SESIÓN 5

Introducción a la derivada

Temas:

- Introducción.
- Problema de la recta tangente (PRT).
- Solución a la Fermat-Descartes del PRT.
- Solución a la Barrow-Newton-Leibniz del PRT.

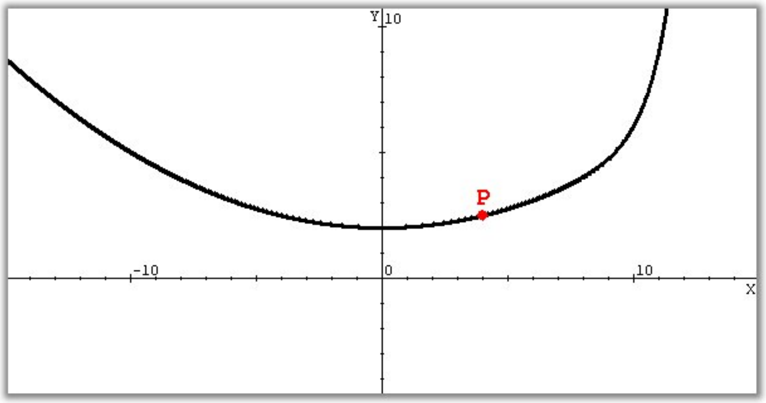
5.1 Introducción

Los orígenes del Cálculo Diferencial están, esencialmente ligados al **Problema Geométrico de la Tangente a una Curva**. Los Griegos resolvieron esta situación para algunas curvas en particular (cónicas).
Pierre de Fermat (Francés, 1602-1665) junto a René Descartes (Francés, 1596 - 1650) como consecuencia de introducir las, ahora conocidas, técnicas de la **Geometría Analítica** encuentran tangentes a curvas algebraicas, poniendo la condición que las ecuaciones de la curva y la recta tangente se corten en un punto.
Muchos matemáticos se abocan a la tarea de encontrar un método general para resolver el problema comentado, siendo el matemático Inglés Isaac Barrow (1630 - 1677) quien propone la mejor solución, basada en **cuocientes de incrementos**. Esta idea es desarrollada simultáneamente por los grandes matemáticos Isaac Newton (Inglés, 1642 - 1727) (alumno de Barrow) y Wilhelm Leibniz (Alemán, 1646 - 1716). El nuevo método es tomado y aplicado con entusiasmo por otros matemáticos (L'Hopital, quien publicó el primer tratado sobre Cálculo Diferencial, J. Bernoulli y L. Euler entre otros).

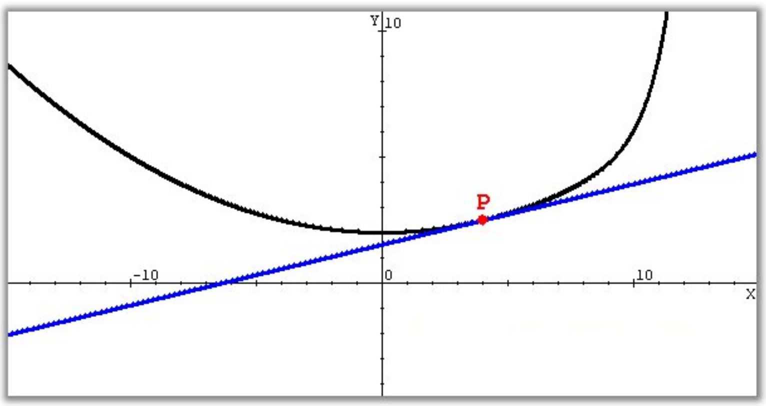
5.2 Problema de la Recta Tangente (PRT)

Dados:

- Una función $y = f(x)$ cuyo gráfico es una curva C del plano.
- Un punto $P = (a, f(a))$ de la curva C. Con $a \in Dom(f)$.



Encontrar una ecuación de la recta tangente a la curva C en su punto $P = (a, f(a))$



5.2.1 Solución a la Descartes del PRT

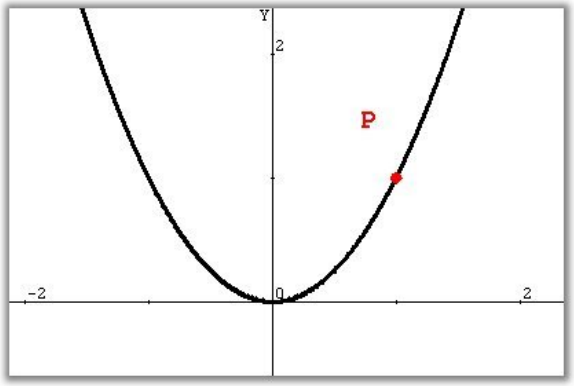
- Considerar la familia de rectas que pasan por el punto $P = (a, f(a))$: $y = f(a) + m(x - a)$
- Buscar m de modo que la recta de esta familia intersecte al gráfico de $y = f(x)$ en UN punto. Para ello se debe lograr que el sistema:

$$\begin{array}{rcl|} y & = & f(a) + m(x-a) \\ y & = & f(x) \\ \hline \end{array}$$

tenga solución única.

Luego, con este m encontrado, se determina la ecuación de la recta tangente buscada.

