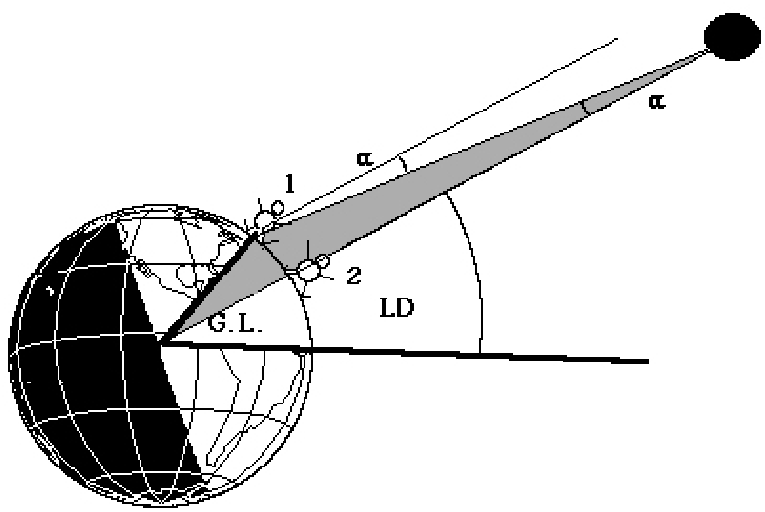
Capítulo 8

Aplicaciones de las funciones trigonométricas

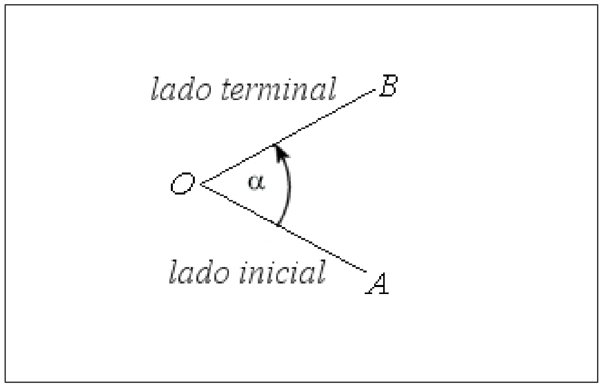


8.1. Ángulos

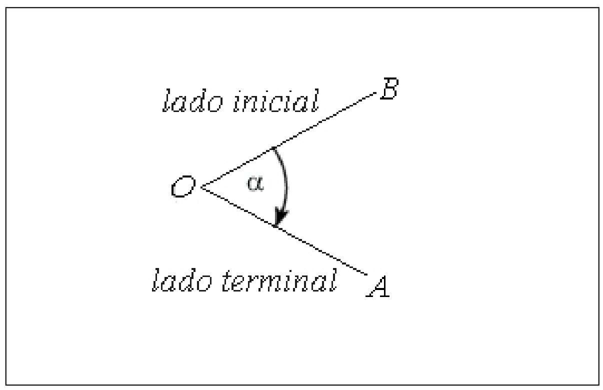
Un ángulo es la figura generada por la rotación de una semirrecta[1] en torno a su extremo, desde una posición inicial hasta una posición terminal. La posición inicial de la semirrecta se llama *lado inicial* del ángulo, la posición final se llama *lado terminal* del ángulo y el punto fijo en la rotación (extremo de la semirrecta) se llama *vértice* del ángulo.

Cuando la rotación del lado inicial es en sentido contrario a las manecillas de un reloj, se dice que el ángulo es *positivo*. Cuando la rotación es en el sentido de las manecillas de un reloj, el ángulo es *negativo*.

[1] Una semirrecta es la parte de una recta situada a un lado de un punto fijo de ella.



Ángulo positivo

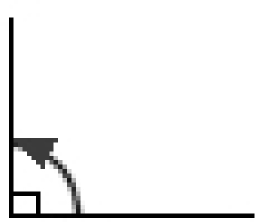


Ángulo negativo

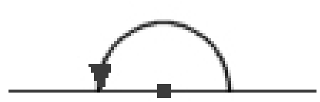
8.2. Medidas de ángulos

Para medir ángulos se usan las unidades de grados (sexagesimales) y los radianes.

