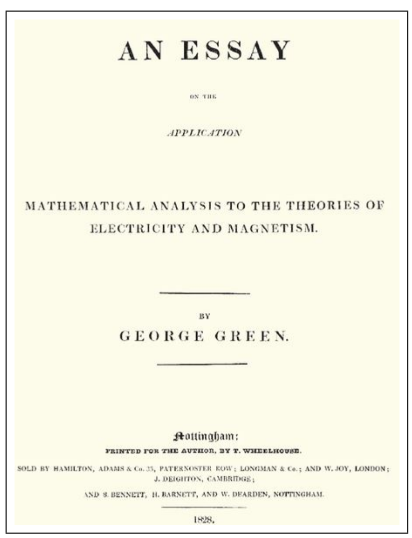
SECCIÓN 9

Teorema de Green

9.1 Introducción

En esta sesión se revisa el primero de los 3 teorema claves del cálculo vectorial: el *Teorema de Green**. Este teorema establece que una integral doble sobre una región D del plano es igual a una integral de línea a lo largo de la curva cerrada C que constituye la frontera de D.



AN ESSAY

ON THE

APPLICATION

MATHEMATICAL ANALYSIS TO THE THEORIES OF
ELECTRICITY AND MAGNETISM.

BY

GEORGE GREEN.

Nottingham:

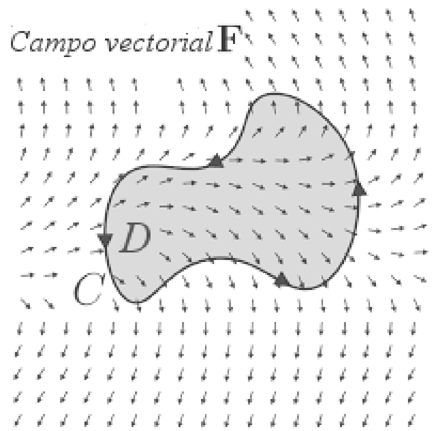
PRINTED FOR THE AUTHOR, BY T. WHEELHOUSE.

SOLD BY HAMILTON, ADAMS & Co. 33, PATERNOSTER ROW; LONGMAN & Co.; AND W. JOY, LONDON;
J. DEIGHTON, CAMBRIDGE;
AND S. BENNETT, H. BARNETT, AND W. DEARDEN, NOTTINGHAM.

1828.

* Matemático Inglés, 1973-1841.
En su biografía ubicada en http://es.wikipedia.org/wiki/George_Green, se destaca que "El joven George Green solo asistió de forma regular a la escuela durante un año entre los 8 y 9 años ayudando a su padre posteriormente..."

9.2 Teorema de Green



Sean

- $\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\widehat{\imath} + Q(x,y)\widehat{\jmath} = (P(x,y), Q(x,y))$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^2$, C^1 en un dominio R del plano*.
- C una curva simple, cerrada y orientada en sentido positivo que conforma la frontera de una región D, contenida en R.

entonces

$$\oint_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy} \right) dA \tag{9.1}$$

Nota 9.1. Formalmente, poniendo $d\overrightarrow{r} = (dx, dy)$, se tiene que

$$\overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = (P, Q) \cdot (dx, dy) = Pdx + Qdy$$

Luego, el teorema de Green tambien puede presentarse de la siguiente manera

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy} \right) dA \tag{9.2}$$

Demostración: Notar que el teorema de Green (9.2) quedará demostrado si se verifica que:

$$\int_C Pdx = -\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \tag{9.3}$$

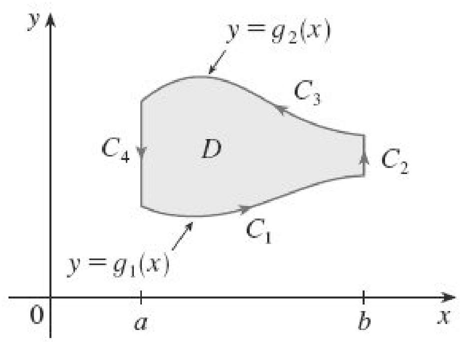
y

* Recordar que un campo escalar es C^1 en un dominio, cuando él y sus derivadas parciales son continuas en dicho dominio.

