SESIÓN 10

Derivadas sucesivas. Derivadas implícitas

Temas:

- Derivadas sucesivas.
- Derivadas implícitas.

10.1 Derivadas sucesivas

Sea $y = f(x)$ una función derivable. La derivada de f, denotada $f'(x)$ es una función de x, y puede tener derivada.

Nombre	Notación	Descripción
Primera derivada de f	$f'(x)$ $\dfrac{dy}{dx}$; y'	$f'(x) = \dfrac{d}{dx} f(x)$
Segunda derivada de f	$f''(x)$ $\dfrac{d^2}{dx^2} f(x)$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}$; y''	$f''(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d}{dx} f(x)\right)$
Tercera derivada de f	$f'''(x)$ $\dfrac{d^3}{dx^3} f(x)$; $\dfrac{d^3y}{dx^3}$; y'''	$f'''(x) = \dfrac{d}{dx} f''(x)$
...		

Ejercicio: Dada la función $y = f(x) = x\sqrt{1-x}$, verificar que:

a) $f'(x) = \dfrac{3-4x}{3(1-x)^{2/3}}$ b) $f''(x) = \dfrac{2(2x-3)}{9(1-x)^{5/3}}$

10.2 Derivadas implícitas

1) Las funciones $y = f(x)$ se denominan funciones explícitas, por ejemplo $y = f(x) = 3x^2$. En estos casos, y en función de x de manera explícita. En tal caso:

$$y = f(x) \Longrightarrow \frac{d}{dx}y = f'(x)$$

2) En muchos casos no es fácil despejar y en términos de x. Por ejemplo $y^5 - 2xy^3 = 7x + 2$, es una relación que define en forma implícita a y como función de x.

   Tener presente que como $y = f(x)$ aunque de manera implícita, por lo tanto:

$$\frac{d}{dx}(y^n) = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$$

   Para calcular la derivada de y con respecto a x, se puede calcular $\dfrac{dy}{dx}$ mediante *derivación implícita*.

Ejemplo. Hallar $y' = \dfrac{dy}{dx}$, si $y^5 - 2xy^3 = 7x^3 + 2$.

Solución

$$y^5 - 2xy^3 = 7x^3 + 2$$

derivar a ambos lados respecto de x

$$\frac{d}{dx}(y^5 - 2xy^3) = \frac{d}{dx}(7x^3 + 2)$$

$$5y^4\frac{dy}{dx} - \left(2x \cdot 3y^2\frac{dy}{dx} + y^3\frac{d}{dx}(2x)\right) = \frac{d}{dx}(7x^3) + \frac{d}{dx}2$$

$$5y^4\frac{dy}{dx} - 6xy^2\frac{dy}{dx} - 2y^3 = 21x^2$$

factorizar por $\dfrac{dy}{dx}$

$$(5y^4 - 6xy^2)\frac{dy}{dx} = 21x^2 + 2y^3$$

despejar $\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{21x^2 + 2y^3}{5y^4 - 6xy^2}$$

Luego: $\quad y' = \dfrac{21x^2 + 2y^3}{5y^4 - 6xy^2}$

Ejercicios. Hallar $y' = \dfrac{dy}{dx}$, si:
(a) $x^3 + 3x^2y + 5xy^2 + y^3 = 0$ (b) $y\sqrt{x} + y^3 = 3e^{2x}$.
Nota. Sea y función de x definida mediante una relación implícita. Se pueden obtener las derivadas sucesivas de f.
Ejemplo:
Sea y función de x definida mediante la relación implícita: $2y - y^3 = x^3 + x^2 - 1$.
a) $y' = \dfrac{x(3x+2)}{2-3y^2}$ b) $y'' = \dfrac{(3y^2-2)(3x+1)}{3xy(3x+2)}$

10.3 Método de derivación logarítmica

Puede utilizarse este método para calcular $\dfrac{d}{dx}y$, cuando $f(x)$ consiste en productos, cuocientes, potencias o cuando $f(x)$ es de la forma u^v, donde u como v son funciones de x.

Ejemplo. Sea $y = f(x) = \dfrac{(2x-1)^3(3x+7)^2}{e^{2x}(4x-5)^3}$. Determinar y'.
Solución

$$y = \frac{(2x-1)^3(3x+7)^2}{e^{2x}(x+2)^3} \qquad \text{aplicar ln a ambos lados}$$

$$\ln y = \ln \frac{(2x-1)^3(3x+7)^2}{e^{2x}(x+2)^3}$$

$$\ln y = 3\ln(2x-1) + 2\ln(3x+7) - \ln(e^{2x}) - 3\ln(x+2)$$

$$\ln y = 3\ln(2x-1) + 2\ln(3x+7) - 2x - 3\ln(x+2)$$

derivando ambos lados, respecto de x

$$\frac{d}{dx}\ln y = 3\frac{d}{dx}\ln(2x-1) + 2\frac{d}{dx}\ln(3x+7) - 2 - 3\frac{d}{dx}\ln(x+2)$$

$$\frac{1}{y}y' = 3\frac{1}{2x-1}\cdot 2 + 2\frac{1}{3x+7}\cdot 3 - \frac{d}{dx}\ln(e^{2x}) - 3\frac{1}{x+2}$$

$$y' = y\left(\frac{6}{2x-1} + \frac{6}{3x+7} - 2 - \frac{3}{x+2}\right)$$

$$y' = \frac{(2x-1)^3(3x+7)^2}{e^{2x}(x+2)^3}\cdot\left(\frac{6}{2x-1} + \frac{6}{3x+7} - 2 - \frac{3}{x+2}\right)$$

Ejemplo. Sea $y = f(x) = x^x$, calcular y' en el punto $x = 3$.
Solución:

$$\begin{aligned} y &= x^x \\ \ln y &= \ln x^x \\ \ln y &= x \ln x \\ \frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dx}(x \ln x) \end{aligned}$$

Derivando implícitamente y aplicando fórmulas básica, queda

$$\frac{1}{y}\frac{d}{dx}y = x\frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \cdot \frac{d}{dx}x$$

$$\frac{1}{y}y' = x\frac{1}{x} + \ln x \cdot 1$$

$$\frac{1}{y}y' = 1 + \ln x$$

Por lo tanto: $y' = y(1 + \ln x)$, o $y' = x^x(1 + \ln x)$

En $x = 3$, $y'\Big|_{x=3} = f'(3) = 27(\ln 3 + 1) \approx 56,66$