Un ejemplo particular: Encontrar una ecuación de la recta tangente al gráfico de $y = f(x) = x^2$ en $P = (1, 1)$.



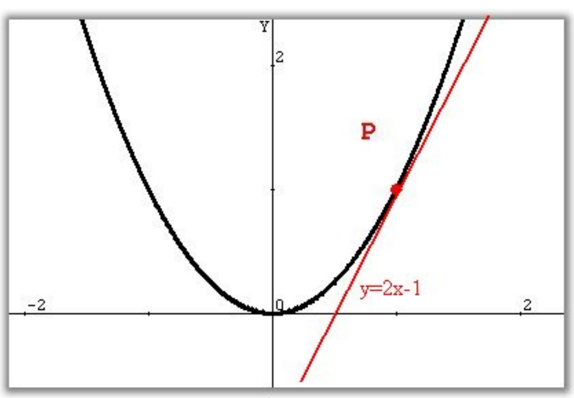
Solución a la Descartes:

- Consideremos la familia de rectas que pasan por el punto P: $y = 1 + m(x - 1)$
- Intersectemos esta familia con el gráfico de $y = x^2$, de modo que el sistema:

$$\begin{array}{rcl|} y & = & mx + 1 - m \\ y & = & x^2 \\ \hline \end{array}$$

  tenga solución única. De donde $m = 2$.

Luego, la ecuación de la recta buscada es $y = 2x - 1$.



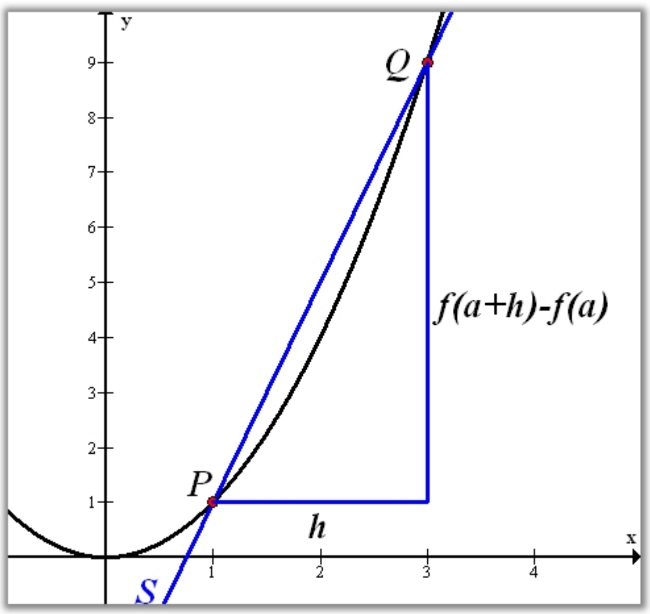
Recta tangente a la curva $y = x^2$ en su punto $(1, 1)$

5.2.2 Solución a la Newton

- Sea h un incremento en x (pequeño), tal que existe un punto Q de abscisa $a+h$ perteneciente a la curva $y = f(x)$.

- Sea S la recta determinada por $P = (a, f(a))$ y $Q = (a+h, f(a+h))$. S es una recta secante a la curva $y = f(x)$, que pasa por P y Q. La pendiente de la recta secante S es:

$$m_S = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Recta secante a la curva $y = x^2$

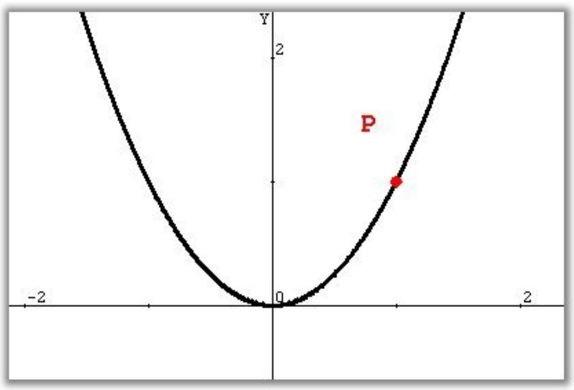
- Notar que:

$$\begin{array}{rcl}
\text{cuando} \quad h & \longrightarrow & 0 \\
& \Downarrow & \\
\text{el punto } Q & \longrightarrow & \text{al punto } P \\
& \Downarrow & \\
\text{la recta } L & \longrightarrow & \text{a la recta } T \text{ tangente a } y = f(x) \text{ que pasa por } P \\
& \Downarrow & \\
m_L & \longrightarrow & m_T \\
& \Downarrow & \\
\lim\limits_{h \longrightarrow 0} m_L & = & m_T
\end{array}$$

- Luego, la pendiente de la recta tangente T a la curva $y = f(x)$ en el punto P es:
$$m_T = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
siempre que este límite exista (*finito*)

- Finalmente, la ecuación de la recta tangente T a la curva $y = f(x)$ en el punto $P = (a,\ f(a))$ es:
$$y - f(a) = m_T(x - a)$$

Un ejemplo particular: Encontrar una ecuación de la recta tangente al gráfico de $y = f(x) = x^2$ en $P = (1, 1)$.



Solución a la Newton:

$$\begin{aligned} m_T &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Luego, la ecuación de la recta tangente buscada es $y = 2x - 1$.