$$\int_C Q dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \tag{9.4}$$

Se comprobará (9.3) para el caso en que D sea una región del tipo I (verticalmente simple):

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\}$$



Dominio vericalmente simple (tipo I)

en donde g_1 y g_2 son funciones continuas. Esto nos permite calcular la integral doble del miembro derecho de la ecuación (9.3), de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{\partial P}{dy} dA &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy dx \\
&= \int_a^b P(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx \\
&= \int_a^b \left[P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))\right] dx \\
&= \int_a^b P(x, g_2(x)) dx - \int_a^b P(x, g_1(x)) dx \\
&= -\int_C P dx
\end{aligned}$$

Por otra parte, ahora se calcula el lado izquierdo de la ecuación (9.3), expresando C como la unión de la cuatro curvas C_1, C_2, C_3 y C_4. Sobre C_1, se toma a x como el parámetro y se escriben las ecuaciones paramétricas como $x = x, y = g_1(x), a \leq x \leq b$. Luego

$$\int_{C_1} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, g_1(x)) dx$$

Las ecuaciones paramétricas de $-C_3$ son: $x = x, y = g_2(x), a \le x \le b$. Luego

$$\int_{C_3} P(x,y)dx = -\int_{-C_3} P(x,y)dx = -\int_a^b P(x, g_2(x))dx$$

Sobre C_2 o C_4, x es constante, por lo que $dx = 0$. Así

$$\int_{C_2} P(x,y)dx = \int_{C_4} P(x,y)dx = 0$$

Finalmente

$$\begin{aligned}\int_C P(x,y)dx &= \int_{C_1} P(x,y)dx + \int_{C_2} P(x,y)dx + \int_{C_3} P(x,y)dx + \int_{C_4} P(x,y)dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x))dx - \int_a^b P(x, g_2(x))dx\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\int_C P(x,y)dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dA \tag{9.5}$$

de igual forma se puede probar (9.4), es decir:

$$\int_C Q(x,y)dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dA \tag{9.6}$$

Sumando (9.5) y (9.6), se tiene que:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

Por lo tanto, se tiene lo pedido.

Nota: Sobre el teorema de Green, en general, se realizan 3 tipos de actividades, a saber:

- **Actividad tipo 1: Calcular una integral de línea**.

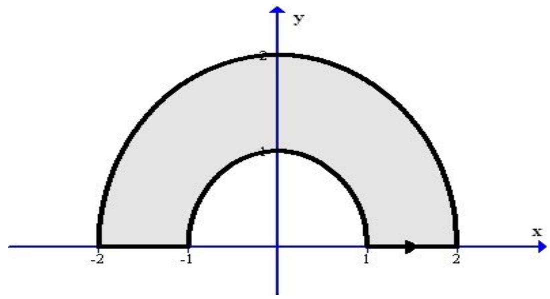
  Usando el teorema de Green, calcular $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

  En este caso, se debe en (9.2), calcular el lado (2), y el valor obtenido será, luego de este teorema, el valor de la integral de linea pedido.

Ejemplo 9.1. *Usando el teorema de Green, calcular* $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ *para el campo vectorial*

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \arctan\frac{y}{x}\,\widehat{\imath} + \ln(x^2+y^2)\,\widehat{\jmath}$$

y C es la siguiente curva, orientada en sentido positivo



Solución: Sea Como $P = \arctan\frac{y}{x}$ y $Q = \ln(x^2+y^2)$, se tiene que:

$$\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy} = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\
&= \iint_D \frac{x}{x^2+y^2} dA \\
&= \int_0^{\pi}\int_1^2 \frac{r\,\cos\theta}{r^2}\, r dr d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_1^2 \cos\theta\, dr d\theta \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ejercicio 9.1. Usar el teorema de Green para comprobar que

$$\oint_C x^2 y dx + x^2 y^3 dy = -\frac{1}{12}$$

donde C es el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$.

