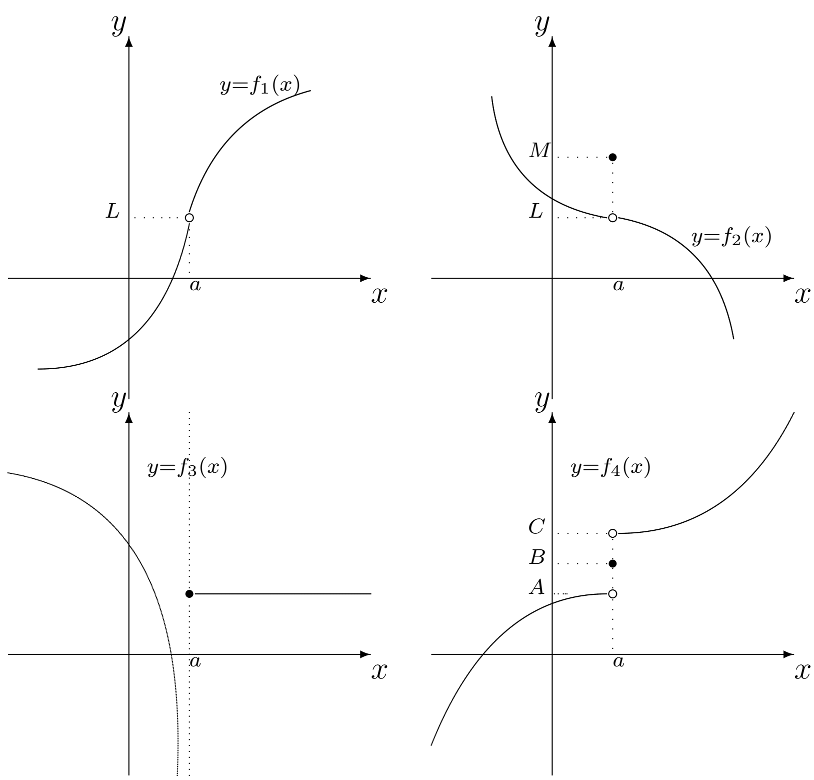
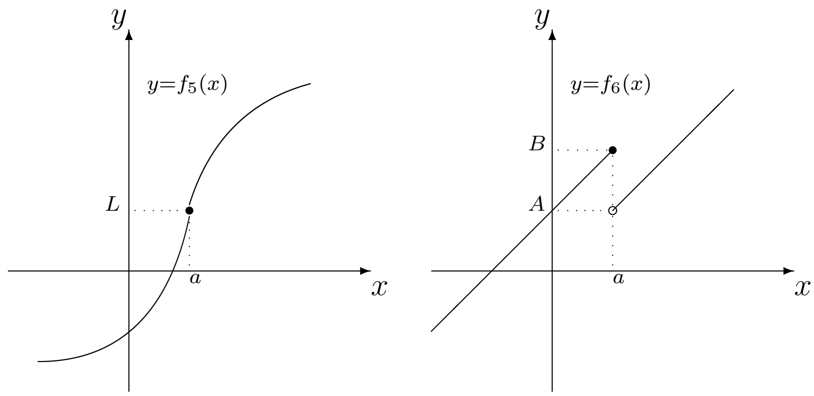
SESIÓN 4

Continuidad de FRVR

4.1 Actividad inicial

Comparar $\lim\limits_{x \to a} f_i(x)$ con $f_i(a)$, para $i = 1, ..., 6$.





4.2 Definición de continuidad en un punto

Se dice que una función $y = f(x)$ *es continua en* $x = a$ cuando se cumplen las siguientes condiciones:

1) Existe $f(a)$ **2)** Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ **3)** $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Cuando $y = f(x)$ no es continua en $x = a$, se dice que es *discontinua en* $x = a$.

En general se dice que $y = f(x)$ es *continua en un conjunto* A, cuando es continua en cada punto de A.

Actividad Estudiar la continuidad en $x = 3$ de las funciones:

a) $y = f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } x > 3 \\ -1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ b) $y = g(x) = \begin{cases} 7 & \text{si } x \leqslant 3 \\ 2x+1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

4.3 Tipos de Discontinuidad

1) *De Primera Especie.* Los límites laterales de $f(x)$ en el punto a existen. Hay dos casos:

   - Los límites laterales en a son iguales, pero distintos a $f(a)$. Se llama discontinuidad *reparable.*
   - Los límites laterales en a son distintos. Se llama discontinuidad de *salto* (El salto es igual al valor absoluto de la diferencia de los límites laterales).

2) *De Segunda Especie:* Al menos uno de los límites laterales en a *no existe.*

4.4 Propiedades de la Funciones Continuas.

1) Si f y g son continuas en un conjunto A, también lo son $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, con $g(a) \neq 0$.

2) Si $g(t)$ es continua en $t = a$ y $f(x)$ es continua en $b = g(a)$ entonces $f \circ g$ es continua en $t = a$.

3) Una función f, continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, es *acotada*. Es decir existe $K > 0$ tal que, para todo $x \in [a, b]$ se tiene que: $|f(x)| \leqslant K$.

Carlos Weierstrass. (1815-1897) fue un matemático alemán que se suele citar como el "padre del análisis moderno".

4. **Teorema de Weierstrass.** Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ *alcanza* sus extremos, es decir existen puntos x_1, x_2 tales que:

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2) \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Bernard Bolzano (Praga, 1781-1848) fue un matemático, lógico, filósofo y teólogo checo que realizó importantes contribuciones a las matemáticas y a la Teoría del conocimiento.

5. **Teorema de Bolzano.** Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $f(a), f(b)$ son de signos opuestos entonces existe $c \in \,]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

   Aplicaciones:

   - Calculo aproximado de raíces irracionales.
   - Un auto viaja de Talca a Curicó, que están a 60km, en una hora pero no fue a velocidad constante. **Demostrar** que hubo algún instante en el que el auto fue a exactamente 60km/h.

6. Si $f(x)$ es continua en a entonces $\lim\limits_{x \to a} (f \circ g)(x) = f\left(\lim\limits_{x \to a} g(x)\right)$.