Capítulo 10

Traslación y Rotación

10.1 Introducción.

La necesidad del estudio de Lugares Geométricos de puntos más complejos en un sistema de referencia que en otro y las inter relaciones entre ellos, hace necesario definir la traslación paralela de los ejes coordenados y también la rotación en torno a un punto dado, que muy bien puede ser el origen o el nuevo origen una vez efectuada la traslación.

Las ecuaciones resultantes en uno u otro caso, con respecto a las variables de los ejes iniciales versus las nuevas variables, es lo que presentaremos a continuación y ocuparemos posteriormente cuando sea el caso.

10.2 Traslación.

Sea un punto P de coordenadas (x, y) con respecto de los ejes rectangulares X e Y. Vamos a obtener las ecuaciones que relacionan las coordenadas (x', y') del mismo punto P con respecto al nuevo referencial tambien rectangular X' e Y'.

Sean los nuevos ejes X' e Y' obtenidos por una traslación paralela y en el mismo sentido con respecto a los ejes X e Y, al nuevo origen (h, k). (fig.1)

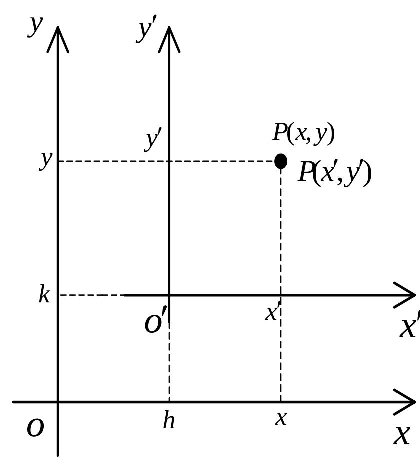


fig.1

De inmediato de la fig.1 se tiene: $x = x' + h$

$$y = y' + k$$

Estas dos ecuaciones son llamadas las ecuaciones de traslación paralela de los ejes.

Ejemplo 1

Demostraremos que la pendiente de una recta dada, no varía cuando se efectúa una traslación paralela de los ejes X e Y.

Dada la recta $Ax + By + C = 0,\ B \neq 0$ es claro que la pendiente es $m = -\frac{A}{B}$

efectuando la traslación al nuevo origen (h, k), entonces resulta la ecuación de la recta $A(x' + h) + B(y' + k) + C = 0 \Leftrightarrow Ax' + By' + (Ah + Bk + C) = 0$ también es claro que la pendiente de ésta recta en el sistema X' e Y', es $m = -\frac{A}{B}$, como se pretendía.

10.3 Rotación.

Sea un punto P de coordenadas (x, y) con respecto de los ejes rectangulares X e Y. Vamos a obtener las ecuaciones que relacionan las coordenadas (x', y') del mismo punto P con respecto al nuevo referencial tambien rectangular X' e Y' pero rotado un ángulo α en torno al origen, con respecto al eje X en el sentido positivo.(fig. 2).

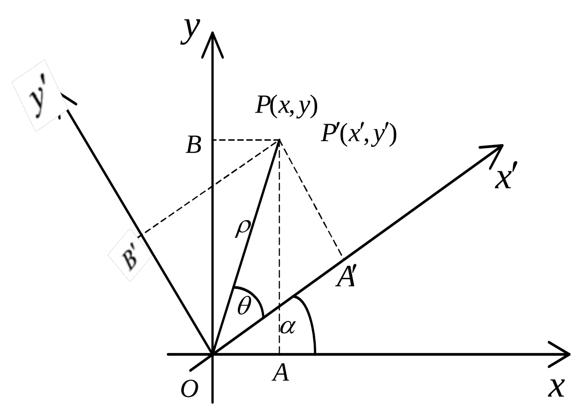


fig. 2

En $\triangle OAP:\ x = \rho\, cos(\alpha + \theta) = \rho cos\,\theta\, cos\,\alpha - \rho sen\,\theta\, sen\,\alpha \quad (1)$