- **Actividad tipo 2: Calcular una integral doble**

  Usando el teorema de Green, calcular $\displaystyle\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy}\right) dxdy.$

  En este caso, se debe en (9.2), calcular el lado (1), y el valor obtenido será, luego de este teorema, el valor de la integral doble pedido.

Ejemplo 9.2. *Usando el teorema de Green, calcular*

$$\iint\limits_R (x-y)dA$$

donde R es la círculo de radio 2 y centrada en el origen

Solución: Aquí se debe buscar un campo vectorial $\overrightarrow{F}=(P,Q)$, de modo que

$$\frac{\partial Q}{dx}-\frac{\partial P}{dy}=x-y.$$

Un campo vectorial que satisface esta condición es:

$$\overrightarrow{F}=\left(\frac{y^2}{2},\frac{x^2}{2}\right)$$

La ecuación de la circunferencia de radio 2 y centrada en el origen es

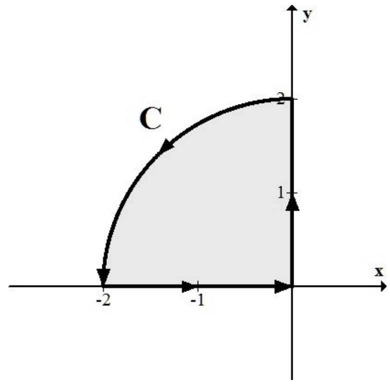
$$r(t)=(2\cos t,2\sin t) \text{ con } t\in[0,2\pi]$$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_R (x-y)dA &= \oint_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}\\
&= \int_0^{2\pi}(2\sin^2 t,2\cos^2 t)\cdot(-2\sin t,2\cos t)dt\\
&= \int_0^{2\pi}(-4\cdot\sin^3 t+4\cdot\cos^3 t)dt\\
&= 4\cdot\int_0^{2\pi}(-\sin^3 t+\cos^3 t)dt\\
&= 4\cdot\int_0^{2\pi}-\sin^2 t\cdot\sin t+4\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2 t\cdot\cos t dt\\
&= 4\cdot\int_0^{2\pi}-(1-\cos^2 t)\cdot\sin t+4\cdot\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)\cdot\cos t dt\\
&= 0
\end{aligned}$$

- **Actividad tipo 3: Verificar el teorema de Green**.

  En este caso, se debe en (9.2), calcular el lado (1) y el lado (2), y verificar que ambos valores son iguales.

Ejemplo 9.3. *Comprobar el teorema de Green para la curva C:.*



y el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y) = -2x^2y\,\widehat{\imath} + 2xy^2\,\widehat{\jmath}$.

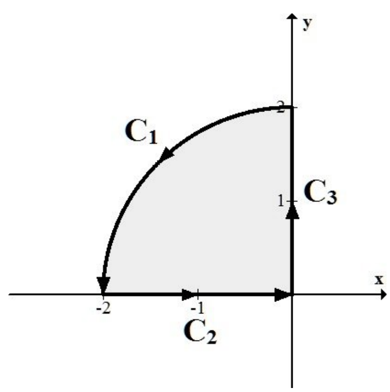
Solución: Calculemos en primer lugar, $\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$.

