SESIÓN 11

RCR. Diferenciales y aproximaciones

11.1 Razones de cambio relacionadas

¿Cuán rápido varía una cantidad? En general, una razón de cambio con respecto al tiempo es la respuesta a esta pregunta. La derivada $\frac{dy}{dx}$ de una función $y = f(x)$ es una razón de cambio instantánea con respecto a la variable x. Si la función representa posición o distancia entonces la razón de cambio con respecto al tiempo se interpreta como velocidad.
Si dos cantidades están relacionadas entre sí, entonces cuando una de ellas cambia con el tiempo, la otra cambiará también. Por lo tanto sus razones de cambio (con respecto al tiempo) están relacionadas entre sí. Por ello a este tipo de situaciones se les llama razones de cambio relacionadas.
Para resolver un problema de razones de cambio relacionadas, se sugiere seguir los siguientes pasos:

1) Hacer una ilustración de la situación planteada.

2) Identificar con símbolos las cantidades que varían en el tiempo.

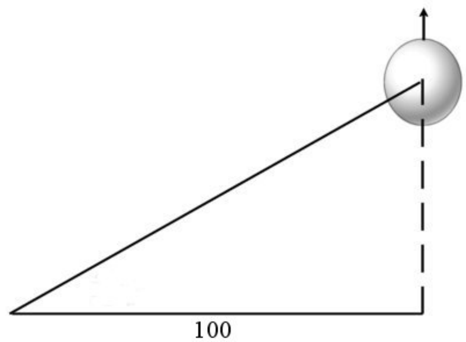
3) Identificar las razones de cambio que se conocen y la razón que se busca.

4) Escribir una ecuación que relacione las variables.

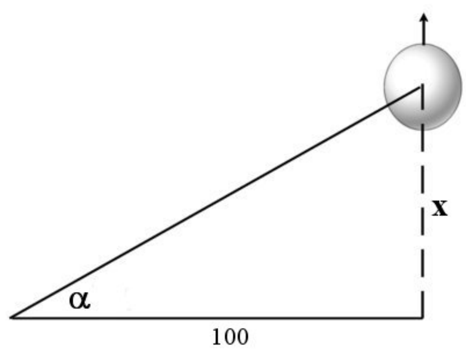
5) Derivar implícitamente con respecto al tiempo la ecuación obtenida en el paso 4.

Ejemplo resuelto:
Un globo sube a una velocidad de 10$\frac{m}{s}$ desde un punto del suelo que se encuentra a 100m del observador. Encontrar la razón de cambio del ángulo de elevación del globo desde el observador cuando el globo está a 50m de altura.
Desarrollo:

1) Hacer una ilustración de la situación planteada.



2) Identificar con símbolos las cantidades que varían en el tiempo.



3) Identificar las razones de cambio que se conocen y la razón que se busca.

- Razón conocida: $\dfrac{dx}{dt} = 10\dfrac{m}{s}$
- Razón de cambio buscada: $\dfrac{d\alpha}{dt}$

4) Escribir una ecuación que relacione las variables.

$$\tan\alpha = \frac{x}{100}$$

5) Derivar implícitamente con respecto al tiempo la ecuación obtenida en el paso 4.

$$\sec^2\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{100} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Ahora bien, cuando el globo está a 50m del suelo: $\tan\alpha = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$, de donde $\sec\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Luego:

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{100} \cdot 10$$

de donde

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{2}{25}$$

Por lo tanto, cuando el globo se encuentra a 50m del suelo, el ángulo de elevación del globo está variando a $\dfrac{2}{25}\dfrac{rad}{s}$.

11.2 Diferenciales y aproximaciones

1) Definiciones: Sea $y = f(x)$ una función derivable.

- Δx denota un incremento de la variable independiente x.
- $dx = \Delta x$, se denomina *diferencial de x*.
- $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ es el cambio real de la variable y.
- $dy = f'(x)\,dx$ recibe el nombre de *diferencial de y*.

2) Aproximaciones.

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x$$

es decir:

$$\Delta y \approx dy$$

Ejemplo resuelto:

Usando del resultado precedente, aproximar $\sqrt{402}$.

Sea $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 200$ y $\Delta x = 2$. Luego:

$$\sqrt{402} = f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x = \sqrt{400} + \frac{1}{2\sqrt{400}} \cdot 2 = 20.05$$

Notar que el valor de $\sqrt{402}$ entregado por una calculadora es 20.04993765.