$$y = \rho\, sen(\alpha + \theta) = \rho sen\,\theta\, cos\,\alpha + \rho cos\,\theta\, sen\,\alpha \quad (2)$$

pero, en $\triangle OA'P:\ x' = \rho cos\,\theta$ e $y' = \rho sen\,\theta$, entonces resulta en (1) y en (2)

$$x = x' cos\,\alpha - y' sen\,\alpha$$
$$y = x' sen\,\alpha + y' cos\,\alpha$$

de estas últimas ecuaciones tambien se obtienen:

$$\begin{aligned} x' &= \quad x\cos\alpha + y\,sen\,\alpha \\ y' &= -x\,sen\,\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}$$

Estas últimas cuatro ecuaciones, son las que regulan una rotación de los ejes coordenados, en un ángulo α en torno al origen.

10.4 Ejercicios Resueltos

1. Dada la recta $3x + 2y + 5 = 0$, determine la ecuación de ella referida a los nuevos ejes X' e Y' que son paralelos con respecto a los ejes X, Y y con el nuevo origen en el punto $(2, -3)$.

Solución.

De inmediato las ecuaciones de traslación son: $x = x' + 2$ e $y = y' - 3$ luego resulta $3(x' + 2) + 2(y' - 3) + 5 = 0 \Leftrightarrow 3x' + 2y' + 5 = 0$

2. Dadas las rectas $2x - 3y + 6 = 0 \wedge 4x + 3y - 12 = 0$, determine el nuevo origen donde se deben trasladar los ejes X e Y de modo que las ecuaciones de las rectas dadas carezcan de términos libres.

Solución.

El nuevo origen se obtiene resolviendo el sistema formado por las rectas dadas, así las nuevas ecuaciones en este nuevo sistema, serán dos rectas por el origen y carecerán de términos libres.

Al resolver el sistema indicado, resultan: $x = 1$ e $y = \dfrac{8}{3}$ luego las ecuaciones de traslación son $x = x' + 1$ e $y = y' + \dfrac{8}{3}$ de donde se obtienen $2x' - 3y' = 0$ $\wedge$ $4x' + 3y' = 0$.

3. Considere una rotación de 45° en el sentido positivo, para graficar la hipérbola $xy = 2$, indique sus elementos principales.

Solución.

Ecuaciones de rotación:

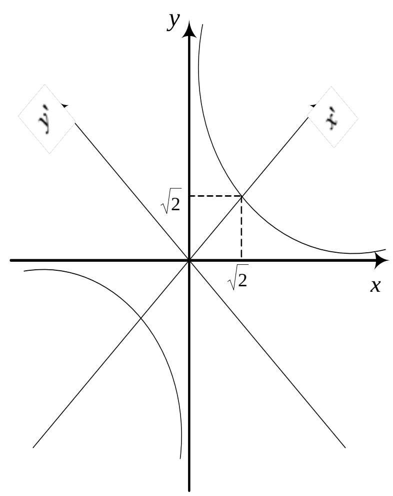
$$x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \wedge y = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \text{ de donde}$$

$$xy = 2 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\left(x'^2 - y'^2\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{2^2} - \frac{y'^2}{2^2} = 1$$

también: $x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \wedge y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)$

	$\underline{X' - Y'}$	$\underline{X - Y}$
Centro :	$O'(0,0)$	$O(0,0)$
Vértices :	$V_1'(2,0); V_2'(-2,0)$	$V_1\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right); V_2\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$
Focos:	$F_1'\left(2\sqrt{2},0\right); F_2'\left(-2\sqrt{2},0\right)$	$F_1(2,2); F_2(-2,-2)$
Asíntotas:	$y' = x'$ e $y' = -x'$	$x = 0$ e $y = 0$

Ecuaciones de los ejes X' e Y' son: $-x + y = 0$ y $x + y = 0$



4. Transformar por giro la ecuación $x + y - 1 = 0$, referida a un nuevo sistema ortogonal de modo que el nuevo sistema ortogonal tenga el mismo origen que el anterir y sus ejes dimidian los ángulos formados por los ejes anteriores.

