## 14.5 Guía 5: Fórmulas de derivación

1) Usando la definición de derivada, encontrar la derivada de la función dada en el punto indicado:

| | | |
|---|---|---|
| (a) $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ | en $x = 8$. | Sol. $f'(4) = \frac{1}{6}$ |
| (b) $y = g(u) = \frac{5+3u}{1-3u}$ | en $u$. | Sol. $g'(u) = \frac{18}{(1-3u)^2}$ |
| (c) $p = h(q) = Aq^2 + Bq + C$ | en $q$. | Sol. $h'(q) = 2Aq + B$ |
| (d) $y = f(x) = xe^{2x}$ | en $x$. | Sol. $y' = e^{2x}(2x+1)$ |
| (e) $z = g(v) = v\sin v$ | en $v$. | Sol. $g'(v) = v\cos v + \sin v$ |

2) Comprobar cada una de las siguientes derivadas.

(a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}$.

(b) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}} - a^3\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.

(c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$.

(d) $\frac{d}{dt}(2-3t^2) = -18t\,(2-3t^2)^2$.

(e) $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{4-9x} = -\frac{3}{(4-9x)^{\frac{2}{3}}}$.

(f) $\frac{d}{dt}\left(t\sqrt{a^2+t^2}\right) = \frac{a^2+2t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}$.

(g) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right) = \frac{4a^2x}{(a^2-x^2)^2}$.

(h) $\frac{d}{d\theta}\left(\theta^2\sqrt{3-4\theta}\right) = \frac{6\theta-10\theta^2}{\sqrt{3-4\theta}}$.

(i) $\frac{d}{dx}\left(\ln(ax^2+b)\right) = \frac{2ax}{ax^2+b}$.

(j) $\frac{d}{dx}\left(\ln(ax+b)^2\right) = \frac{2a}{ax+b}$.

(k) $\frac{d}{dx}\left(\ln x^3\right) = \frac{3}{x}$.

(l) $\frac{d}{dx}\left(\ln^3 x\right) = \frac{3\ln^2 x}{x}$.

(m) $\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \frac{2}{x(1+x^2)}$.

(n) $\frac{d}{dx}\left(x^2\ln x^2\right) = 2x(1+2\ln x)$.

(o) $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right) = 2xe^{x^2}$.

(p) $\frac{d}{dy}\left(b^{2y}\right) = 2b^{2y}\ln b$.

(q) $\frac{d}{dx}\ln\left(x^2e^x\right) = \frac{2}{x} + 1$.

(r) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.

(s) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\ln t^2}{t^2}\right) = \frac{2-4\ln t}{t^3}$.

(t) $\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{x^{\sqrt{x}}(2+lnx)}{2\sqrt{x}}$.

(u) $\frac{d}{dx}(3\cos 2x) = -6\sin 2x$.

(b) $\frac{d}{dv}\left(2\cot\frac{v}{2}\right) = -\csc^2\frac{v}{2}$.

(v) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin^2 t\right) = \sin t\cos t$.

(w) $\frac{d}{d\theta}\left(\sqrt[3]{\tan 3\theta}\right) = \frac{\sec^2 3\theta}{(\tan 3\theta)^{\frac{2}{3}}}$.

(x) $\frac{d}{d\theta}(\tan\theta - \theta) = \tan^2\theta$.

(y) $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) = \frac{\theta\cos\theta - \sin\theta}{\theta^2}$.

(x) $\frac{d}{dx}(\sin^n(nx)) = n^2\sin^{n-1}(nx)\cos(nx)$.

(aa) $\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$. Usar $|x| = \sqrt{x^2}$

3) Encontrar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

a) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

b) $u = \cos(\cos(\cos x))$

c) $y = \sin^2 x + \sec^2 x + \cos^2 x - \tan^2 x$ $(*)$

$(*)$ si mira con cuidado esta función, puede encontrar su derivada fácilmente.

