

1. Definición

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuya suma de las distancias a dos puntos fijos es constante. Más claramente:

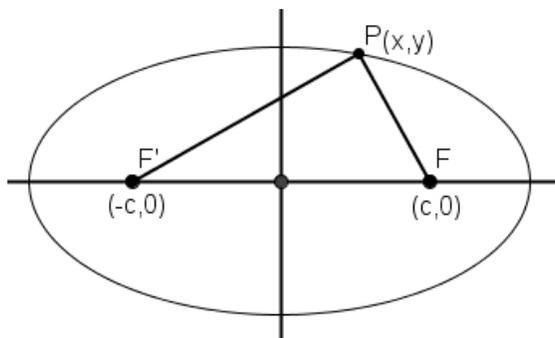
Dados (elementos bases de la elipse)

- Dos puntos F y F' del plano, denominados focos de la elipse.
- Un número positivo, α , mayor que $d(F, F')$.

se llama **elipse** al lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de las distancias del punto P a los puntos dados F y F' es constante e igual a α , es decir,

$$d(P, F) + d(P, F') = \alpha \tag{1}$$

2. Deducción de la ecuación de la elipse



Para obtener la ecuación más simple de la elipse:

- se toma el eje X pasando por los puntos F' y F y el origen en el punto medio del segmento $F'F$.
- se asignan las coordenadas: $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$.
- se define $\alpha = 2a$, de donde $a > c$ (¿por qué?).

Luego, la condición (1), queda

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a \tag{2}$$

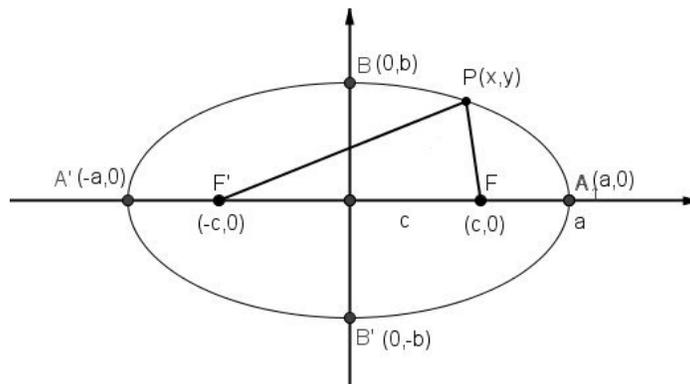
desarrollando (elevando al cuadrado dos veces) y ordenando:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \tag{3}$$

definiendo $a^2 - c^2 = b^2$, sustituyendo y finalmente dividiendo por a^2b^2 , se obtiene la llamada *ecuación canónica y reducida de la elipse*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

3. Elementos asociados a una elipse



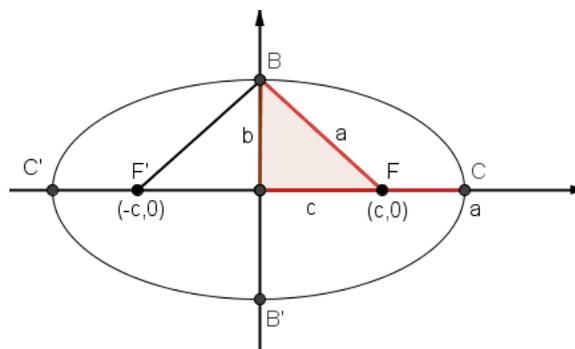
Elementos asociados a la elipse

- **Focos:** son los puntos dados (y fijos) $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.
- **Eje focal:** Es la recta que pasa por los focos (en este caso, el eje X).
- **Eje secundario:** Es la simetral del segmento $F'F$ (en este caso, el eje Y).
- **Centro:** Es el punto de intersección de los ejes (en este caso, el origen).
- **Radios vectores:** Son los segmentos PF' y PF del segmento $F'F$.
- **Vértices:** Son los puntos de intersección de la elipse con sus ejes (en este caso, los puntos A, A', B y B').
- **Eje mayor:** es el segmento AA' de longitud $2a$.
- **Eje menor:** es el segmento BB' de longitud $2b$.

Nota: Si el eje focal de la elipse coincide con el eje Y , de manera que los coordenadas de los focos sean $(0, c)$ y $(0, -c)$, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \tag{5}$$

4. Relaciones entre los parámetros de la elipse



- Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b la del semieje menor, y a, b y c están ligados por la relación $b^2 + c^2 = a^2$.
- $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, se llama *excentricidad* de la elipse. Notar que $e < 1$.

5. Ejemplo

Los vértices de una elipse son los puntos $A(0,5)$ y $A'(0,-5)$ y sus focos son los puntos $F(0,3)$ y $F'(0,-3)$. Encontrar la ecuación de la elipse, la longitud de su eje mayor y su excentricidad. Graficar.

