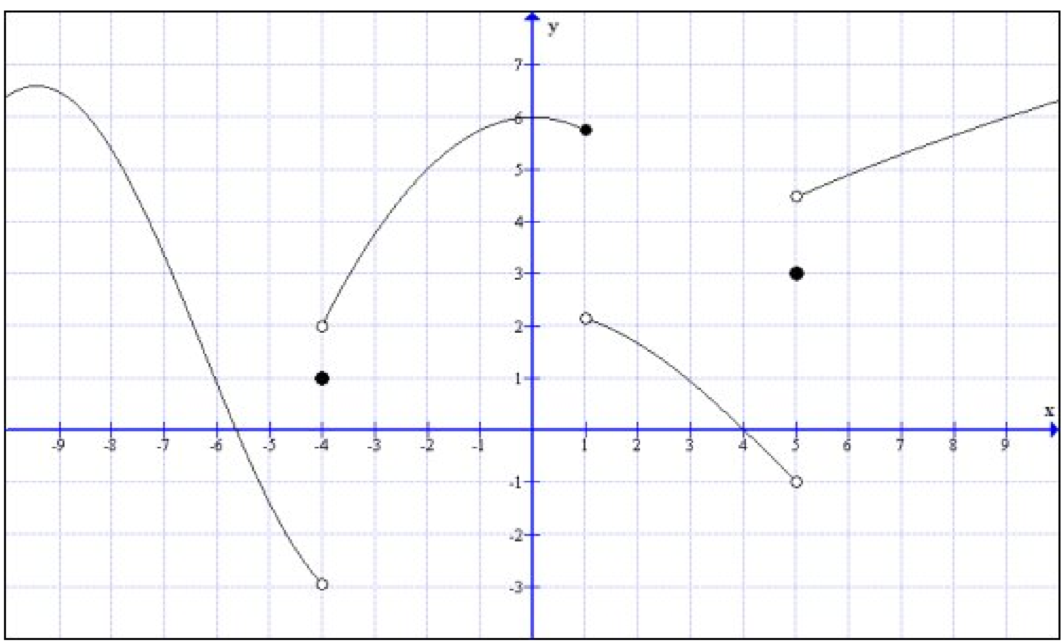
SESIÓN 14

Guías de Ejercicios

14.1 Guía 1: Límites I

1) Considerar la función $y = f(x)$ cuyo gráfico es:



Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to -4^-} f(x)$ *c)* $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$
d) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ *e)* $\lim\limits_{t\to 1^-} f(x)$ *f)* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
g) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ *h)* $\lim\limits_{z\to 5^-} f(x)$ *i)* $\lim\limits_{z\to 5} f(x)$
j) $\lim\limits_{z\to -2} f(x)$ *k)* $\lim\limits_{z\to 2.5} f(x)$ *k)* $\lim\limits_{z\to 4.99} f(x)$

2) Considerar la siguiente función definida por tramos:

$$y = f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x < -1 \\ 2 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ x+1 & \text{si } 1 < x \leqslant 2 \\ -\dfrac{1}{(x-2)^2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcular los siguientes límites:
a) $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ *c)* $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$
d) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ *e)* $\lim\limits_{t\to 1^-} f(x)$ *f)* $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$
g) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ *h)* $\lim\limits_{z\to 2^-} f(x)$ *i)* $\lim\limits_{z\to 2} f(x)$
j) $\lim\limits_{z\to -2} f(x)$ *k)* $\lim\limits_{z\to 2.5} f(x)$ *k)* $\lim\limits_{z\to 0.99} f(x)$

b) Realizar un esbozo del gráfico de $y = f(x)$

c) Usando el gráfico encontrado, confirmar sus respuesta dadas en a).

3) Calcular, sin usar tablas de valores ni gráficos, cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$ *b)* $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x^3+8}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{x-5}}{x-4}$

d) $\lim\limits_{x\to 27} \dfrac{x-27}{\sqrt{3}x-3}$ *e)* $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin 5t}{3t}$ *f)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+5x-3}{2-\sqrt{x^2+4}}$

g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{(x-1)^2}$ *h)* $\lim\limits_{z\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan(2z)}{z-\frac{\pi}{2}}$ *i)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{1-\cos x}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin\ 2x}{x+\sin\ 3x}$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{x^2}$ *l)* $\lim\limits_{z\to 0} (1-z)^{\frac{2}{3z}}$

4) a) Verificar gráficamente que $1-\dfrac{1}{6}x^2 \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$, para todo $x \neq 0$.

b) Comprobar, usando (a) que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

5) Considerar la función

$$y = f(t) = \begin{cases} a + bt & \text{si } t > 2 \\ 3 & \text{si } t = 2 \\ b - at^2 & \text{si } t = 1 \\ t + 1 & \text{si } t < 2 \end{cases}$$

Determinar, en caso que existan, los valores de las constantes a y b de modo que $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = f(2)$

6) Trazar la gráfica de **una** función $y = f(x)$ definida en $\mathbb{R}$ que cumpla simultáneamente cada una de las siguientes condiciones:

(a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = 0$ (b) $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = 2$ (c) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4$ (d) $f(-3) = 4$

(e) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ (g) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$ (h) $\nexists\ f(0)$

(i) Que tenga límite finito en $x = 1$ y $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$

(j) Que tenga límite en $x = 3$ y $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$

(k) Que tenga $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(1)$, pero que tenga límite en $x = 4$

(l) Que no tenga límite en $x = 5$

7) Para $\alpha > 0$, considerar la siguiente familia de funciones:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 3 - \alpha \leqslant x \leqslant 3 + \alpha \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Estudiar $\lim\limits_{x\to 3} f_\alpha(x)$ para $\alpha = 1$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.1$ y $\alpha = 0.01$.