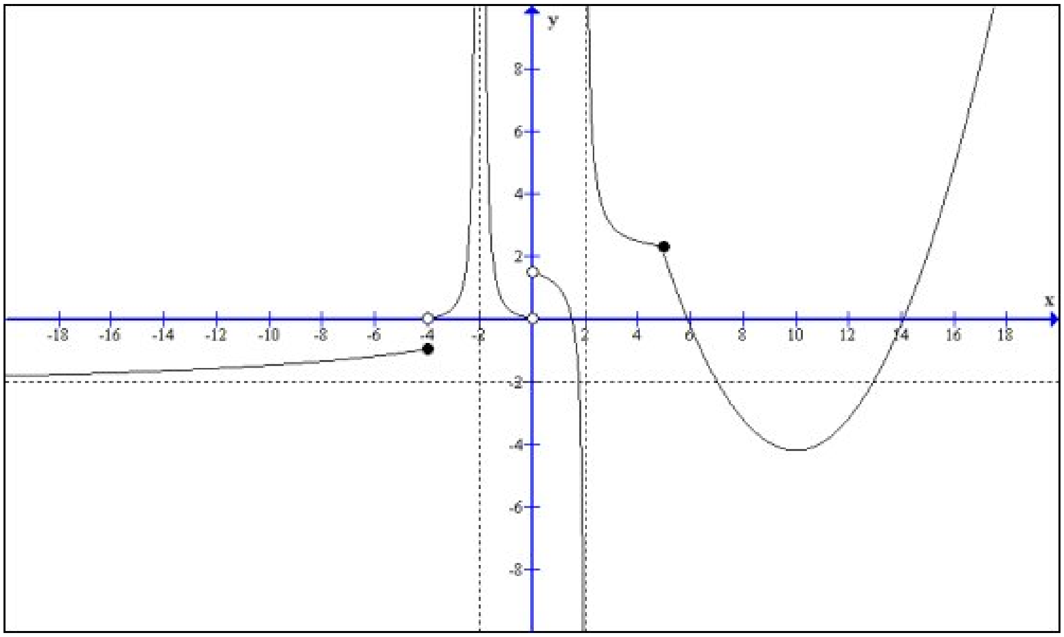
14.2 Guía 2: Límites II

1) Considerar la función $y = f(x)$ cuyo gráfico es:



Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ *c)* $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ *d)* $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ *e)* $\lim\limits_{t\to 2^-} f(x)$ *f)* $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$
g) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ *h)* $\lim\limits_{z\to +\infty} f(x)$ *i)* $\lim\limits_{z\to \infty} f(x)$ *j)* $\lim\limits_{z\to -4} f(x)$ *k)* $\lim\limits_{z\to 0} f(x)$ *k)* $\lim\limits_{z\to 5} f(x)$

2) Calcular, sin usar tablas de valores ni gráficos, cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^3 - 2x)$ *b)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - 2x}{2x^3 + 8x - 5}$ *c)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 - 2x}{2x^4 + 8x - 5}$

d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3 - 2x}{2x^4 + 8x - 5}$ *e)* $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4})$ *f)* $\lim\limits_{x\to -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 4})$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{3 + 4^{\frac{1}{x}}}$ *h)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 + 4^{\frac{1}{x}}}{3 + 4^{\frac{1}{x}}}$ *i)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 - x}$

j) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})$ *k)* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{4x + 1}{4x - 1}\right)^x$ *l)* $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 2}}{x + 5}$

3) **Formas Indeterminadas**: Son tipos de funciones, cuyos límites, al calcularse por el método directo (usando teoremas) conducen a expresiones indeterminadas y por lo tanto no se puede extraer conclusión respecto a su valor. Algunas de ellas son:

$$(*) \quad \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ 0^\infty,\ \infty^0,\ 1^\infty,\ \text{etc.}$$

No toda expresión en que aparezca el símbolo ∞ es indeterminada. Las siguientes son algunas de ellas:

(i) $(+\infty)+(+\infty)=+\infty$. (ii) $a\cdot\infty=\infty$ $(a\neq 0)$. (iii) $\infty\cdot\infty=\infty$.
(iv) $\dfrac{\infty}{0}=\dfrac{a}{0}=\infty$ $(a\neq 0)$. (v) $\dfrac{0}{\infty}=\dfrac{0}{a}=0$ $(a\neq 0)$.

Dar un ejemplo, para cada una de las situaciones indeterminadas $(*)$. Un ejemplo para el caso $\dfrac{0}{0}$ es: a) $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=x$ y $f_3(x)=x^3$, $f_4(x)=x^4$ en $x=0$. Notar que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ y $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f_3(x)}{f_4(x)}$ son indeterminados de la forma $\dfrac{0}{0}$, pero el primer limite es igual a 0 y el segundo igual a ∞.