6. Elipse con centro (h, k) y ejes paralelos a los ejes coordenados

- La ecuación de la elipse de centro en el punto (h, k) y eje focal paralelo al eje X , esta dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (6)$$

- Si el eje focal es paralelo al eje Y , la ecuación de la elipse es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad (7)$$

- Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor, b es la del semieje menor, c es la distancia del centro a cada foco, y a , b y c están ligadas por la relación $a^2 = b^2 + c^2$.
- Desarrollando las ecuaciones (6) y (7) se obtiene que la *ecuación general de la elipse* (con ejes paralelos a los ejes coordenados) es

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (8)$$

con A y B sean del mismo signo. ¿Bajo que condiciones (8) representa una elipse?.

7. Elipses y rectas tangentes

Actividad: Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ trazadas desde el punto $(2,3)$.

8. Perímetro y área interior de una elipse

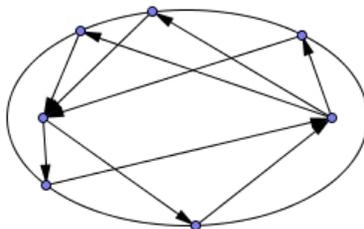
Siendo a y b los semi ejes de una elipse:

- Área de la superficie interior a la elipse = πab
- Perímetro $\approx \pi \left(3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)} \right)$ (aproximación de Ramanujan)

9. Aplicaciones

9.1. Propiedad óptica

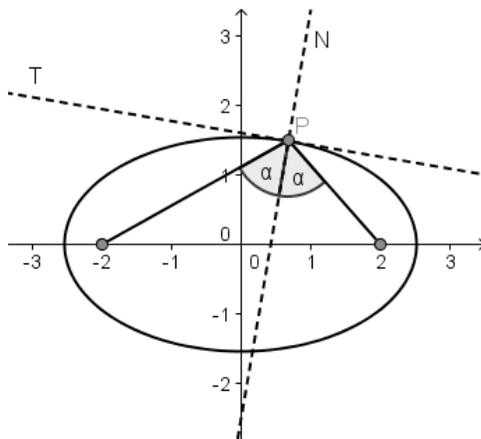
Se considera un espejo que tenga forma de elipse. Si un rayo de luz parte de uno de los focos choca contra el espejo, se reflejará hacia el otro foco.



Esta propiedad de la elipse proviene del siguiente:

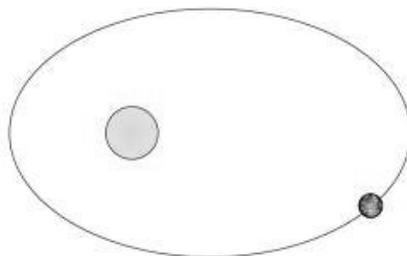
9.1.1. Teorema

La normal a la elipse en un punto P cualquiera de ella forma ángulos iguales con el radios vectores de ese punto: PF y PF' .



9.2. Astronomía

Los planetas se mueven en órbitas elípticas, uno de cuyos focos es el Sol (Primera Ley de Kepler).



10. Actividades

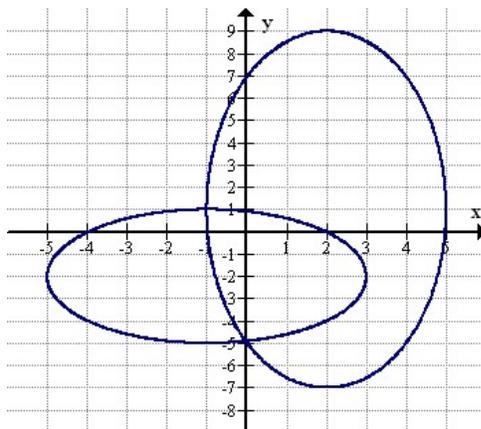
1. Verificar que la circunferencia es un caso particular de una elipse. ¿Cuál sería su excentricidad?.
 2. ¿Toda ecuación del tipo (8) representa una elipse?. Explicar.
 3. Hallar los valores del semieje menor, semi eje mayor, la excentricidad, coordenadas de los focos y centro de las elipses
 - a) $9x^2 + 16y^2 = 576$ b) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{12} = 1$ c) $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$.

Sol. a) $a = 8, b = 6, e = \frac{\sqrt{7}}{2}, (\pm 2\sqrt{7}, 0), (0, 0)$. b) $a = 2\sqrt{3}, b = 2\sqrt{2}, e = \frac{\sqrt{3}}{3}, (0, \pm 2), (0, 0)$.