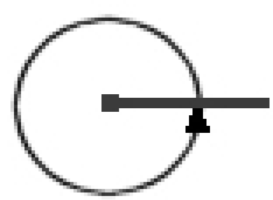
8.2.1. Grados sexagesimales



Ángulo recto 90°



Ángulo extendido 180°

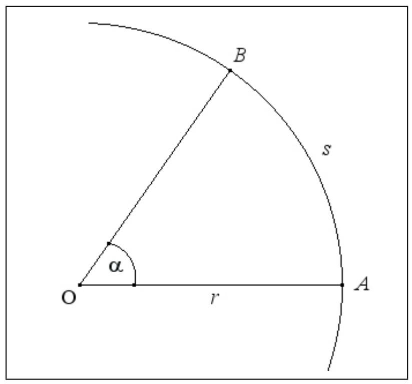


Ángulo completo 360°

El ángulo completo (lado inicial coincide con el lado terminal, y el lado terminal ha rotado una sola vez) mide 360°. De aquí, un ángulo extendido mide 180° y un ángulo recto corresponde a 90°.
Como se sabe, un grado equivale a 60 minutos, lo que se anota: $1° = 60'$ y cada minuto a 60 segundos, lo que se anota: $1' = 60''$

8.2.2. Radianes

La medición de un ángulo en radianes se realiza de la siguiente manera: Sea α un ángulo AOB



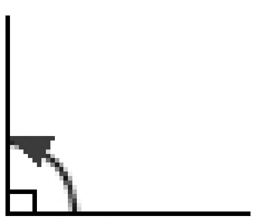
Sea s la longitud del arco subtendido por una circunferencia centrada en O y de radio r, entonces:

$$\text{Medida de } \alpha \text{ (en radianes)} = \frac{s}{r}$$

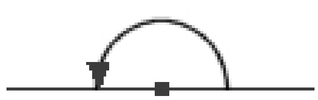
Lo que se anota:

$$\alpha = \frac{s}{r}\, rad$$

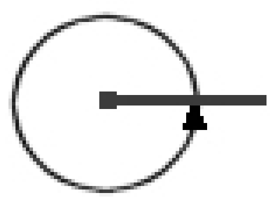
Un radián es el tamaño del ángulo central de una circunferencia que intersecta un arco de la misma longitud del radio de la circunferencia.
Así, el ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}\,rad$, es decir, $90° = \frac{\pi}{2}\,rad = \frac{\pi}{2}$



Ángulo recto $\pi/2$

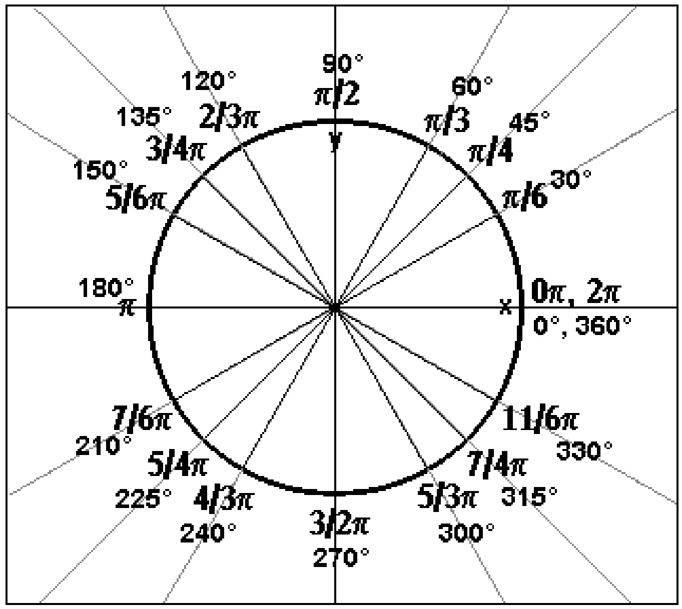


Ángulo extendido π



Ángulo completo 2π

8.2.3. Relación entre las medidas de ángulos en grados (sexagesimales) y radianes.



1. $\dfrac{\textit{Angulo en Grados}}{180^\circ} = \dfrac{\textit{Angulo en Radianes}}{\pi}$.

2. 1 radian $= \dfrac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}296^\circ = 57^\circ 17' 45''$.

3. 1 grado $= \dfrac{\pi}{180^\circ}$ rad $\approx 0{,}017453$ radianes.