4) Suponer que la siguiente tabla entrega los valores, en los puntos indicados, de $f$, $g$, $f'$ y $g'$, donde $f$ y $g$ son dos funciones derivables en $\mathbb{R}$.

| $x$ | $f(x)$ | $g(x)$ | $f'(x)$ | $g'(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| 4 | 4 | 5 | 1 | 2 |
| 5 | 5 | 1 | 2 | 3 |

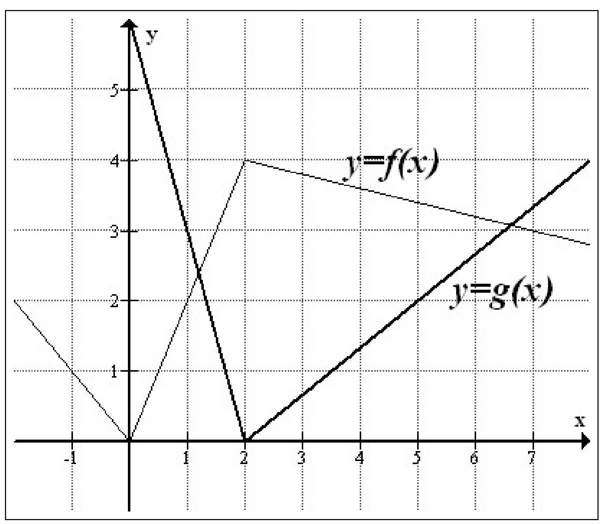
a) Calcular la ecuación de la recta tangente al gráfico de $y = g(x)$ en su punto de abscisa $x = 3$.

b) Calcular la ecuación de la recta normal al gráfico de $y = f(x)$ en su punto de abscisa $x = 2$.

c) Calcular de ser posible:

a) $(f+g)'(1)$ b) $(f-g)'(2)$ c) $(f \cdot g)'(3)$ d) $(\frac{f}{g})'(4)$ e) $(f+4)'(5)$
f) $(f \circ g)'(1)$ g) $(g \circ f)'(2)$ h) $(f \circ f)'(3)$ i) $(g \circ g)'(4)$ j) $(g \circ f \circ g)'(5)$

5) Sean $y = f(x)$ e $y = g(x)$ dos funciones cuyos gráficos son:




Gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$

Calcular cada una de las siguientes derivadas. Si alguna no existe, explicar la razón de su no existencia.

a) $(f+g)'(1)$ b) $(f-g)'(2)$ c) $(f \cdot g)'(3)$ d) $(\frac{f}{g})'(4)$ e) $(f+4)'(5)$
f) $(f \circ g)'(1)$ g) $(g \circ f)'(1)$ h) $(f \circ f)'(1)$ i) $(g \circ g)'(4)$ j) $(g \circ f \circ g)'(5)$

6) Encontrar la o las rectas tangentes a la curva $y = x^2 + x$ que pasan por el punto $(2, -3)$.

7) Dada la función polinomial de grado 3:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

encontrar $a$, $b$, $c$ y $d$; de modo que se satisfagan las siguientes condiciones:

- La curva pasa por $(0, 0)$.
- En $(0, 0)$ la recta tangente forma un ángulo de 60 grados con la parte positiva del eje $X$.
- En $x = 1$ y $x = -1$, la curva es paralela al eje $X$.

8) Determine una función polinomial de grado 6 de modo que en los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 1)$ la tangente sea horizontal y que además pase por el origen.

9) Dada una parábola $y = ax^2 + bx + c$.

   a) ¿Desde qué puntos se puede trazar dos tangentes a la curva?
   b) ¿Desde qué puntos puede trazarse solamente una tangente a la curva?
   c) ¿Desde qué puntos no se puede trazar ninguna tangente a la curva?

10) Tasa instantánea de cambio del Costo = Costo marginal.

Sea $C = C(x)$ la función de costo (total) de una empresa al producir $x$ unidades de cierto artículo. La *tasa promedio de cambio del costo* de pasar de producir $x_1$ unidades a producir $x_2 = x_1 + \Delta x$ unidades es, como es de suponer:

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - c(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

y la *tasa instantánea de cambio del costo con respecto a la cantidad de unidades producidas*, que recibe en el ámbito de la economía el nombre de *costo marginal*, es

$$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

Observar que aproximadamente $C'(x_1) = C(x_1 + 1) - C(x_1)$. Por esta razón el costo marginal se interpreta como el costo de producir una unidad más (sobre $x_1$).

Suponer que el costo (en pesos) de producir $x$ poleras para una empresa, viene dado por $C = C(x) = 2000 + 3x + 0.01x^2 + 0.0002x^2$.

- Calcular la función de costo marginal.
- Encontrar e interpretar $C'(200)$.
- Comparar $C'(200)$ con el costo adicional al producir la 201ava polera.

11) Considerar la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 12 & \text{si } x < 0. \\ 2 - x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2. \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

a) Calcular, en caso que existan, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, y $f'(-1)$.

b) Encontrar la función derivada $f'(x)$.

c) Graficar en un mismo sistema de coordenadas las funciones $f$ y $f'$.

