

La simetría es una idea por medio de la cual, el hombre de todas las épocas ha tratado de comprender y crear la belleza, el orden y la perfección.

Hermann Weyl



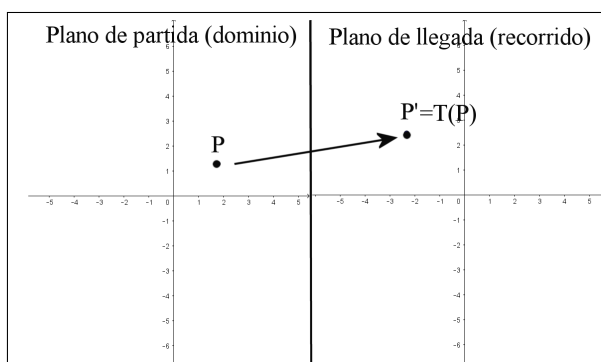
Taj Mahal

Isometrías en el plano

- 1) Transformaciones geométricas del plano
- 2) Isometrías en el plano
- 3) Traslación (según un vector)
- 4) Rotación (de centro O y ángulo α)
- 5) Simetría central (puntual)
- 6) Reflexión (o simetría axial, o simetría ortogonal)
- 7) Figuras invariantes de orden n
- 8) Figuras con eje de simetría
- 9) Ejemplos contextualizados de simetrías

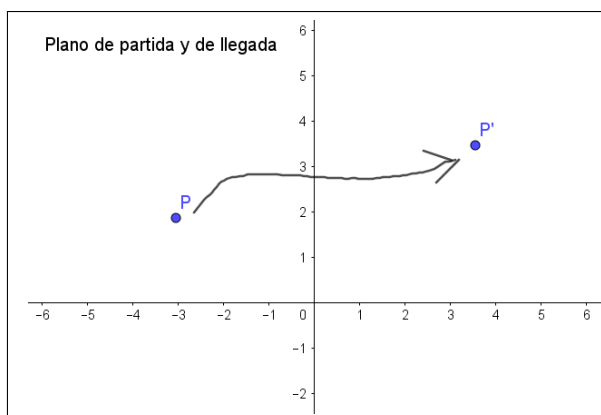
Para iniciar este tema, trabajar las siguientes [Autoevaluación 1](#) y [Autoevaluación 2](#).

1) Transformaciones geométricas del plano



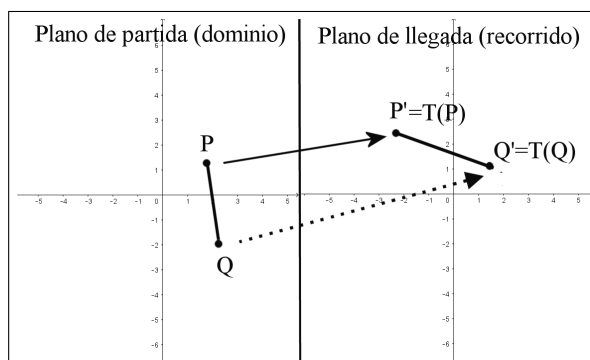
Una transformación geométrica T del plano de partida (dominio) en otro plano de llegada (recorrido) es una función biyectiva, de modo que a cada punto P le hace corresponder un único punto $T(P) = P'$.

Nota: Por razones de comodidad y mayor claridad se trabajan estas transformaciones como aplicaciones de un plano en si mismo.



- $P' = T(P)$ es la imagen de P por la transformación T .
- P' y P se dicen *puntos homólogos* respecto de T .
- Sea F una figura (conjunto de puntos). $T(F)$ es el conjunto de todos los puntos $T(P)$ tales que P es punto de la figura F .

Nota. En este curso interesan las siguientes transformaciones geométricas especiales: *traslaciones*, *reflexiones*, *rotaciones*, la *simetría respecto de un punto*. Ellas pertenecen a una clase especial de transformaciones geométricas del plano, llamadas *Isometrías* o *Movimientos rígidos del plano*.

