SESIÓN 1

Límites I

Temas: Introducción Noción informal de límites de una FRVR. Cálculo de límites numéricamente (usando tabla de valores). Límites laterales. Cálculo de límites gráficamente (usando el gráfico de una función).

1.1 Introducción: Idea intuitiva de Límite I

El cálculo infinitesimal es una rama de la matemática que se abre con un nuevo concepto: *límite de una FRVR*, el que permitirá abordar y resolver problemas más generales que los trabajados hasta este momento. Veamos, por ejemplo, algunos problemas ya resueltos junto a los que ahora podremos resolver:

Límites de FRVR

- **DE**: Calcular la *pendiente de una recta*

  A: Calcular la *pendiente de una curva*

- **DE**: Calcular una recta que pasa por dos puntos de una curva

  A: Calcular la tangente a una curva

- **DE**: Calcular la altura de una curva en $x = c$

  A: Calcular la altura máxima de una curva en un intervalo

- **DE**: Calcular el área de un rectángulo

  A: Calcular el área limitada por:

  - arriba: gráfico de $y = f(x)$
  - abajo : Eje X
  - izquierda : $x = a$ derecha : $x = b$

- **DE**: Longitud de un segmento
  A: Longitud de una porción de curva

- **DE**: Sumar un número finito de términos
  A: Sumar un número **infinito** de términos
  etc.

Actividad 1: Para iniciar el estudio del concepto de límite, desarrollar la siguiente actividad:

Considerar la función $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$; $x \neq 1$

Problema 1. ¿Qué sucede con $y = f(x)$ *cuando* $x = 1$?

Problema 2. ¿Qué sucede con $y = f(x)$ cuando x *se aproxima al 1*?

Solución:
Problema 1:

Notar que $1 \notin Dom(f)$, luego NO EXISTE $f(1)$.

Problema 2:

En este caso lo que interesa es el comportamiento de f **cerca** de $x = 1$ matemáticamente, esto se dice: en una **vecindad** de $x = 1$. Para esto nos *a*cercamos al punto $x = 1$ tanto por la *i*zquierda como por la *d*erecha.

$$\mathbb{R}$$

$$\longrightarrow \quad 1 \quad \longleftarrow$$

(por la izquierda) (por la derecha)

Por la izquierda:

x	0.6	0.8	0.9	0.99	0.999	... $\to$ 1^-
$f(x)$						... $\to$

Por la derecha:

x	1.4	1.2	1.1	1.01	1.001	... $\to$ 1^+
$f(x)$						... $\to$

Usando la información de las tablas precedentes; responder:

1) ¿ Cuándo nos *a*cercamos a $x = 1$ por la izquierda, hacia dónde se *a*cercan las imágenes?

2) idem por la derecha.

3) ¿Qué se puede concluir?

La conclusión recién aludida es:

$f(x)$ se acerca (*se aproxima*, ó *tiende*, o $\longrightarrow$) a 3, cuando x se acerca a 1
lo que también se puede anotar:

$$f(x) \longrightarrow 3, \text{ cuando } x \longrightarrow 1$$

o bien;

$$(x \longrightarrow 1) \Rightarrow (f(x) \longrightarrow 3)$$

o bien;

$$f(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 3$$

En las relaciones precedentes al número 3 se le da el nombre de *l*ímite de $f(x)$ cuando $x \to 1$ y se anota

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3}$$

Observación: Observar que en este estudio *n*o interesa el comportamiento de la función *e*n el punto, si no *a* su alrededor.

1.2 Límites laterales

Actividad: Repetir el ejercicio precedente con la función

$$y = f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases} \tag{1.1}$$

en el punto $x = 2$.
¿Hay alguna diferencia entre las conclusiones de este ejercicio con el anterior? Comentar.

Solución: En este caso se tiene que

$$(x \to 2+) \Longrightarrow (f(x) \to 1)$$

$$(x \to 2-) \Longrightarrow (f(x) \to 6)$$

Lo que se anota:

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = 6 \ ; \ \lim_{x \to 2-} f(x) = 1$$

y se llaman *límites laterales de* $f(x)$ *en* $x = 2$ (por la derecha e izquierda respectivamente).

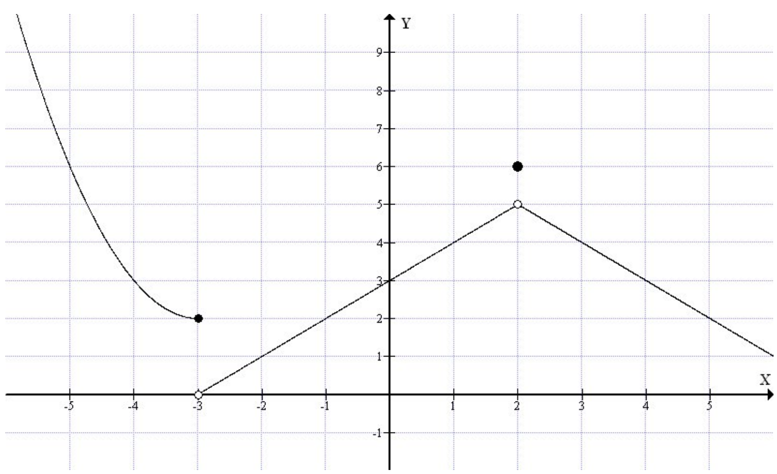
Resultado Importante: $\lim_{x \to a} f(x)$ existe si y solo si los límites laterales existen y **son iguales entre si**, es decir

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L$$

Notar que cuando $\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x)$ o uno de ellos no existe, entonces no existe $\lim_{x \to a} f(x)$

1.3 Límites gráficamente

Actividad: Considerar el siguiente gráfico de una función $y = f(x)$:



Por inspección del gráfico, determinar, aproximadamente, el valor de.

a) $\lim_{x \to -3} f(x)$ b) $\lim_{x \to 0} f(x)$ c) $\lim_{x \to 2} f(x)$

1.4 Actividades de Autoevaluación

Estudiar, usando tabla de valores, el límite de la función dada en el punto indicado.

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$; $x = 2$

b) $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; $x = 0$

c) $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$; $x = 0$

d) $k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$; $x = 0$