Sesión 7

Introducción a Ecuaciones Diferenciales

Temas

- ✓ Ecuaciones diferenciales que se resuelven directamente aplicando integración.
- ✓ Problemas con condiciones iniciales y soluciones particulares.
- ✓ Problemas aplicados.

Capacidades

- ▷ Resolver ciertos tipos de ecuaciones diferenciales.
- ▷ Determinar soluciones particulares de una ecuación diferencial, dadas condiciones iniciales.
- ▷ Plantear y resolver ciertos problemas aplicados que se modelan con la ecuaciones diferenciales estudiadas.

7.1 Introducción

J. D'Alembert
Francés (1717-1783)

La integral indefinida de una función $g(x)$, corresponde a las soluciones de la ecuación $\frac{dy}{dx} = g(x)$. Estas ecuaciones constituyen la clase más sencilla de las llamadas *ecuaciones diferenciales.*
En muchas situaciones aplicadas de diversos campos, surgen problemas que se pueden plantear mediante ecuaciones diferenciales. La resolución de tales situaciones involucra resolver una ecuación diferencial y determinar una solución particular de dicha ecuación.

En esta sesión se tratará ciertas clases de ecuaciones diferenciales que se resuelven aplicando la integral indefinida, y la resolución de problemas provenientes de diversos ámbitos, que se modelan mediante ecuaciones diferenciales de los tipos considerados.

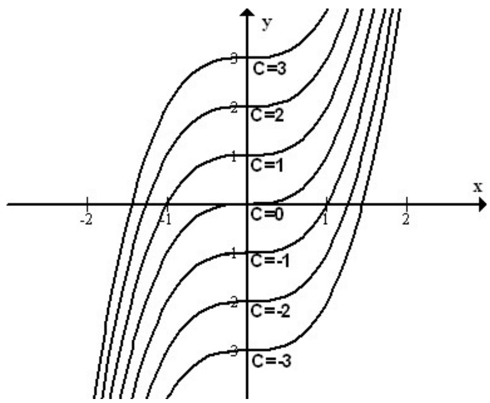
7.2 Ejemplo introductorio

Determinar la función $y = y(x)$ *cuya derivada es* $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ $(*)$, *tal que su gráfica pase por el punto* $(1, 3)$.

Solución:

1) La familia de funciones que cumplen $(*)$ es: $y = y(x) = x^3 + C$

2) La siguiente figura presenta las gráficas de diversas funciones de la familia precedente, para diferentes valores de C:



3) Para determinar la función $y = y(x)$, que pasa por el punto $(1, 3)$, se sustituye $x = 1$, $y = 3$ en la familia encontrada, con lo cual se obtiene un valor específico de C:

$$y(1) = 3 \Longrightarrow 3 = 1^3 + C \Longrightarrow C = 2$$

Luego, la función buscada es: $y = x^3 + 2$.

Nota 7.1 La ecuación $(*)$ del ejemplo introductorio recibe el nombre de *ecuación diferencial*, la familia encontrada en (2) recibe el nombre de solución general de $(*)$ y la función encontrada en (3), *solución particular* de $(*)$. A continuación se formalizan y ejemplifican estos conceptos

7.3 Definición de Ecuación Diferencial

Una ecuación que contiene una función y al menos una de sus derivadas, o sólo derivadas, se llama *Ecuación Diferencial*.

Ejemplos de ecuaciones diferenciales son:

$$\frac{dy}{dx} = x(3 - x) \qquad y' = \frac{2x^2}{3y^3} \qquad \frac{dP}{dt} = k\,P(10 - P) \qquad y'' - 2y' + 5y = 0$$

Nota 7.2 Una función $y = y(x)$ es una solución de una ecuación diferencial, si la función satisface la ecuación.

Ejemplo 7.1 *Comprobar que* $y = e^x - x$ *es una solución de* $\frac{dy}{dx} - y = x - 1$.

Solución:

$y = e^x - x \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = e^x - 1$

Sustituir y y y': $\quad \dfrac{dy}{dx} - y = (e^x - 1) - (e^x - x) = x - 1$

Luego, $y = e^x - x$ es una solución de la ecuación diferencial dada.

