SESIÓN 8

Fórmulas de derivadas I

Temas:

- Introducción.
- Fórmulas de derivación de funciones básicas.
- Fórmulas de derivación para algebra de funciones.

8.1 Introducción

En esta sesión se inicia la deducción y puesta en práctica de fórmulas para derivar funciones. Empezaremos con las funciones básicas y luego se revisan las fórmulas para derivar la suma, diferencia, producto y cuociente de dos funciones.

8.2 Fórmulas de las derivadas de las funciones básicas

8.2.1 Derivada de una función constante

Sea $y = f(x) = c$ una función constante, entonces $f'(x) = (c)' = 0$

es decir,

La derivada de una función constante es igual a 0.

En efecto:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 0 = 0
\end{aligned}
$$

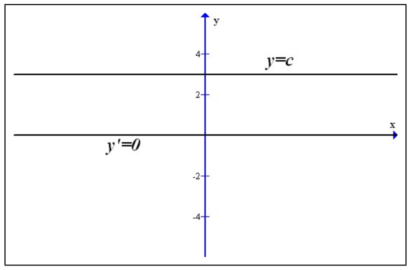

Gráfico de una función constante y su derivada.

8.2.2 Derivada de la función identidad

Si $y = f(x) = x$ es la función identidad, entonces $f'(x) = (x)' = 1$

es decir,

La derivada de la función identidad es igual a 1.

En efecto:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 1 = 1
\end{aligned}
$$

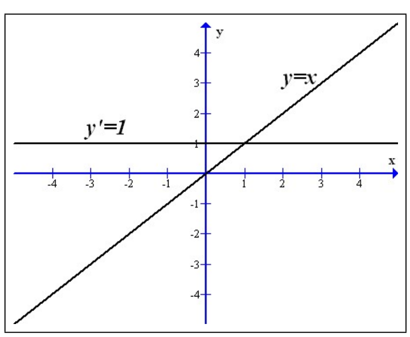

Gráfico de la función identidad y su derivada.

8.2.3 Derivada de la función potencial

$$\boxed{\text{Si } y = f(x) = x^n, \text{ entonces } f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}}$$

es decir,

> La derivada de la función x^n es igual al exponente por x elevado al exponente menos 1.

En efecto, para $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n) - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^n} + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n - \cancel{x^n}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \cdots + h^n}{h} = 1 \\
&= \lim_{h\to 0} (nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}h + \cdots + h^{n-1}) = nx^{n-1}
\end{aligned}$$

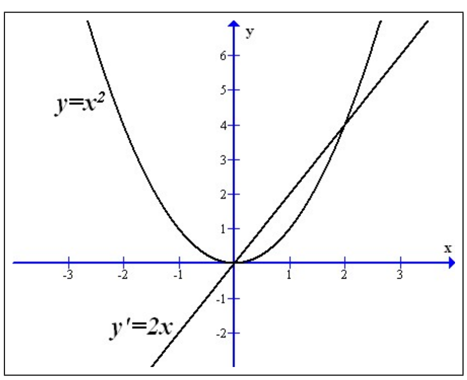

Gráfico de la función $y = x^2$ y su derivada.

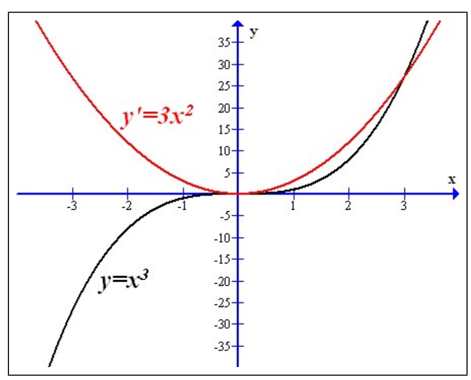

Gráfico de la función $y = x^3$ y su derivada.

8.2.4 Derivada de la función logaritmo natural

$$\boxed{\text{Si } y = f(x) = \ln x, \text{ entonces } f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} && \text{como } \tfrac{1}{\mathrm{x}} \text{ es constante y } \ln \text{ es continua} \\
&= \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] && \text{Usando cambio de variable } \mathrm{t} = \tfrac{\mathrm{h}}{\mathrm{x}}: \\
&= \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right] && \text{como } \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e, \text{ limite especial}: \\
&= \frac{1}{x}\ln[e] \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

8.2.5 Derivada de la función exponencial

$$\boxed{\text{Si } y = f(x) = e^x, \text{ entonces } f'(x) = (e^x)' = e^x}$$

En efecto:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h-1}{h} = e^x$$

8.2.6 Derivada de la función sin.

$$\boxed{\text{Si } y = f(x) = \sin x, \text{ entonces } f'(x) = (\sin x)' = \cos x}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x \sin h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}\right) \\
&= \sin x \lim_{h\to 0}\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \\
&= \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x
\end{aligned}$$

