SESIÓN 9

Fórmulas de derivadas II

Temas:

- Introducción.
- Regla de la cadena.
- Fórmulas de derivación conocidas + Regla de la cadena = Nuevas fórmulas.

9.1 Introducción

Hasta este momento conocemos las reglas para derivar las funciones básicas (x^n, $\ln x$, e^x, $\sin x$, etc.) y las reglas para derivar la suma, diferencia, producto y cuociente de funciones cuya derivada sea posible calcular.

Pero todos estos recursos no permiten calcular la derivada, por ejemplo, de la *sencilla* función $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. ¿Qué tiene de especial esta función?. Ella es la compuesta de dos función básicas. En efecto, haciendo:

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 1$$

se tiene que:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1} = h(x).$$

Luego, como las derivadas de f y g se pueden calcular, lo que se necesita es una fórmula que permita encontrar la derivada de $f \circ g$, en base a las derivadas de f y g. La siguiente fórmula da respuesta a esta inquietud.

9.2 Regla de la cadena

Teorema: Regla de la cadena Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones derivables, entonces

$$\boxed{(f \circ g)(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{du}}$$

Demostración: Sea Δx un incremento de la variable x y Δu el cambio correspondiente de la función u, es decir,

$$\Delta u = g(x + \Delta x) - g(x).$$

En tal caso, el cambio correspondiente en la función y es:

$$\Delta y = f(u + \Delta u) - f(u).$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \text{asumiendo que } \Delta u \neq 0 \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \text{Notar que } (\Delta x \to 0) \Rightarrow (\Delta u \to 0) \\
&= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}
\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular la derivada de $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
Desarrollo: Como ya se había comentado, esta función es una compuesta de dos función básicas. En efecto, haciendo:

$$y = f(u) = \sqrt{u} \qquad \text{y} \qquad u = g(x) = x^2 - 1$$

se tiene que:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = \sqrt{x^2 - 1} = h(x).$$

Es claro que

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = 2x$$

por lo tanto,

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Ahora bien, si se usa la segunda versión de la regla de la cadena, se tiene:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

Nota: Una de las principales aplicaciones de la Regla de la cadena es que ella permite *potenciar* nuestras fórmulas básicas de derivación. Revisar el siguiente desarrollo:

Ya se ha verificado que $(x^n)' = nx^{n-1}$ (fórmula 2.a). Usando este resultado y la Regla de la cadena comprobar que si $u = g(x)$ es una función derivable, entonces

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \qquad \text{(Formula 9).}$$

En efecto: Haciendo $y = f(x) = x^n$, se tiene que

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u) = u^n.$$

Luego,

$$(u^n)' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = n(g(x))^{n-1} \cdot g'(x) = nu^{n-1}u'.$$

Ejemplo: Calcular la derivada de $y = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5$. Desarrollo:

$$\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5\right]' = 5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = 5\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{10(x-1)^4}{(x+1)^6}$$

Nota: Análogamente se verifican las fórmulas 10, 11 y 12 del formulario.

Ejercicios: Usando la(s) fórmula(s) adecuadas, calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1) $y = (x^2 + 5x - 3)^{15}$
2) $y = e^{x^2}$
3) $y = \sin(\cos x)$
4) $y = xe^{x^2}$
5) $y = \ln(x + \ln x)$
6) $f(t) = (t^3 + 5t^2 - 3)^3(t^2 + 1)^4$
7) $g(u) = \frac{\cos^2 u}{\sin u}$
8) $h(y) = \sqrt{y + \sqrt{y}}$
9) $i(\alpha) = \sin(3^2 + \alpha^2)$

10) $j(w) = \sin^3 w - \cos^2 w^2$

11) $k(z) = \sqrt[3]{\dfrac{z^2+1}{z^2-1}}$

12) $l(\alpha) = 25 + \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$