2) Isometrías¹ en el plano

Una *isometría* T en el plano es una transformación geométrica que preserva longitudes, es decir, para todo P, Q en el dominio de T :

$$\text{distancia}(P, Q) = \text{distancia}(T(P), T(Q))$$

Observaciones sobre las isometrías:

- a) Toda isometría es una función inyectiva.
- b) La compuesta de dos isometrías es también una isometría.
- c) La imagen de un segmento (recta, circunferencia) a través de una isometría es también un segmento (recta, circunferencia).
- d) Las isometrías, como mantienen las distancias entre los puntos de una figura, entonces también conservan sus ángulos.
- e) Las isometrías solo cambian la posición (u orientación) de una figura determinada, pero **no** alteran la forma ni el tamaño de ésta. Por lo tanto, para toda figura F , F y $T(F)$ son congruentes. Así entonces se tiene la siguiente definición:

Definición:

Dos figuras F y G del plano son *congruentes* siempre y cuando exista una isometría T , tal que

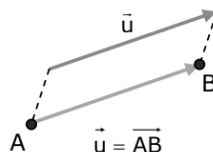
$$T(F) = G$$

¹Iso=igual, metria=medida

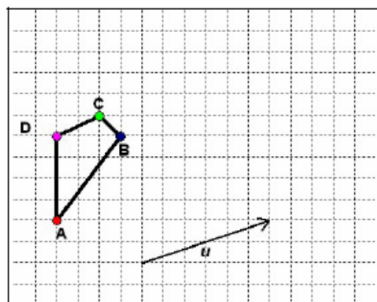
En el plano solo existen las siguientes isometrías (básicas):

3) Traslación (según un vector)

Una traslación de vector $\vec{u}$, anotada $T_{\vec{u}}$, es un movimiento que transforma cada punto A del plano, en otro punto B de manera que el vector $\overrightarrow{AB}$ es igual al vector $\vec{u}$



Actividad: Construir, sin GeoGebra y con GeoGebra, la imagen del cuadrilátero, por la traslación de vector $\vec{u}$.

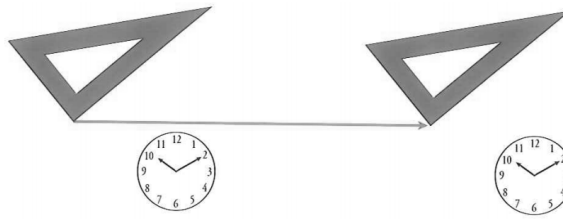


Actividad: Comprobar que toda traslación es una isometría.

Nota:

- El conjunto de todas las traslaciones tiene estructura de grupo conmutativo, es decir, satisfacen:
 - * *Clausura*: La compuesta de 2 traslaciones es una traslación.
En efecto: $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{u} + \vec{v}}$
 - * *Asociatividad*. Se hereda de las propiedades generales de las funciones
 - * *Elemento neutro*: La transformación idéntica es $T_{\vec{0}}$
 - * *Elemento inverso*: $-T_{\vec{u}} = T_{-\vec{u}}$
 - * *Conmutatividad*: $T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{u}}$
- Las traslaciones (no nulas) no tiene puntos fijos

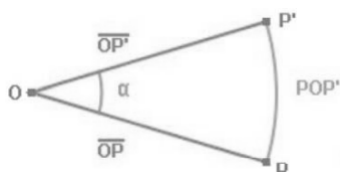
- Una traslación es un movimiento directo, es decir, que conserva la orientación de las figuras.



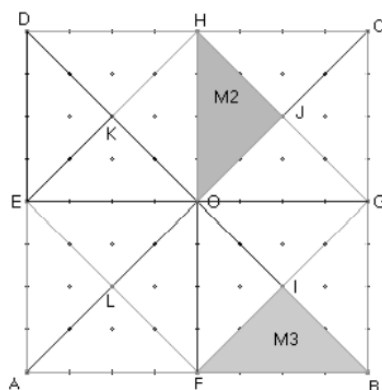
4) **Rotación (de centro O y ángulo α)**

Una rotación, de centro un punto O y ángulo α , anotada $R(O, \alpha)$, transforma cada punto P del plano en otro punto P' de modo que:

- $\angle POP' = \alpha$, y
- $d(\overline{OP}) = d(\overline{OP'})$

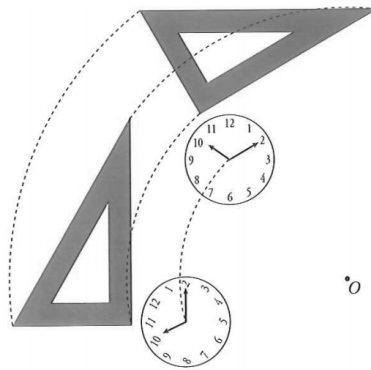


Actividad: Sean $M2$ y $M3$ los triángulos OHJ y FBI respectivamente. Encontrar, usando GeoGebra, una rotación que transforma $M2$ en $M3$.