La curva C, se debe descomponer en 3 curvas

$$C_1 : \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad \text{con } \frac{\pi}{2} \le t \le \pi$$

$$C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{con } -2 \le t \le 0$$

$$C_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad \text{con } 0 \le t \le 2$$



Haciendo los cálculos correspondientes, se obtiene:

$$\int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 4\pi, \qquad \int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0, \qquad \int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$$

Por lo tanto:

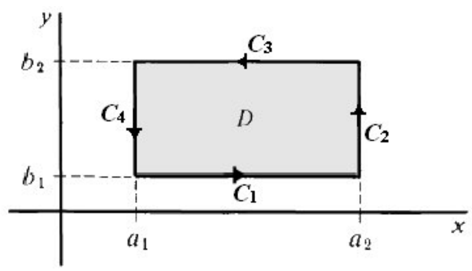
$$\int_{C} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_2} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_3} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 4\pi \tag{9.7}$$

Por otra parte,

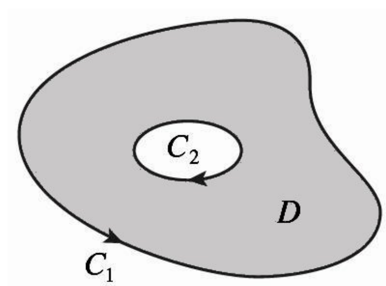
$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy} \right) dxdy = \iint\limits_D \left(2y^2 + 2x^2\right) dxdy \underbrace{=}_{coord.\,polares} 4\pi \tag{9.8}$$

Comparando (9.7) y (9.8), se verifica el Teorema de Green.

Ejercicio 9.2. Comprobar el teorema de Green para el caso particular en que D es un rectángulo:



Nota 9.2. El teorema de Green también es válido para regiones como la siguiente:

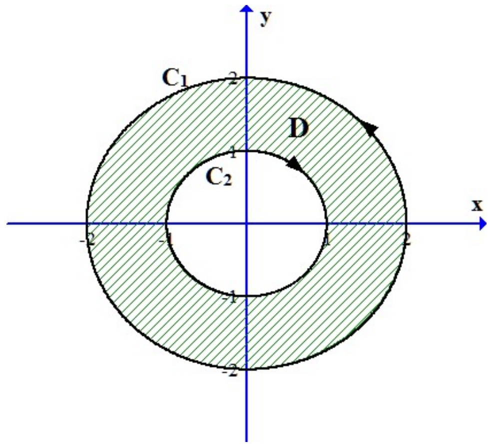


Aquí la curva $C = C_1 + C_2$, y se tiene que

$$\oint_C Pdx + Qdy = \oint_{C_1} Pdx + Qdy + \oint_{C_2} Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy} \right) dxdy$$

En estos casos, la orientación de la curva *externa* (C_1 en este caso) es en sentido antihorario y las(s) curvas *internas* (C_2 en este caso) son en sentido horario. Para determinar estas orientaciones, se usa la regla de *mantener a la mano izquierda la región, cuando uno camina por la frontera de la region.*

Ejercicio 9.3. *Evaluar* $\oint_C y^2dx + 3xydy$*, donde* C *es la frontera de la región anular* D *de la parte del plano que está entre las circunferencias* $x^2 + y^2 = 1$ *(curva* C_2*, con orientación negativa) y* $x^2 + y^2 = 4$ *(curva* C_1*, con orientación positiva).*



Solución:
Por el teorema de Green

$$
\begin{aligned}
\int_C y^2 dx + 3xydy &= \iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2)\right] dA \\
&= \iint\limits_D ydA = \int_0^{2\pi}\int_1^2 (r\sin\theta)\cdot rdrd\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta \int_1^2 r^2 dr \\
&= [-\cos\theta]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

9.3 Teorema de Green y áreas

Verificar que el área de una región D del plano, viene dada por:

$$
\text{Area de}(D) = -\oint_C ydx, \qquad \text{Area de}(D) = \oint_C xdy, \qquad \text{Area de}(D) = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx
$$

Ejercicio 9.4. *Determinar el área encerrada por la elipse* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Solución: La elipse tiene ecuaciones paramétricas $x = a\cos t$ y $y = b\sin t$, en donde $0 \le t \le 2\pi$.

