SESIÓN 12

Extremos y puntos críticos de una función

12.1 Definiciones previas

Sea f una función definida en $D \subseteq \mathbb{R}$.

1) f tiene un **máximo relativo** (o local) en $x = c$, si el punto $(c, f(c))$ de la gráfica, es un punto *más alto* que cualquier punto de la gráfica *próximos a c* (por ambos lados).

   Es decir, existe un intervalo abierto I, del dominio de f, que contiene a c, tal que
$$f(x) \leqslant f(c), \text{ para todo } x \in I.$$

2) f tiene un **máximo absoluto** en $x = c$, si el punto $(c, f(c))$ de la gráfica, es un punto *más alto* que cualquier punto de la gráfica.

   Es decir,
$$f(x) \leqslant f(c), \text{ para todo } x \in D.$$

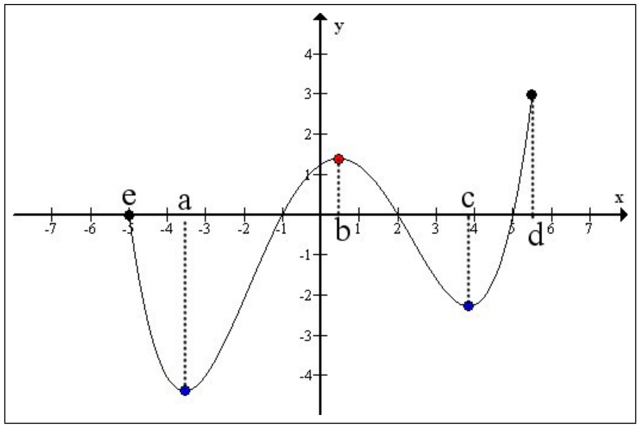
3) f tiene un **mínimo relativo** (o local) en $x = d$, si el punto $(d, f(d))$ de la gráfica, es un punto *más bajo* que cualquier punto de la gráfica *próximos a d* (por ambos lados).

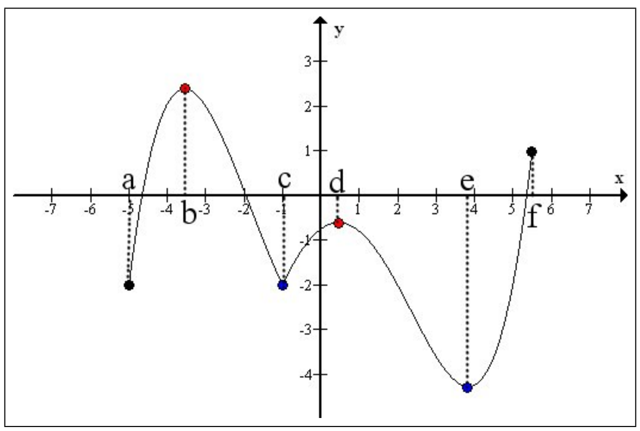
   Es decir, existe un intervalo abierto I, del dominio de f, que contiene a d, tal que
$$f(d) \leqslant f(x), \text{ para todo } x \in I.$$

4) f tiene un **mínimo absoluto** en $x = d$, si el punto $(d, f(d))$ de la gráfica, es un punto *más bajo* que cualquier punto de la gráfica.

   Es decir,
$$f(d) \leqslant f(x), \text{ para todo } x \in D.$$

Actividad. En los siguientes gráficos, identificar los extremos relativos y absolutos de cada una de las funciones dadas:





12.2 Puntos críticos

¿Que condiciones puede cumplir un punto donde una función alcanza un extremo?. Los puntos donde una función puede alcanzar un extremo (candidatos a extremos) reciben el nombre de *puntos críticos de la función*.

Respuesta:

12.3 Extremos absolutos de una función

Para empezar recordemos el teorema (para funciones continuas):

> Toda función **continua** en un intervalo **cerrado** tiene extremos absolutos (mínimo absoluto y máximo absoluto).

12.4 Regla o procedimiento para determinar los extremos absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado $[a, b]$

- Determinar los puntos críticos de f

  Estos se determinan:

  1) Raíces de la ecuación $f'(x) = 0$
  2) Valores de x para los cuales no existe $f'(x)$, pero si $f(x)$.

- Evaluar f en cada punto crítico que se *encuentra* en el intervalo $]a, b[$, y calcular $f(a)$ y $f(b)$:

- El máximo absoluto de f es el valor más grande de los valores encontrados en el paso anterior. El mínimo absoluto de f es el menor de los valores encontrados en el paso anterior.

Ejemplo: Determinar los extremos absolutos de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ en el intervalo $[-0.5, 2]$.

En primer lugar observemos que como f es continua en el intervalo propuesto, ella tiene extremos absolutos en este intervalo. Para encontrarlos, sigamos el procedimiento señalado:

Paso 1 Búsqueda de puntos críticos.

1) $f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -1$ o $x = 1$.
2) Valores de x para los cuales no existe $f'(x)$, pero si $f(x)$. En este caso no hay.

   Luego, el único punto crítico interior al intervalo (dominio de la función) es $x = 1$.

Paso 2 Evaluar f en cada punto crítico que se *encuentra* en el intervalo $[a, b]$, y calcular $f(a)$ y $f(b)$:

x	$f(x)$	
-0.5	-0.4	Pto. terminal
1	0.5	Pto. crítico
2	0.4	Pto. terminal

Respuesta: f tiene máximo absoluto en $x = 1$ igual a 0.5 y mínimo absoluto en $x = -0.5$ igual a -0.4.

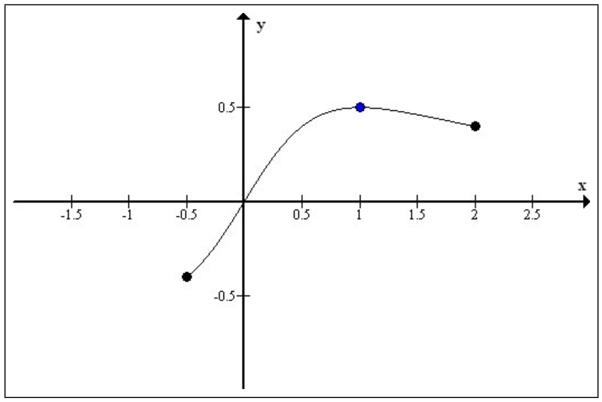


Gráfico de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

12.5 Actividad de autoevaluación:

Estudiar los extremos absolutos de la función $g(x) = 2x - 3x^{2/3}$ en el intervalo $[-1, 2]$.