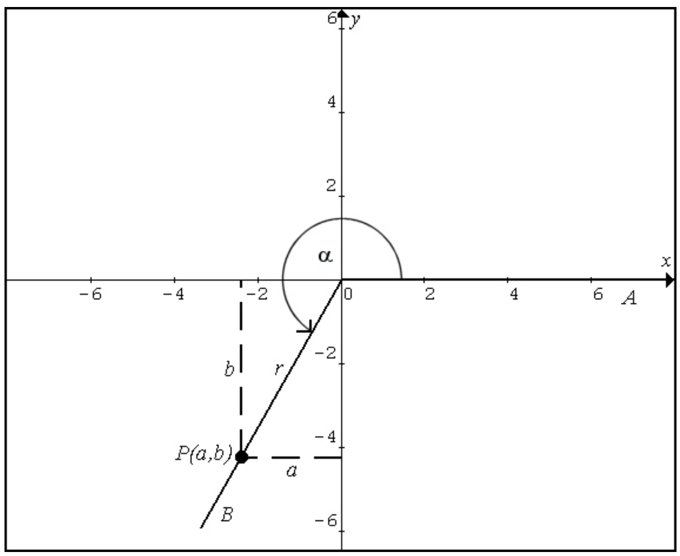
En base a lo precedente se pueden establecer reglas para transformar ángulos medidos en grados a radianes y viceversa:

- $\alpha^\circ = \left(\alpha \cdot \dfrac{\pi}{180}\right) rad$
- $\alpha\, rad = \left(\alpha \cdot \dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$

Observación: En general cuando un ángulo está medido en radianes, esta unidad no se indica. Por ejemplo, $3\, rad = 2$, $\pi\, rad = \pi$, etc.

8.3. Funciones trigonométricas definidas para ángulos

Sea α la medida de un ángulo AOB (OA lado inicial, OB lado terminal). Se ubica este ángulo, en su posición normal, en un sistema de coordenadas, esto quiere decir que su vértice se ubica en el origen del sistema de coordenadas y su lado inicial sobre el eje X. Sea $P = (a, b)$ un punto en el lado terminal (OB) y $r = \sqrt{a^2 + b^2}$:



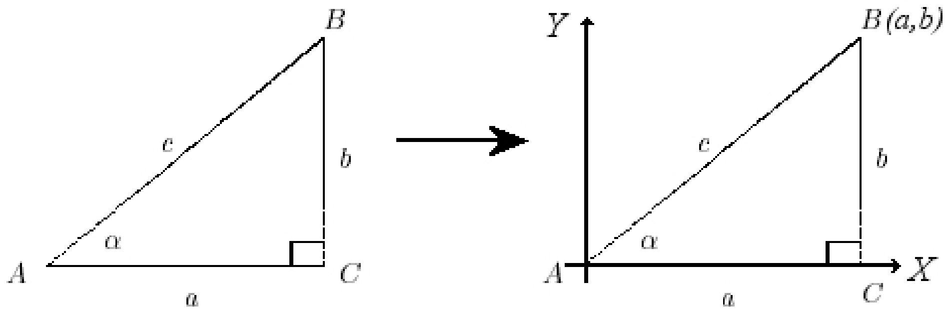
Entonces, las funciones trigonométricas para el ángulo α se definen de la siguiente manera:

$$\textbf{sin}\ \alpha = \frac{\textit{ordenada de } P}{OP} = \frac{b}{r} \qquad \textbf{csc}\ \alpha = \frac{OP}{\textit{ordenada de } P} = \frac{r}{b}$$

$$\textbf{cos}\ \alpha = \frac{\textit{abscisa de } P}{OP} = \frac{a}{r} \qquad \textbf{csc}\ \alpha = \frac{OP}{\textit{abscisa de } P} = \frac{r}{a}$$

$$\textbf{tan}\ \alpha = \frac{\textit{ordenada de } P}{\textit{abscisa de } P} = \frac{b}{a} \qquad \textbf{ctg}\ \alpha = \frac{\textit{abscisa de } P}{\textit{ordenada de } P} = \frac{a}{b}$$

8.4. Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo.

