SESIÓN 7

Derivada de una FRVR

Temas:

- Derivabilidad. Notaciones.
- Gráficos y derivabilidad.
- Continuidad versus derivabilidad.

---

1) Sea $y = f(x)$ una función y $a \in Dom(f)$.

Se dice que la función $y = f(x)$ es **derivable en** $x = a$ o que **tiene derivada en** $x = a$ si y solamente si existe el límite (finito):

$$(*) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Observaciones:

- El límite (*) cuando existe, se designa de varias maneras:

Notación de Lagrange	:	$f'(a), \qquad y'\|_{x=a}$
Notación de Arbogasf	:	$Df(a), \qquad D_x f(a), \qquad Dy\|_{x=a}$
Notación de Newton	:	$\dot{y}_{x=a}$
Notación de Leibniz	:	$\frac{dy}{dx}\|_{x=a}, \qquad \frac{df(a)}{dx}$

En este curso usaremos las notaciones de Lagrange y Leibniz. Por lo tanto

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- El límite (*) que define la derivada, también se puede presentar de otras maneras:

  a) Haciendo $h = \Delta x$, se tiene:

  $$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

  b) Haciendo el cambio de variable $x = a + \Delta x$ (o $x = a + h$), se tiene:

  $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

  c) También, si se recuerda que

  $$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

  se tiene:

  $$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

  manera que es *consecuente* con la notación propuesta por Leibniz.

  d) Cuando la derivada se calcula en un punto genérico x, la derivada de f en x, se anota simplemente:

  $$f'(x) = Df(x) = \frac{dy}{dx} = Df = f' = y' = Dy = \dot{y}$$

  expresión que recibe el nombre de **función derivada** o **derivada de** f.

- Luego de esta definición se tiene que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es: ....(completar).

2) Si $y = f(x) = 2x^2 - 1$, encontrar $f'(1)$.

   Solución:

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{(2(1 + \Delta x)^2 - 1) - (2 \cdot 1^2 - 1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} \frac{\Delta x(4 + \Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \longrightarrow 0} (4 + \Delta x) \\
&= 4
\end{aligned}$$

   Respuesta: $f'(1) = 4$.

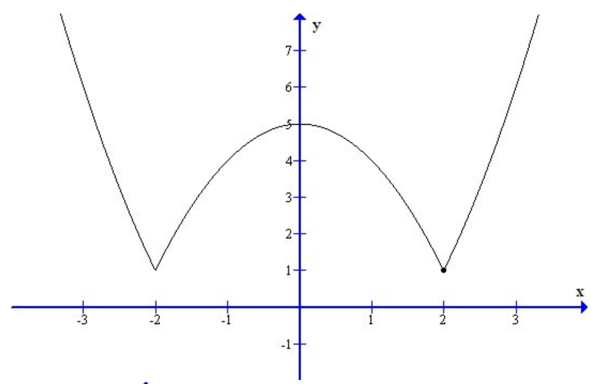
3) Usando la misma función precedente, determinar $f'(x)$ (esta es la derivada de f) y a partir de ella encontrar la derivada de f en $x = -1$, 0 y 15.

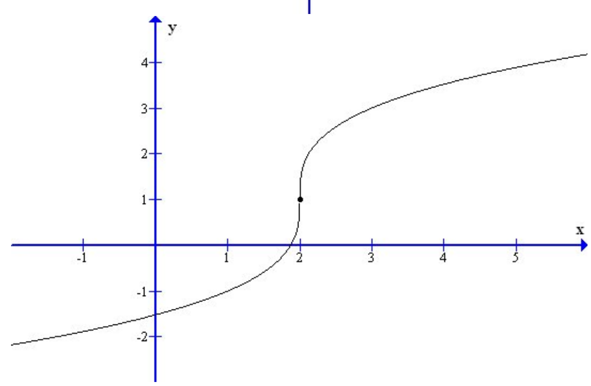
4) **Gráficos y derivabilidad**.

Considerar las funciones

$$y = f(x) = |4 - \frac{x^2}{4}| + 2 \qquad y = g(x) = 2(x-2)^{1/3} + 1$$

cuyos gráficos, respectivamente, son:





Comprobar que ambas funciones no son derivables en $x = 2$.

Nota: Estos ejemplos ilustran *como se ve gráficamente*, en general, una función cuando **no** es derivable en un punto.

En los puntos donde una función **no** es derivable, su gráfico

- **no** tiene recta tangente. Tales puntos, por su forma, se suele llamar *puntos angulosos*.
- tiene recta tangente vertical, recta que no tiene pendiente (que es la derivada).
- Revisar el siguiente punto

5) **Relación entre Continuidad y Derivación**

Las funciones precedentes muestran que *una función puede ser continua y no derivable en un punto.* Es decir:

$$\boxed{\text{Continuidad} \quad \not\Rightarrow \quad \text{Derivable}}$$

Pero si sucede que una función es derivable en $x = a$, entonces **obligadamente** ella debe ser continua en $x = a$. Comprobar esta afirmación usando la siguiente relación:

$$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y recordando que:

a) f es continua en $x = a$ cuando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

b) $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

Luego:

$$\boxed{\text{Derivable} \quad \Longrightarrow \quad \text{Continua}}$$