Solución.

Nótese que el giro es de 45°, con lo que, las ecuaciones de rotación son:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \ \wedge \ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

y remplazando en $x + y - 1 = 0$ resulta $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Transformar la ecuación $3x^2 + 4y^2 - 3x + 4y - 11 = 0$, por traslación paralela de los ejes, de modo que la ecuación referida al nuevo sistema de coordenadas no tenga términos de primer grado.

Solución.

Sean las ecuaciones de traslación $x = x' + h$

$$y = y' + k$$

Vamos a determinar h y k de modo que la nueva ecuación caresca de términos de primer grado, así

$3(x'+h)^2+4(y'+k)^2-3(x'+h)+4(y'+k)-11=0,$ de donde

$3x'^2+4y'^2+(6h-3)x'+(8k+4)y'+3h^2+4k^2-3h+4k-11=0,$ luego se debe tener:

$$6h-3=0 \Leftrightarrow h=\frac{1}{2}$$

$$8k+4=0 \Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$$

Así, la ecuación queda: $12x'^2+16y'^2-95=0$

6. Hallar las nuevas coordenadas del punto $(-1,3)$ cuando los ejes coordenados son trasladados primero al nuevo origen $(4,5)$ y después se gira un ángulo de $60°$.

Solución.

1) $x=x'+4 \wedge y=y'+5$

2) $x'=x''cos\,60° - y''sen\,60° \wedge y'=x''sen\,60°+y''cos\,60°$

Remplazando (2) en (1) se tiene: $x-4=\frac{1}{2}x''-\frac{\sqrt{3}}{2}y''$

$$y-5=\frac{\sqrt{3}}{2}x''+\frac{1}{2}y''$$

Como $x=-1 \wedge y=3$ entonces: $\frac{1}{2}x''-\frac{\sqrt{3}}{2}y''=-5$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x''+\frac{1}{2}y''=-2$$

Resolviendo el sistema para x'' e y'' se obtienen:

$$x''=-\frac{5}{2}-\sqrt{3} \quad \text{e} \quad y''=\frac{5}{2}\sqrt{3}-1$$

7. Eliminar el término en $xy,$ en la ecuación $x^2-xy=1$

Solución.

Para eliminar el término en $xy,$ efectuamos una rotación en un ángulo θ adecuado

Sean: $x=x'cos\,\theta-y'sen\,\theta$

$y=x'sen\,\theta+y'cos\,\theta,$ remplazando en la ecuación resulta:

$(x'cos\,\theta-y'sen\,\theta)^2-(x'cos\,\theta-y'sen\,\theta)(x'sen\,\theta+y'cos\,\theta)=1,$ de donde $x'^2(cos^2\theta-sen\,\theta\,cos\,\theta)+y'^2(sen^2\theta+sen\,\theta\,cos\,\theta)-x'y'(sen\,2\theta+cos\,2\theta)=1$

se debe tener $sen\,2\theta + cos\,2\theta = 0 \Leftrightarrow tg\,2\theta = -1 \Leftrightarrow 2\theta = 135° \Rightarrow sen\,2\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\wedge\ cos\,2\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ de aquí que : $sen\,\theta = (\dfrac{1 - cos\,2\theta}{2})^{\frac{1}{2}} = (\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}})^{\frac{1}{2}}$

$$cos\,\theta = (\frac{1 + cos\,2\theta}{2})^{\frac{1}{2}} = (\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}})^{\frac{1}{2}}$$

finalmente la ecuación queda: $(1-\sqrt{2})\,x'^2 + (1+\sqrt{2})\,y'^2 = 2$

8. Demuestre que la distancia entre dos puntos del plano cartesiano no se altera con la transformación de coordenadas.

Demostración.