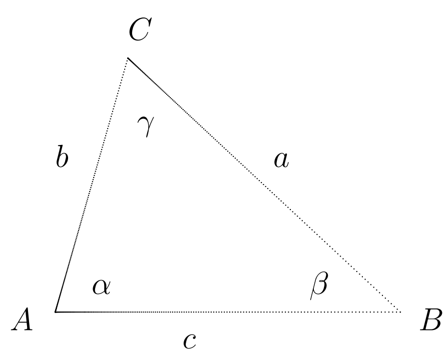


$$\textbf{sin}\ \alpha = \frac{b}{c} = \frac{cateto\ \ opuesto}{hipotenusa} \qquad \textbf{csc}\ \alpha = \frac{c}{b} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ opuesto}$$

$$\textbf{cos}\ \alpha = \frac{a}{c} = \frac{cateto\ \ adyacente}{hipotenusa} \qquad \textbf{csc}\ \alpha = \frac{r}{a} = \frac{hipotenusa}{cateto\ \ adyacente}$$

$$\textbf{tan}\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \qquad \textbf{ctg}\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

8.5. Resolución de un triángulo



Como se sabe un triángulo posee seis elementos: tres lados y tres ángulos (usualmente denotados por a, b, c los lados y α, β, γ los ángulos). En los problemas clásicos de aplicación de trigonometría aparece un triángulo del cual se conocen algunos de sus elementos (a lo menos tres, entre los cuales debe haber un lado) y se deben encontrar algunos (o todos) de los restantes. Este proceso se denomina *resolver el triángulo*. Las diferentes combinaciones de datos conocidos son cuatro:

1. **Caso I**: un lado y dos ángulos.

2. **Caso II**: dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

3. **Caso III**: dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

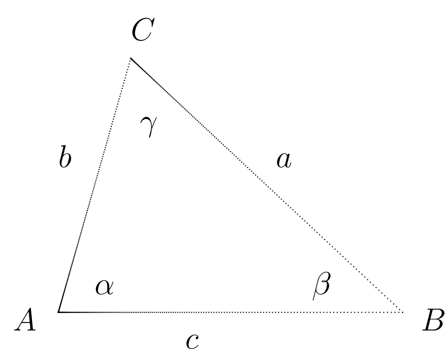
4. **Caso IV**: tres lados.

Para resolver un triángulo arbitrario, se usan los teoremas enunciados en la siguientes sección. En la sección de **Ejemplos**, se presenta un ejercicio resuelto para cada uno de estos casos.

Nota: Al resolver un triángulo rectángulo, la situación es más simple, pues ya se conoce un ángulo (el ángulo recto). En este caso se usan las relaciones de la sección (8.4).

8.6. Relaciones en un triángulo arbitrario.

Sea el $\triangle ABC$ cualquiera, de ángulos α, β, γ y lados a, b, c; ver figura.



Entonces:

8.6.1. Teorema de los senos

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Observación:
El Teorema de los senos, en general, se utiliza al resolver un triángulo, del cual se conocen:

- Dos lados y uno de los ángulos opuestos a uno de ellos.

- Dos ángulos y un lado.

8.6.2. Teorema de los cosenos

$$\begin{aligned} 1)\quad a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ 2)\quad b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ 3)\quad c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

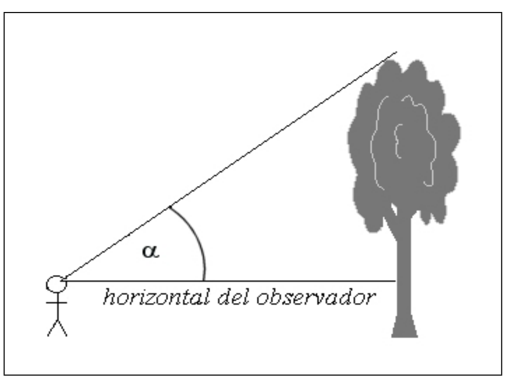
Observación:
El Teorema de los senos, en general, se utiliza al resolver un triángulo, del cual se conocen:

- Los tres lados.
- Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

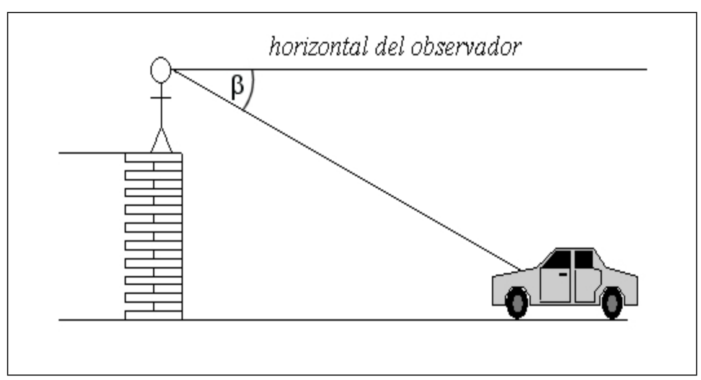
8.7. Algunos términos usados en problemas de aplicación

8.7.1. Ángulos de elevación y depresión

Si un observador mira un objeto que se encuentra sobre su horizontal, el ángulo que forma la horizontal con la visual del objeto se llama *ángulo de elevación* del objeto. Cuando el objeto se encuentra por debajo de la horizontal, el ángulo recibe el nombre de *ángulo de depresión*.