Ejercicio 7.1 *Decidir si cada función dada, es una solución de* $\quad y'' - 2y' + 5y = 0$.

a) $y = e^x \cos 2x$ b) $y = 7\,e^x \cos 2x + 3$ c) $y = 3e^x \cos 2x - e^x \sin 2x$

Nota 7.3 *Resolver* una ecuación diferencial consiste en determinar todas las funciones que satisfacen la ecuación, llamada *solución general* de la ecuación.

Nota 7.4 En esta sesión se trabajará con ecuaciones diferenciales (ED) de los tipos:

a) ED de la forma: $\frac{dy}{dx} = g(x)$.
Esta ecuación es equivalentes a $\; dy = g(x)\,dx$. Integrando ambos lados, se obtiene la solución general que se escribe: $\; y = y(x) = \int g(x)\,dx + C$.

b) ED de la forma: $\frac{d^n y}{dx^n} = g(x)$.
Para resolver estas ecuaciones se requiere integrar n veces de manera sucesiva, obteniendo n constantes de integración, en la solución general.

c) ED de la forma: $\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$.
Estas ecuaciones se denominan ecuaciones diferenciales separables. Para resolverlas se expresan en la forma: $\; \frac{1}{h(y)}\,dy = g(x)\,dx$, y luego se aplica integración a ambos lados: $\; \int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx$.

Nota 7.5 Los tipos de problemas que serán trabajados son: hallar la solución general de una ED, resolver problemas con condiciones iniciales y resolver problemas aplicados que se modelan con ED.

7.4 Resolviendo ecuaciones diferenciales

Ejemplo 7.2 *Resolver la ecuación diferencial* $\quad y' = x(3 - x)$.

Solución:

$$\begin{aligned} y' &= 3x - x^2 \Longrightarrow y = \int (3x - x^2)\,dx \\ y &= \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C \qquad \leftarrow \text{ solución general} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.3 *Resolver la ecuación diferencial* $y'' = 6\cos 2x$.

Solución:
$$\begin{aligned} y'' &= 6\cos 2x \\ y' &= 3\sin 2x + C_1 \\ y &= -\tfrac{3}{2}\cos 2x + C_1 x + C_2 \qquad \longleftarrow \text{ solución general} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.4 *Resolver la ecuación diferencial* $(x^2+4)\dfrac{dy}{dx} = x\,y$.

Solución:
$$\begin{aligned} (x^2+4)\frac{dy}{dx} &= xy \Longrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2+4}\,dx \\ \int \frac{dy}{y} &= \int \frac{x}{x^2+4}\,dx \Longrightarrow \ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C \\ |y| &= e^{\ln\sqrt{x^2+4}}e^{C} \Longrightarrow y = \underbrace{\pm e^{C}}_{K}\sqrt{x^2+4} \\ y &= K\sqrt{x^2+4} \qquad \longleftarrow \text{ solución general} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.5 *Resolver la ecuación diferencial* $\dfrac{dP}{dt} = 3P(10-P)$.

Solución:
$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= 3P(10-P) \\ \frac{dP}{P(10-P)} &= 3\,dt \\ \int \frac{dP}{P(10-P)}dP &= \int 3\,dt \Longrightarrow \frac{1}{10}\ln\left|\frac{P}{10-P}\right| = 3t + C \\ \left|\frac{P}{10-P}\right| &= e^{10C}\,e^{30t} \Longrightarrow \frac{P}{10-P} = \pm e^{10C}\,e^{30t} \\ \frac{P}{10-P} &= K\,e^{30t} \\ P &= \frac{10K\,e^{30t}}{1+K\,e^{30t}} \qquad \longleftarrow \text{ solución general} \end{aligned}$$

Ejercicio 7.2 *Resolver cada ED* (a) $y' = (x+4)\ln x$ (b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+2y}{2\sqrt{x+1}}$

7.4.1 Problemas con condiciones iniciales

En muchas aplicaciones de integración, se da suficiente información para determinar una *solución particular*. Para determinarla se requiere conocer una o más condiciones iniciales. Estos problemas se denominan *problemas con condiciones iniciales*.

Un tipo de problema muy usual es: hallar la solución particular $y = y(x)$ de una ecuación diferencial tal que $y(x_0) = x_0$. Esta condición equivale a determinar la *curva* que satisface la ecuación diferencial y que pasa por el punto (x_0, y_0).