4) Trazar la gráfica de **una** función $y=f(x)$ definida en $\mathbb{R}$ que cumpla simultáneamente cada una de las siguientes condiciones:

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ (b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ (c) $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-2$
(d) $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=2$ (e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=+\infty$ (f) $\lim\limits_{x\to\pi}f(x)=-\infty$
(g) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ no existe

5) Para cada uno de los siguientes casos se pide encontrar un ejemplo, ojalá sencillo, de una función que cumpla con la condición dada

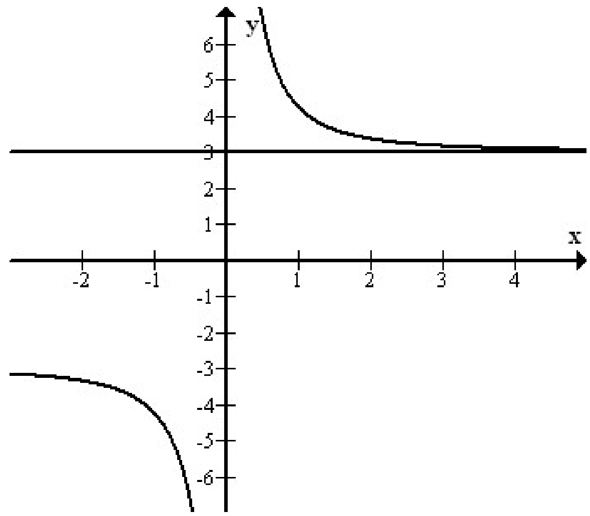
(a) $f(x)$ tal que $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$
(b) $f(x)$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$
(c) $f(x)$ tal que $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=+\infty$
(d) $f(x)$ tal que $\nexists\lim\limits_{x\to 4}f(x)$, pero los límites laterales en el punto, si existan.
(e) $f(x)$ tal que $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

6) **Asíntotas**: Sea $y=f(x)$ una FRVR.

a) *Asíntotas horizontales*:

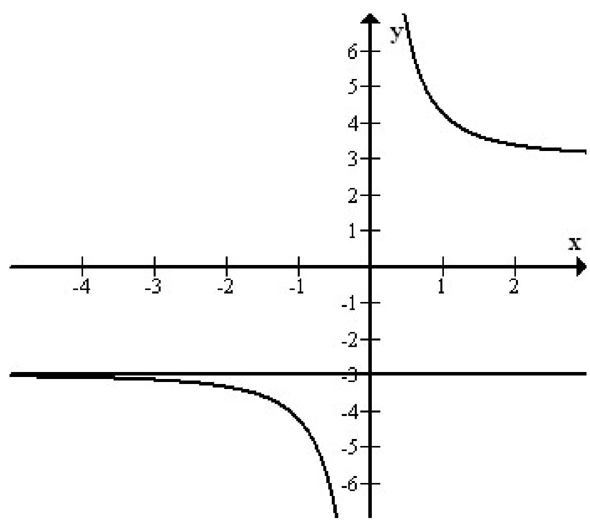
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=h$ ¿Qué es del gráfico de $y=f(x)$ la recta $y=h$.

  Ejemplo: Sea $f(x)=\dfrac{3\sqrt{x^2+1}}{x}$. Aquí $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=3$. Un gráfico de $y=f(x)$ y la recta $y=3$ es:



Luego, la recta $y = 3$ es una asíntota horizontal del gráfico de la función $y = f(x)$.
Dar otro ejemplo e ilustrar gráficamente.

- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = h$ ¿Qué es del gráfico de $y = f(x)$ la recta $y = h$.
Ejemplo. En la función precedente se tiene que $\lim\limits_{x \to -\infty} = -3$ (verificarlo!!). Un gráfico de $y = f(x)$ y la recta $y = -3$ es:



Luego, la recta $y = -3$ es una asíntota horizontal del gráfico de la función $y = f(x)$.
Dar otro ejemplo e ilustrar gráficamente.

- Si $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = h$ ¿Qué es del gráfico de $y = f(x)$ la recta $y = h$. Dar un ejemplo e ilustrar gráficamente.

b) *Asíntotas Verticales*:

- Si $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ o $-\infty$ ¿Qué es del gráfico de $y = f(x)$ la recta $x = a$. Ilustrar gráficamente y dar un ejemplo particular.
- Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ o $-\infty$ ¿Qué es del gráfico de $y = f(x)$ la recta $x = a$. Ilustrar gráficamente y dar un ejemplo particular.
- Si $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ o $-\infty$ ¿Qué es del gráfico de $y = f(x)$ la recta $c = a$. Ilustrar gráficamente y dar un ejemplo particular.

c) *Asíntotas Oblicuas*: Sean $m = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - mx)$. ¿Qué es del gráfico de $y = f(x)$ la recta $y = mx + n$. Ilustrar gráficamente y dar un ejemplo particular.

7) Sea R el rectángulo que une los puntos medios de los lados del cuadrilátero Q, cuyos vértices son $(\pm x, 0)$ y $(0, \pm 1)$. Calcular $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{\text{perimetro de } R}{\text{perimetro de } Q}$