-6y+11=0$ y $C_2: x^2+y^2-6x-8y+11=0$
   b) C_1 y $C_3: x^2+y^2-6x-6y+21=0$

   Sol. a) $(3,2)$ y $(1,4)$ b) No se intersectan.

10. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2+y^2+4x-10y+21=0$ que son paralelas a la recta $5x-5y+31=0$.

    Sol. $x-y+3=0$, $x-y+11=0$

11. Verificar que las dos rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 24 = 0$ que pasan por el punto $(8, 6)$ son $x - 5y + 22 = 0$ y $23x - 11y - 118 = 0$.

12. **Circunferencias y rectas tangentes**

    a) Sea (x_1, y_1) un punto en la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. La ecuación de la recta tangente a la circunferencia en este punto es

    $$x_1 x + y_1 y = r^2 \tag{5}$$

    b) Las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ de pendientes m son:

    $$y = mx \pm r\sqrt{1 + m^2} \tag{6}$$