Ejemplo 7.6 *Hallar la función* $y = y(x)$ *tal que* $y' = x(3 - x)$*, donde* $y(6) = 1$*.*
Solución:

- *Solución general* de la ecuación $y' = x(3 - x)$: $\quad y = \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + C$
- Valores iniciales: $\left.\begin{array}{l} x = 6 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 1 = \dfrac{3 \cdot 36}{2} - \dfrac{6^3}{3} + C \Longrightarrow C = 19$
- Luego, la *solución particular* pedida es: $\quad y = \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + 19.$

Ejemplo 7.7 *Hallar la solución particular de* $y' = 2y$ *tal que* $y(\ln 3) = 5$*.*
Solución:

- *Solución general* de la ecuación $y' = 2y$:

$$y' = 2y \implies \frac{dy}{y} = 2dx \Longrightarrow y = K\, e^{2x}$$

- Valores iniciales: $\left.\begin{array}{l} x = \ln 3 \\ y = 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow 5 = K\, e^{2\ln 3} \Longrightarrow 5 = K \cdot 9 \Longrightarrow K = \dfrac{5}{9}$
- Luego, la *solución particular* pedida es: $\quad y = \dfrac{5}{9}\, e^{2x}.$

Ejemplo 7.8 *Hallar la solución particular de la ecuación diferencial* $y'' = 4x + 3$ *para la cual* $y = 2$ *e* $y' = -3$ *cuando* $x = 1$*.*
Solución:

- $y'' = 4x + 3 \Longrightarrow y' = 2x^2 + 3x + C_1 \Longrightarrow y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C_1 x + C_2$
- Valores iniciales:
  $\left.\begin{array}{l} y' = 2x^2 + 3x + C_1 \\ y' = -3, \text{ cuando } x = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow -3 = 2(1^2) + 3(1) + C_1 \Longrightarrow C_1 = -8$

  Luego: $\quad y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8x + C_2$

  $\left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8x + C_2 \\ y = 2, \text{ cuando } x = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 = \frac{2}{3}(1^3) + \frac{3}{2}(1^2) - 8(1) + C_2 \Longrightarrow C_2 = \frac{47}{6}$
- Luego, la solución particular pedida es:

$$y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8x + \frac{47}{6}$$

7.5 Algunas aplicaciones

Conceptos marginales

1) El *costo marginal* $C'(q) = \dfrac{dC}{dq}$ es la razón de cambio del costo total C con respecto a la cantidad q. Se interpreta como el costo aproximado de una unidad adicional producida.
2) El *ingreso marginal* $R'(q) = \dfrac{dR}{dq}$ es la razón de cambio del ingreso total recibido con respecto a la cantidad q.

Movimiento rectilíneo

La ecuación $s = s(t)$, donde s es la distancia en el instante t de un cuerpo respecto de un punto fijo en su trayectoria en línea recta, define completamente el movimiento del cuerpo. Su velocidad v y su aceleración a en el instante t vienen dadas por las ecuaciones diferenciales:

$$v = \frac{ds}{dt} = s'(t) \qquad\qquad a = a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds} = s''(t)$$

Modelos de crecimiento/decrecimiento

1) *Modelo de crecimiento exponencial*
   Sea $P = P(t)$ el número de individuos de una determinada población en el tiempo t. Si esta población crece a una tasa que es proporcional al tamaño de dicha población, entonces la ED que modela esta situación es:
   $$\frac{dP}{dt} = kP$$
2) *Modelo de crecimiento logístico*
   Sea $P = P(t)$ el número de individuos de una determinada población en el tiempo t. Si esta población crece a una tasa que es proporcional al producto del tamaño de dicha población con la diferencia entre el tamaño máximo M de individuos posible de la población y el tamaño de dicha población, entonces la ED que modela esta situación es:
   $$\frac{dP}{dt} = kP(M - P)$$

Ley de enfriamiento de Newton. Este modelo permite conocer como evoluciona la temperatura de un objeto.

Principio: "La razón de cambio de la temperatura $T = T(t)$ de un cuerpo con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura A del medio ambiente"

Luego, si $T = T(t)$ representa la temperatura de un cuerpo en el instante t, entonces la ED que modela esta situación es:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - A)$$

7.6 Problemas de aplicación

Conceptos marginales.