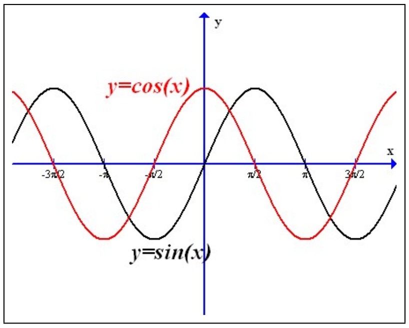

Gráfico de la función $y = \sin x$ y su derivada.

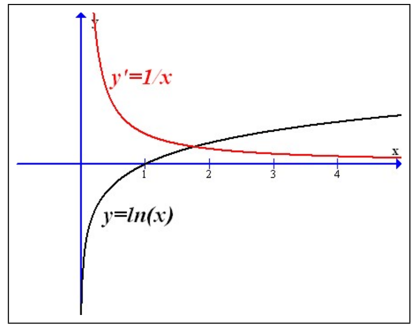

Gráfico de la función $\ln x$ y su derivada $\frac{1}{x}$.

Nota: La verificación de las derivadas de las restantes funciones trigonométricas, se dejan para su trabajo personal.
Las fórmulas recién deducidas, no permiten calcular por si solas otras derivadas. Pero éstas en conjunto con **las reglas del algebra de derivadas**, permiten calcular fácilmente las derivadas de muchas funciones más.
A modo de ejemplo, se deducirá la regla de la derivada de un producto de funciones:

8.2.7 Regla de la derivada de un producto

.
Si $y = f(x)$ e $y = g(x)$ funciones derivables, entonces

$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
(f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + g(x)(f(x+h) - f(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(f(x+h) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

Nota: ¿Por qué $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$?.

8.3 Ejemplos

1) Si $f(x) = 3x^4 - \frac{1}{x^2} + 5\cos x$ encontrar $f'(x)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (3x^4 - \tfrac{1}{x^2} + 5\cos x)' \\
&= (3x^4)' - (x^{-2})' + (5\cos x)' \\
&= 3(x^4)' - (x^{-2})' + 5(\cos x)' \\
&= 3 \cdot 4x^3 - (-2)x^{-3} + 5(-\sin x) \\
&= 12x^3 + 2x^{-3} - 5\sin x
\end{aligned}$$

2) Si $f(u) = \sqrt{u} - \dfrac{3}{u^3}$, encontrar $f'(u)$

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(u) &= \left(\sqrt{u} - \frac{3}{u^3}\right)' \\
&= \left(u^{\frac{1}{2}} - 3u^{-3}\right)' \\
&= (u^{\frac{1}{2}})' - (3u^{-3}) \\
&= \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} - 3 \cdot (-3)u^{-4} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{u}} + \frac{9}{u^4}
\end{aligned}$$

3) Si $f(x) = 2e^x + e^2 + x^e$ encontrar $f'(x)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (2e^x + e^2 + x^e)' \\
&= (2e^x)' + (e^2)' + (x^e)' \\
&= 2(e^x)' + 0 + ex^{e-1} \\
&= 2e^x + ex^{e-1}
\end{aligned}$$

4) Si $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, encontrar $f'(x)$.

Solución:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)' \\
&= \frac{(x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1)' - (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{(x^2 + 1) \cdot 2x - (x^2 - 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} \\
&= \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}
\end{aligned}$$

5) Si $f(x) = (x^2 + 1)(5x^3 + 4x^2 + 3x + 1)$, usando la regla del producto, encontrar $f'(x)$ *Solución*:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2+1)(5x^3+4x^2+3x+1)' + (5x^3+4x^2+3x+1)(x^2+1)' \\
&= (x^2+1)((5x^3)' + (4x^2)' + (3x)' + 1') + (5x^3+4x^2+3x+1)((x^2)' + 1') \\
&= (x^2+1)(5(x^3)' + 4(x^2)' + 3x' + 1') + (5x^3+4x^2+3x+1)(2x+0) \\
&= (x^2+1)(5\cdot 3x^2 + 4\cdot 2x + 3\cdot 1 + 0) + (5x^3+4x^2+3x+1)(2x) \\
&= (x^2+1)(15x^2+8x+3) + (10x^4+8x^3+6x^2+2x) \\
&= (15x^4+8x^3+18x^2+8x+3) + (10x^4+8x^3+6x^2+2x) \\
&= 25x^4+16x^3+24x^2+10x+3
\end{aligned}
$$