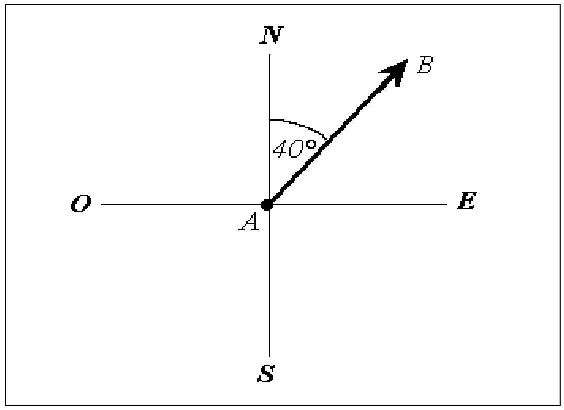
α ángulo de elevación



β ángulo de depresión

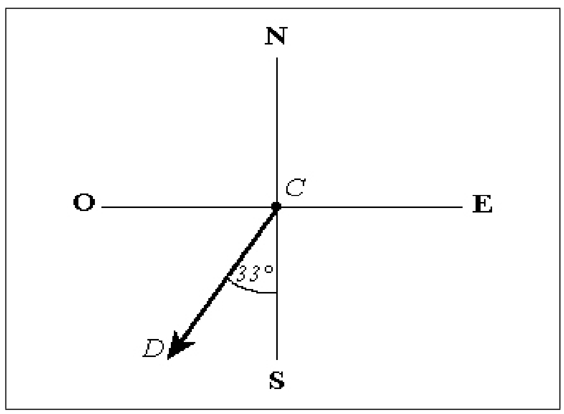
8.7.2. Dirección de un punto con respecto a una posición

Se llama *dirección* de un punto B con respecto a una posición A al ángulo agudo que el segmento PQ forma con la recta **norte-sur** que pasa por la posición A. Por ejemplo, en la siguiente figura la dirección A a B se anota: **N** 40° **E**.

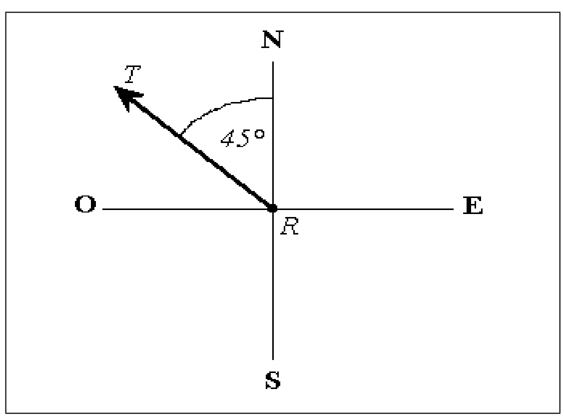


Dirección A a B: **N** 40° **E**

Otros ejemplos de direcciones son:



Dirección C a D: **S** 33° **O**



Dirección R a T: **N** 45° **O**

8.8. Ejemplos

1. Expresar[2]

   a) $\alpha = 125°$ en radianes

   b) $\beta = \dfrac{\pi}{5}$ en grados

   c) el ángulo $\gamma = 2$ en grados, minutos y segundos

   d) en grados, el ángulo $\delta = 18°\ 34'\ 22''$

   Solución:

   a) $\alpha = 125° = 125° \cdot \dfrac{\pi}{180°} = \dfrac{25\pi}{36} \approx 2{,}181661564$

   b) $\beta = \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{\pi}{5} \cdot \dfrac{180°}{\pi} = 36°$

   c) Para este caso se procede de la siguiente manera:

$$
\begin{array}{rcll}
\gamma & = & 2 & \\
& = & 2 \cdot \frac{180°}{\pi} & \\
& \approx & 114{,}59156 & \\
& = & 114° + 0{,}59156° & \\
& = & 114° + 0{,}59156 \cdot 60' & \text{pues } 1° = 60' \\
& = & 114° + 35{,}4936' & \\
& = & 114° + 35' + 0{,}4936' & \\
& = & 114° + 35' + 0{,}4936 \cdot 60'' & \text{pues } 1' = 60'' \\
& = & 114° + 35' + 29{,}616'' & \\
& \approx & 114°\ 35'\ 29{,}6'' &
\end{array}
$$

   d) Como $1' = (\frac{1}{60})°$ y $1'' = (\frac{1}{60})' = (\frac{1}{3600})°$, se tiene:

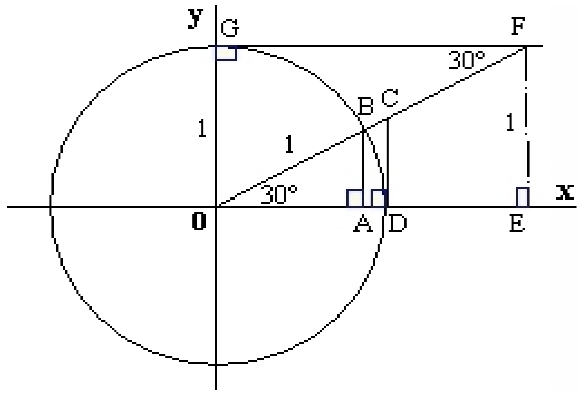
$$
\begin{array}{rcl}
\delta & = & 18° + (\frac{34}{60})° + (\frac{22}{3600})° \\
& \approx & 18° + 0{,}5667° + 0{,}0061° \\
& = & 18{,}5728
\end{array}
$$

2. En un círculo trigonométrico señalar los segmentos cuyas longitudes correspondes a las funciones trigonométricas de un ángulo de 30°.

   Solución:

   En el siguiente círculo trigonométrico

[2] Recordar que cuando un ángulo está expresado en radianes *la unidad* (rad) no se escribe.



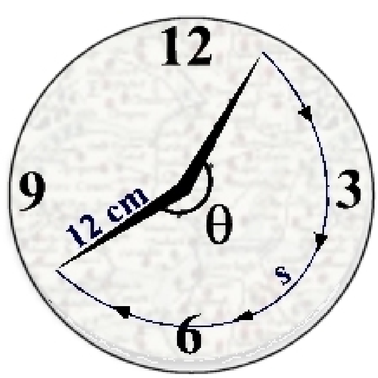
se tiene que:

- $\sin 30° = \dfrac{AB}{OB} = \dfrac{AB}{1} = AB$
- $\cos 30° = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OA}{1} = OA$
- $\tan 30° = \dfrac{AB}{OA} = \dfrac{CD}{OD} = \dfrac{CD}{1} = CD$, pues $\triangle OAB \sim \triangle ODC$
- $\text{ctg } 30° = \dfrac{OA}{AB} = \dfrac{GF}{OG} = \dfrac{GF}{1} = GF$, pues $\triangle OAB \sim \triangle OGF$
- $\sec 30° = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{OC}{OD} = \dfrac{OC}{1} = OC$, pues $\triangle OAB \sim \triangle ODC$
- $\csc 30° = \dfrac{OB}{AB} = \dfrac{OF}{EF} = \dfrac{OF}{1} = OF$, pues $\triangle OAB \sim \triangle OEF$

3. El minutero de un reloj tiene 12 cm de largo. Determinar la distancia que recorre su punta después de 35 minutos.

   Solución:

   Lo primero que se hará es traducir el texto en un dibujo para facilitar la interpretación.



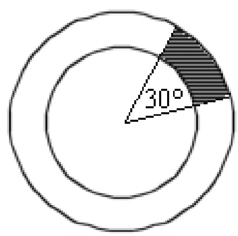
Ahora hay ver cuánto mide el ángulo central, se sabe que el reloj se divide en 60 minutos y que la circunferencia tiene 360º, por tanto dividimos 360º/60 y se tiene que cada minuto recorrido por la manecilla representa 6º, por tanto se multiplica 6º·35 y tenemos 210º que es el ángulo central buscado.