Sean: $x = x' + h \ \wedge\ y = y' + k$

$x' = x''cos\,\theta - y''sen\,\theta \ \wedge\ y' = x''sen\,\theta + y''cos\,\theta$, de donde se obtiene

$x = x''cos\,\theta - y''sen\,\theta + h \ \wedge\ y = x''sen\,\theta + y''cos\,\theta + k$

Por otra parte sean : $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en el sistema XY

donde $x_1 = x_1''cos\,\theta - y_1''sen\,\theta + h \ \wedge\ y = x_1''sen\,\theta + y_1''cos\,\theta + k$

y $x_2 = x_2''cos\,\theta - y_2''sen\,\theta + h \ \wedge\ y = x_2''sen\,\theta + y_2''cos\,\theta + k$

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$
$$= [(x_1''cos\,\theta - y_1''sen\,\theta - x_2''cos\,\theta + y_2''sen\,\theta)^2 + (x_1''sen\,\theta + y_1''cos\,\theta - x_2''sen\,\theta - y_2''cos\,\theta)^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$= [(x_2'' - x_1'')^2(sen^2\theta + cos^2\theta) + (y_2'' - y_1'')^2(sen^2\theta + cos^2\theta)]^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{(x_2'' - x_1'')^2 + (y_2'' - y_1'')^2}$$

10.5 Ejercicios Propuestos

1. Hallar las nuevas coordenadas de los puntos $(2,3), (5,6), (1,2)$ cuando los ejes se trasladan al punto $(-2,3)$ como nuevo origen, coservando la dirección y sentido.

Respuesta.

$(4,0), (7,3), (3,-1)$

2. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos $(1,-2), (5,6)$ y $(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$ cuando los ejes se giran 45°, en el sentido antihorario?

Respuesta.

$(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{3\sqrt{2}}{2}), (\dfrac{11\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2})$ y $(2,4)$.

3. ¿Cuál es el ángulo de rotación que transforma el punto $(3,4)$ del sistema XY, en el punto $(5,0)$ del sistema $X'Y'$, cuyo centro de giro es el origen del sistema XY?

Respuesta.

$tg^{-1}(\dfrac{4}{3})$

4. Las coordenadas de un punto son $(3,6)$. ¿Cuáles son las coordenadas del mismo punto cuando los ejes se giran 30° y el origen se traslada al punto $(2,-6)$?

Respuesta.

$(1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}, \dfrac{9}{2}-3\sqrt{3})$

5. Transformar la ecuación $5x^2+4xy+8y^2-36=0$ refiriéndola a unos nuevos ejes que forman con los antiguos un ángulo θ, tal que $tg\,\theta = -\dfrac{1}{2}$, siendo el centro de giro el origen del sistema XY.

Respuesta.

$4x'^2+9y'^2=36$

6. Una curva está representada por la ecuación $x^2+y^2-4x-6y+7=0$. ¿Cuál es su ecuación cuando se trasladan los ejes al nuevo origen $O'(2,3)$?.

Respuesta.

$x'^2+y'^2=6$

7. ¿Cuál será el origen al que hay que trasladar los ejes para que la ecuación $x^2+y^2-2xy+3y+\frac{9}{16}=0$ se transforme en otra que carezca de término en xy y de término independiente?

Respuesta.

$\left(\frac{3}{8}, -\frac{3}{8}\right)$

8. Determine el ángulo que deben girar los ejes para que la transformada de la ecuación $7x^2-6\sqrt{3}\,xy+13\,y^2=16$ carezca de término en xy.

Respuesta.

30°

9. Por una rotación de 45° de los ejes coordenados, cierta ecuación se transformó en $4x'^2-9y'^2=36$. Hallar la ecuación original.

Respuesta.

$5x^2 - 26xy + 5y^2 + 72 = 0$

10. Por una traslación de los ejes coordenados al nuevo origen $(3,3)$ y después una rotación en un ángulo de 30° las coordenadas de cierto punto P se transforma en el punto $(7,6)$. Hallar las coordenadas de P, con respecto a los ejes coordenados originales.

Respuesta.

$(\frac{7\sqrt{3}}{2}, \frac{13}{2} + 3\sqrt{3})$.