Entonces

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\cos t)\cdot(b\cos t) - (b\sin t)\cdot(-a\sin t)dt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt \\ &= \pi ab \end{aligned}$$

9.4 Actividades

1) Verificar el teorema de Green con el campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y) = (3x+2y\,,\, x-y)$ y la curva C dada por $r(t) = (\cos t, \sin t)$, para $t \in [0, 2\pi]$

2) Usar el teorema de Green para calcular las integrales del campo vectorial $\overrightarrow{F}(x,y)$ a lo largo de la curva dada:

   a) $\overrightarrow{F}(x,y) = (5x^3+4y)\,\hat{\imath} + (2x-4y^4)\,\hat{\jmath}$, a lo largo del círculo $(x-2)^2+y^2 = 4$ recorrido en sentido antihorario.

   b) $\overrightarrow{F}(x,y) = (\alpha(x)-y)\,\hat{\imath} + (x+\beta(y))\,\hat{\jmath}$, donde α y β son funciones reales con primera derivada continua definidas en $\mathbb{R}$, a lo largo de un cuadrado de lado a recorrido positivamente.

   c) $\overrightarrow{F}(x,y) = (x^3-y^3)\,\hat{\imath} + (x^3+y^3)\,\hat{\jmath}$, donde C es la frontera de la región comprendida entre las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=9$.

3) Evaluar $\oint_C xydx + x^2y^3dy$, donde C es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,2)$:

   a) directamente

   b) usando el teorema de Green

   Respuesta. $\frac{2}{3}$.

4) Usar el teorema de Green para calcular $\mathbf{I_1} - \mathbf{I_2}$, donde

$$\mathbf{I_1} = \int_{C_1} (2x+y)^2dx - (x-2y)^2dy \qquad \text{e} \qquad \mathbf{I_2} = \int_{C_2} (2x+y)^2dx - (x-2y)^2dy$$

   $C_1 :\ \lambda(t) = (t, t^2) \quad t \in [0,1]$ y $C_2 :\ \mu(t) = (t^2, t) \quad t \in [0,1]$.

5) Usando el teorema de Green, determinar el área de la región limitada por

   a) la curva con ecuación vectorial $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t\,,\, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

   b) la elipse, con ecuación vectorial $\overrightarrow{r}(t) = (a\cos t\,,\, b\sin t)$, $t \in [0,2\pi]$, con a y b constantes.

6) a) Sea C el segmento de recta que une el punto (x_1, y_1) con el punto (x_2, y_2). Verificar que

$$\int_C xdy - ydx = x_1y_2 - x_2y_1$$

b) Si los vértices de un polígono P, ordenados contra-reloj, son $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, verificar que el área de este polígono viene dada por:
Area de P $= \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \ldots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + (x_ny_1 - x_1y_n)]$

c) Hallar el área del pentágono de vértices en los puntos $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$, $(0, 2)$ y $(-1, 1)$.

Respuesta. (c) 4.5.

7) Sea D una región en el plano delimitada por una curva simple y cerrada C.

a) Usando el teorema de Green, verificar que las coordenadas del centroide de D, $(\overline{x}, \overline{y})$, viene dado por:

$$\overline{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2 dy \quad \text{y} \quad \overline{y} = \frac{1}{2A}\oint_C y^2 dx$$

donde A es el area de D.

b) Encontrar el centroide del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.

Respuesta. (b) $(\overline{x}, \overline{y}) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

8) Dados

- el campo vectorial

$$\overrightarrow{F}(x, y) = \frac{-y\,\widehat{\imath} + x\,\widehat{\jmath}}{x^2 + y^2} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,\widehat{\imath} + \frac{x}{x^2 + y^2}\,\widehat{\jmath}$$

- La curva C, correspondiente al círculo $x^2 + y^2 = 1$, con orientación positiva.

a) Calcular la integral de línea de $\overrightarrow{F}$ sobre la curva C.

b) Calcular $\displaystyle\iint_D \left(\frac{\partial Q}{dx} - \frac{\partial P}{dy}\right) dxdy$, donde D es la región encerrada por la curva C.

c) Discutir si estos resultados están de acuerdo o no con el Teorema de Green.