Ahora pasamos los grados en radianes para poder aplicar la relación entre el arco el radio y el ángulo central: 210°= $210 \cdot \frac{180}{\pi} rad = \frac{7\pi}{6} \approx 3{,}6652$

Entonces: $\theta = \frac{s}{r} \quad \Rightarrow \quad s = \theta \cdot r = 3{,}6652 \cdot 12 = 43{,}9824$

Por lo tanto, la distancia que recorre la punta del reloj después de 35 minutos es igual a $43{,}9824cm$.

4. Dos circunferencias concéntricas tienen radios de $5cm$ y $6cm$. Calcular el área del sector achurado en la siguiente figura:



Solución:

El área A de un sector circular con ángulo central α (en radianes) y radio r es $A = A(r, \alpha) = \frac{1}{2}\alpha r^2$.

Es claro que el área del sector achurado es:

$$A\left(6, \frac{\pi}{6}\right) - A\left(5, \frac{\pi}{6}\right) = 3\pi - \frac{22}{12}\pi \approx 2{,}88$$

Por lo tanto, el área buscada es igual a $2{,}88cm^2$.

5. Encontrar el valor de las 6 funciones trigonométricas para un ángulo α, que tiene al punto $(-3, -4)$ en su lado terminal.

Solución:

En este caso $(a, b) = (-3, -4)$ y $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$. Por lo tanto:

$$\textbf{sin}\ \alpha = \frac{b}{r} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5} \qquad \textbf{csc}\ \alpha = \frac{r}{b} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}$$

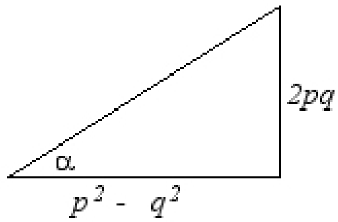
$$\textbf{cos}\ \alpha = \frac{a}{r} = \frac{-3}{5} = -\frac{3}{5} \qquad \textbf{csc}\ \alpha = \frac{r}{a} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$

$$\textbf{tan}\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} \qquad \textbf{ctg}\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

6. Si $\tan\alpha = \dfrac{2pq}{p^2 - q^2}$, determinar el valor de $\cos\alpha$.

   Solución:

   La información entregada, establece que si se coloca en ángulo α en un triángulo rectángulo, se tiene:



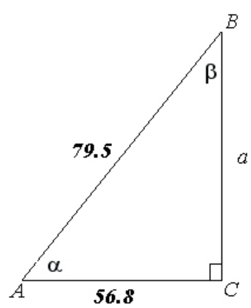
   Para encontrar la función trigonométrica pedida se requiere el valor de la hipotenusa. Si se la designa por x:

$$\begin{aligned} x^2 &= (p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 \\ x^2 &= p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + 4p^2q^2 \\ x^2 &= p^4 + 2p^2q^2 + q^4 \\ x^2 &= (p^2 + q^2)^2 \\ x &= p^2 + q^2 \end{aligned}$$

   Por lo tanto: $\cos\alpha = \dfrac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$.

7. Resolver el triángulo rectángulo ABC (recto en C) si $b = 56{,}8$ y $c = 79{,}5$.

   Solución:



   Cálculo de α:

$$\cos\alpha = \frac{56{,}8}{79{,}5} = 0{,}7145 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos 0{,}7145 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 44{,}4^\circ$$

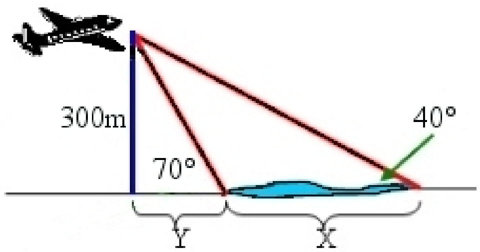
   Cálculo de β:

$$\beta = 90^\circ - 44{,}4^\circ \quad \Rightarrow \quad \beta = 45{,}6^\circ$$

   Cálculo de a: Para calcular a se usa el Teorema de Pitágoras:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{79{,}5^2 - 56{,}8^2} = \sqrt{3094} \quad \Rightarrow \quad a = 55{,}6$$

8. Desde un avión situado a 300 metros sobre el nivel del suelo se hacen observaciones de un lago obteniendo los resultados que se muestran en la siguiente figura



Calcular la longitud del lago.