Un fabricante estima que la función de utilidad marginal es $U'(q) = \frac{0.4q\sqrt{q}+100}{\sqrt{q}}$ pesos, cuando el nivel de producción es de q unidades. Si la utilidad del fabricante es \$520 cuando el nivel de producción es de 25 unidades. Hallar la función de utilidad $U(q)$, y la utilidad del fabricante cuando el nivel de producción es de 100 unidades.

Solución: ED: $\frac{q^2}{5} + 200\sqrt{q} - 605$; Respuesta: \$ 3395

Movimiento rectilíneo.

Se echa a rodar una pelota sobre un césped horizontal con velocidad inicial de 25 pies/seg. Debido al roce, su velocidad decrece a razón de 6 pies/seg^2. Determinar la distancia que recorrerá la pelota hasta detenerse.

Solución: $\frac{dv}{dt} = -6 \Longrightarrow v = -6t + C$. Cuando $t = 0$, $v = 25$, se obtiene $C = 25$, luego $v = -6t + 25$.

Por lo tanto, $s = -3t^2 + 25t + C_2$. Cuando $t = 0$, $s = 0$, se obtiene $C_2 = 0$, luego $s = -3t^2 + 25t$.

Cuando se detiene: $v = 0$, luego la pelota se detiene $t = \frac{25}{6}$ seg después de haber sido lanzada.

Respuesta: En este tiempo, la pelota recorre $s = \frac{625}{12} \approx 52.08$m.

Crecimiento de poblaciones

Supónga que una población experimental de moscas de la fruta aumenta de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Si hay 100 moscas tras el segundo día de experimento y 300 después del cuarto día, ¿cuántas habían en la población original?

Solución: a) ED: $\frac{dP}{dt} = kP$ b) Solución: $P = P(t) = 33e^{0.543t}$
c) Respuesta: Aproximadamente, 33 moscas.

Ley de enfriamiento de Newton

Supóngase que una habitación se mantiene a una temperatura constante de 70° y que un objeto se enfría de 350° a 150° en 45 minutos. ¿Qué tiempo se necesita para enfriar dicho objeto a una temperatura de 80°?

Respuesta: 1 hora 59 minutos 42 segundos.

7.7 Autoevaluación

1) Hallar la solución particular de la ED, que cumple las condiciones iniciales dadas:

   a) ED: $f'(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}$; Condición: $f(0) = 0$.

   b) ED: $y' = \cos\sqrt{x}$; Condición: $f(0) = 3$.

   c) ED: $\sin^2 2x\,dx + \cos^3 3y\,dy = 0$, Condición: $y(\pi/2) = \pi/3$.

   d) ED: $f'(x) = \dfrac{y}{e^x+1}$; Condición: su gráfica pasa por el punto (0, 3).

   e) ED: $y' = e^{x-y}$; Condición: $y(1) = 0$.

2) En todo punto de una cierta curva se tiene que: $y'' = \frac{x}{x-1}$. Hallar la ecuación de la curva, sabiendo que pasa por el punto $(2, 3)$ y que la recta tangente a la curva en este punto es paralela a la recta $3x - y = 12$.

3) En el año 1970 la población de una ciudad era de 2500 y en 1980 de 3350. Suponiendo que la población crece a un ritmo constante proporcional a la población existente en cada momento, estimar la población para el año 2000.

Respuestas:

1a) $y = \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{3} - \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$ 1b) $y = 2\cos\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + 1$

1c) $\frac{x}{2} - \frac{\sin(4x)}{8} + \frac{\cos(3y)\sin(6y)}{18} + \frac{2\sin(3y)}{9} = \frac{\pi}{4}$ 1d) $y = x - \ln(e^x+1) + 2\ln 2$

1e) $y = \frac{6\,e^x}{e^x+1}$ 2) $y = (x-1)\ln(x-1) + \frac{x^2}{2} + 1$ 3) 6015 habitantes.

7.8 Desafío

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 146^oC. Tres minutos después su temperatura es de 92^oC. Si la rapidez con que la temperatura $T = T(t)$ cambia es proporcional la diferencia entre la temperatura del pastel y la temperatura constante $T_0 = 22^oC$ del medio que lo rodea. ¿Cuánto habrá que esperar para empezar a comérselo, si se estima que una temperatura adecuada para servírselo es de 36^oC?