12) a) Encontrar el valor de la suma $1 + x + x^2 + . \cdots . + x^n$.

b) Usando el resultado precedente, encontrar el valor de $1+2x+3x^2+. \cdots .+ nx^{n-1}$.

13) Considerar la función $y = f(x)$ cuyo gráfico es:

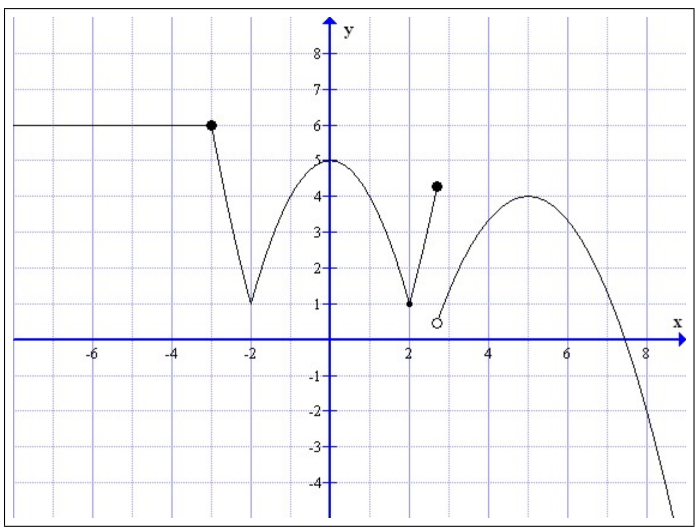



Gráfico de $y = f(x)$

Indicar los puntos del dominio de $f$ donde esta función NO es derivable. Justificar su respuesta.

14) Establecer el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias. Justificar cada una de sus respuestas.

a) Si $f(x)$ es continua en $x = a$, entonces $f(x)$ es derivable en $x = a$.

b) Si $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$.

c) Si $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y $f(x_0) = x_0$, entonces $f'(x_0) = 1$.

d) Si $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en todo $\mathbb{R}$, excepto en $x = a$,entonces la recta tangente en $x = a$ es vertical.

e) Si $y = xe^{-x}$, entonces $xy' = (1-x)y$.

f) $(f(x^2))' = 2xf'(x)$

g) Si $y = f(x)$ es una función que satisface $|f(x)| \leqslant x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $f'(0) = 0$.

h) La tasa instantánea de cambio del área de un circulo con respecto a su radio es su perímetro.

i) La tasa instantánea de cambio del volumen de una esfera con respecto a su radio es su área.

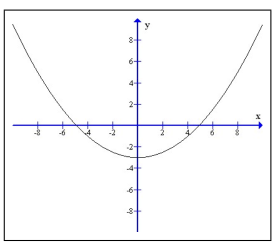
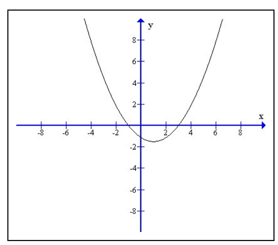
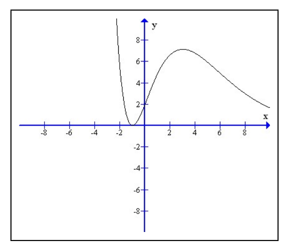
j) Si $f$ es una función derivable en $x = a$, entonces $f'(a) = \lim\limits_{h \to a} \dfrac{f(h) - f(a)}{h - a}$.

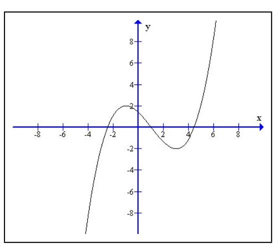
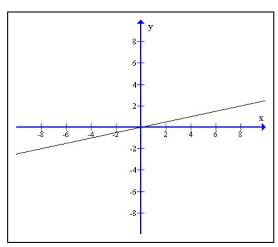
k) Si $f$ es una función derivable en $x = a$, entonces $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a) - f(a-h)}{h}$.

l) $\left[\left(f(x^3)\right)^3\right]' = 3\left[f(x^3)\right]^2 \cdot f'(x^3)$

m) Si $f$, $g$ y $h$ son funciones derivables, entonces $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

15) A continuación se entregan 6 funciones (sin ningún orden especial) los gráficos de 3 funciones y sus correspondientes derivadas. *Aparear* cada función con su respectiva derivada.

(1) 
(2) 
(3) 

(4) 
(5) 
(6)