Nota:

- El conjunto de todas las rotaciones *con el mismo centro*, tiene estructura de grupo conmutativo
- La rotación $R(O, \alpha)$ tiene un punto fijo: el centro de rotación O .
- Una rotación es un movimiento directo, es decir que conserva la orientación de las figuras.



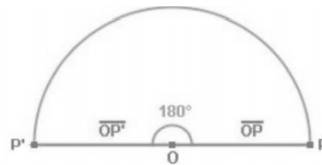
Actividad: Comprobar que toda rotación es una isometría.

5) **Simetría central (puntual)**

La simetría central de centro O , anotada S_O , transforma cada punto P en un punto P' de modo que:

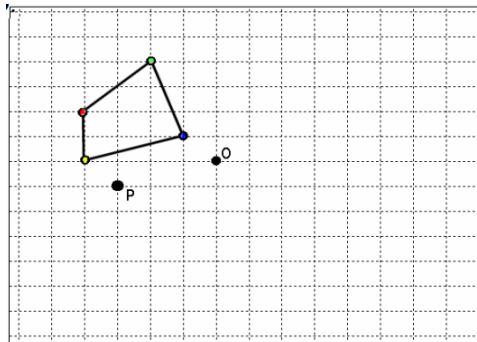
- Los puntos O , P y P' están alineados
- O es el punto medio del segmento PP' , es decir, el punto O equidista de P y P' .

Nota: Observar que simetría respecto a un punto O , es una *rotación* de centro O y ángulo de 180° .



Actividad: *Construir*, sin Geogebra y con Geogebra, la imagen del cuadrilátero, por la simetría:

- con respecto a O
- con respecto a P



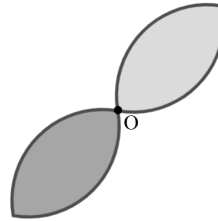
Nota:

- Una simetría central S es *involutiva*, es decir, $S \circ S = id$, es decir, $S^{-1} = S$
- Toda S_O dejan invariantes las rectas que pasan por su centro O y toda circunferencia que tiene su centro en O .

- Como una simetría central es en particular una rotación, una simetría es un movimiento directo, es decir que conserva la orientación de las figuras.

- Centro de simetría

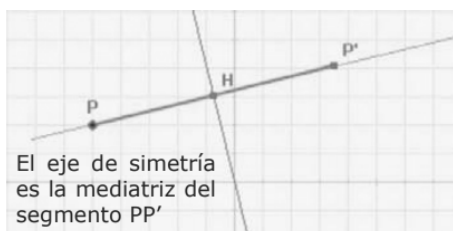
Si al aplicar a una figura una simetría de centro O la figura no varía, O se dice que es su *centro de simetría*. Por ejemplo:



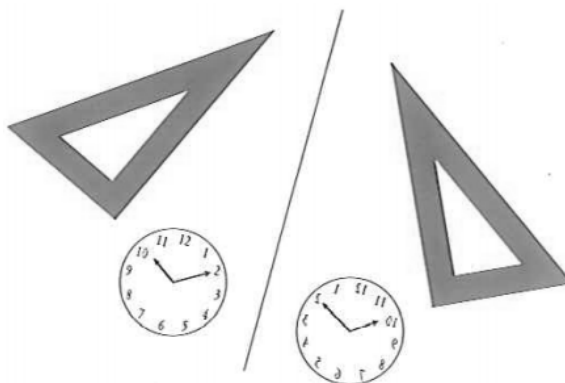
6) Reflexión (o simetría axial, o simetría ortogonal)

Una reflexión respecto a una recta L , anotada R_L , (llamada eje de la reflexión) es un movimiento que transforma cada punto P del plano en otro P' de modo que la recta L es mediatriz del segmento de extremos P y P' . Luego:

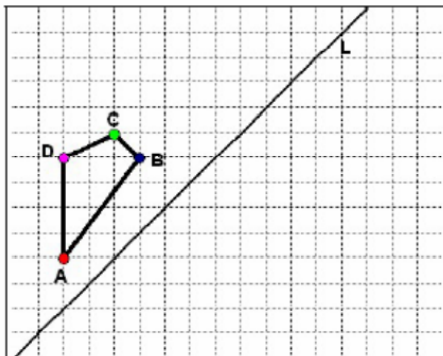
- La recta L debe ser perpendicular al segmento $\overline{PP'}$
- La distancia de P a la recta L será igual que la distancia de P' a dicha recta



- Una reflexión puede ser considerada como el movimiento que aplicado a una figura geométrica, produce el *efecto de un espejo*
- Una reflexión R_L es *involutiva*, es decir, $R_L \circ R_L = id$, es decir, $(R_L)^{-1} = R_L$
- Las reflexiones dejan invariante todo su eje de reflexión y las circunferencias que tienen su centro en su eje de reflexión
- Una simetría axial es un movimiento inverso, es decir que *invierte* la orientación de las figuras.



Actividad: Construir, sin y con GeoGebra, la imagen del cuadrilátero, por la reflexión con eje la recta L.



Actividad: Comprobar que toda reflexión es una isometría.

7) Figuras invariantes de orden n

Si al rotar una figura con centro en un punto O y según un ángulo menor que 360° , coincide con si misma, el punto O se dice que es *centro de giro de la figura*.

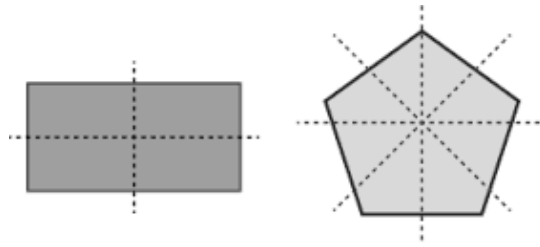
Si al aplicar a una figura un giro de 360° alrededor de su centro de giro se producen n coincidencias, dicho centro se dice *de orden n* y la figura *invariante de orden n* .

Así, por ejemplo, un cuadrado es una figura invariante de orden 4, un triángulo equilátero es invariante de orden 3, y una circunferencia tiene orden de giro igual a n , para todo $n \in \mathbb{N}$.

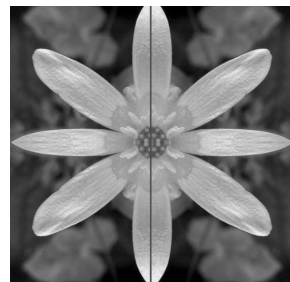
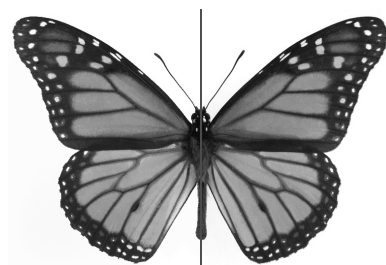
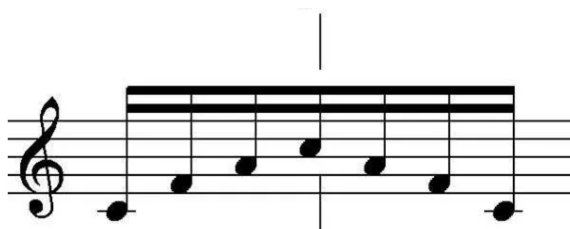
8) Figuras con eje de simetría

Hay figuras que son invariantes (no cambian) al aplicarles una reflexión. En ese caso, el eje de la misma se llama *eje de simetría* de la figura. Es claro que una figura puede tener varios ejes de simetría.

A continuación se muestran figuras con 2 y 5 ejes de simetría, respectivamente.



9) Ejemplos contextualizados de simetrías

a) *Simetría en la naturaleza*b) *Simetría en la música*c) *Simetría en la construcción*

d) Simetría en el lenguaje

- dabale arroz a la zorra el abad ...reflexión... daba le arroz al a zorra elaba
- yo dono rosas, oro no doy ...reflexión... yod on oro, sator onod oy
- OZONO ...rotación con eje horizontal en la mitad de la palabra.



girado en 180°



Referencias:

- 1) Geometría. X. Carreño & X. Cruz
- 2) Geometría euclidiana. Rodolfo Londoño
- 3) Isometrías. Patricia Pérez Ortiz Movimientos en el plano
- 4) Isometrías y semejanzas en el plano. José H. Nieto
- 5) Flipscript. Sitio generador de Ambigramas