 - c) La ec. canónica es $\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$, luego $a = 6, b = 4, e = \frac{\sqrt{5}}{3}, (6 \pm 2\sqrt{5}, -4), (6, -4)$.
4. Hallar las ecuaciones de las siguientes elipses de manera que satisfagan las condiciones que se indican.
 - a) Focos $(\pm 4, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$.
 - b) Focos $(0, \pm 6)$, semieje menor = 8.
 - c) Focos $(\pm 5, 0)$, excentricidad = $\frac{5}{8}$.

Sol: a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$. c) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$.

5. Hallar las longitudes de los radios vectores del punto (2, 1) de la elipse $9x^2 + y^2 - 18x - 2y + 1 = 0$. Sol. 3 y 3.
6. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por los cuatro puntos (1, 3), (-1, 4), $(0, 3 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ y (-3, 3). Sol. $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$.
7. Determinar las ecuaciones de las rectas tangentes a las siguientes parábolas en los puntos indicados:
 a) $2x^2 + 3y^2 = 5$, (1, -1). b) $4x^2 + 2y^2 - 7x + y - 5 = 0$, (2, 1).
 Sol. a) $2x - 3y - 5 = 0$. b) $9x + 5y - 23 = 0$
8. Por el punto (2, 7) se trazan las tangentes a la elipse $2x^2 + y^2 + 2x - 3y - 2 = 0$. Encontrar los puntos de contacto. Sol. $(1, 1)$, $(-\frac{13}{9}, \frac{29}{9})$.
9. Determinar los puntos de intersección (en caso que los haya) de la recta $x + 3y = 3$ y la elipse $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{25} = 1$. Sol. (6, -3) y (-0, 4).
10. Hallar el lugar geométrico de los puntos P cuya suma de distancias a los puntos fijos (2, -3) y (2, 7) sea igual a 12. Sol. $36x^2 + 11y^2 - 144x - 44y - 208 = 0$.
11. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al punto fijo (3, 2) sea la mitad de la correspondiente a la recta $x + 2 = 0$. Sol. $3x^2 + 4y^2 - 28x + 16y + 48 = 0$.
12. Determinar la ecuación del lugar geométrico del punto de intersección de dos rectas tangentes cualesquiera a la elipse (4). Sol: Circunferencia $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.
13. Considerar las recta $x + y + 1 = 0$ y la elipse $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 9 = 0$. Verificar que uno de sus puntos de intersección es (2, -3). ¿Cuál es el otro?. Sol. $(-\frac{6}{5}, -3)$.
14. Para las siguientes elipses:



se pide:

- a) Encontrar sus ecuaciones generales.
- b) Determinar algebraicamente sus puntos de intersección. Comprobar gráficamente su respuesta.

Sol. a) $y^2 + 8x + 8 = 0$, $x^2 - 6x - y + 11 = 0$

15. Elipses y rectas tangentes

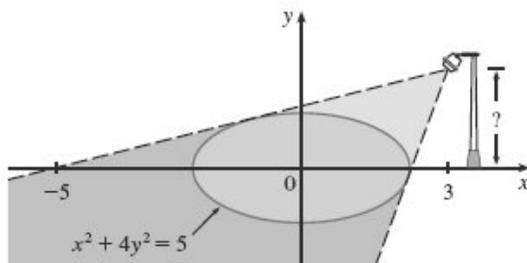
a) Sea (x_0, y_0) es un punto en la elipse (4). La ecuación de la recta tangente a la elipse en este punto es

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1 \tag{9}$$

b) Las rectas tangentes a la elipse (4) de pendientes m son:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2} \tag{10}$$

16. La siguiente figura muestra una lámpara localizada a 3 unidades a la derecha del eje Y y la sombra elíptica que generada (en el suelo) $x^2 + 4y^2 \leq 5$. ¿A qué distancia del eje X se encuentra la lámpara?. Sol. 2 unidades.



17. Para la trayectoria elíptica de nuestro planeta, el semieje mayor vale 149600000km. y la excentricidad $e = 0,0167$. Encontrar: Eje mayor, distancia focal, la mínima distancia de la tierra al sol y la máxima distancia de la tierra al sol. Sol: Eje mayor 299200000km, distancia focal 5086400km, mínima distancia 147056800km, máxima distancia 152143200km.

18. Se traza el contorno de un terreno elíptico colocando dos estacas en el suelo con una separación de 16 metros y colocando un cordel de 36 metros de longitud total alrededor de ellas, se traza el contorno empleando una tercera estaca que se gira alrededor de las dos fijas, manteniendo el lazo en tensión. Calcular la longitud, ancho, área y perímetro del terreno trazado.

19. Investigar e implementar, usando Geogebra, el método del jardinero para graficar una elipse.