Solución:

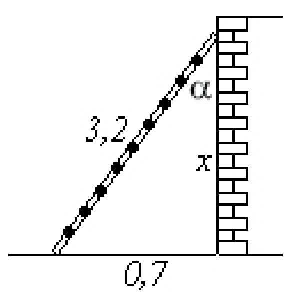
Se debe calcular la longitud indicada por X (longitud del lago) en la figura. Para ello, en primer lugar se calcula la longitud Y, y con este valor se encuentra el valor de X:

- Cálculo de Y: $\tan 70° = \dfrac{300}{Y}$. De donde $Y = 109{,}2\text{m}$
- Cálculo de X: $\tan 40° = \dfrac{300}{Y+X} = \dfrac{300}{109{,}2+X}$. De donde $X = 248{,}3m$.

Por lo tanto la longitud del lago es de $248{,}3m$.

9. Una escalera de $3{,}2m$ de largo se apoya en una pared (vertical) de forma tal que su base está a $0{,}7m$ de ella. ¿A qué altura toca la escalera la pared?, ¿qué ángulo forma la escalera con ella?.

Solución:



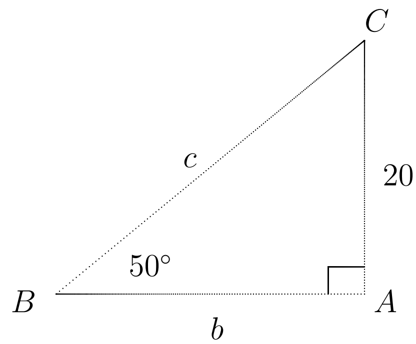
Para encontrar x, se usa el Teorema de Pitágoras: $x = \sqrt{3{,}2^2 - 0{,}7^2} = 3{,}1$

Como $\sin \alpha = \frac{0{,}7}{3{,}2} = 0{,}21875$ se tiene que $\alpha = 12{,}63° = 12°38'8,25''$.

Luego, la escalera toca a la pared a una altura de $3{,}1m$ y ella forma con la pared un ángulo de $12°38'8,25''$.

10. Un árbol quebrado por el viento, forma un triángulo rectángulo con el suelo. ¿Cuál era la altura del árbol, si la parte que ha caído hacia el suelo forma con éste un ángulo de 50° y si la parte del tronco que ha quedado en pie tiene una altura de 20 m ?

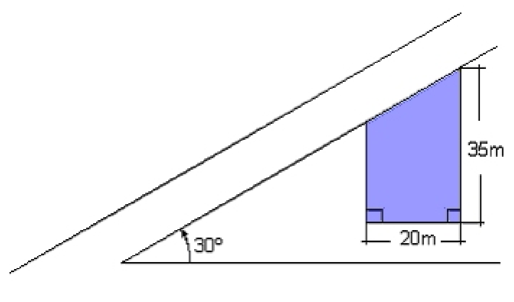
    Solución:



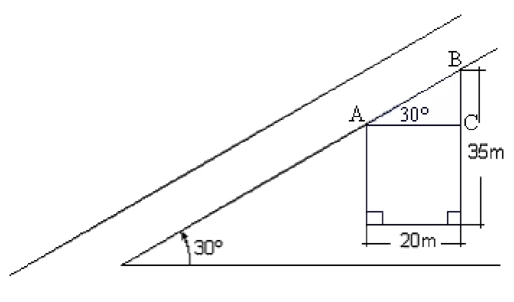
Altura del árbol= AC + BC. Luego hay que calcular BC. En el triángulo rectángulo ABC se tiene que, $\sin 50° = \frac{20}{\mathrm{BC}}$, luego $\mathrm{BC} = \frac{20}{\sin 50°} \approx 26{,}1$

Luego, la altura del árbol era $20 + 26{,}1 = 46{,}1$ m.

11. El frente de un terreno da sobre una diagonal y tiene las dimensiones que se indican en el esquema. Calcular los metros que tiene el frente y el área que ocupa.



Solución:



Se traza el segmento AC (horizontal) y se forma el triángulo rectángulo ABC. En este triángulo:

$\cos 30° = \frac{AC}{AB} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{20}{\cos 30°} = 23{,}1.$

Luego el frente del terrenos es de $23{,}1m$.

Para obtener el área del terreno, se calcula el área del $\triangle ABC$ y el área del rectángulo (terreno menos $\triangle ABC$).

En el triángulo ABC: $BC = 20 \cdot \tan 30° = 11{,}55$.

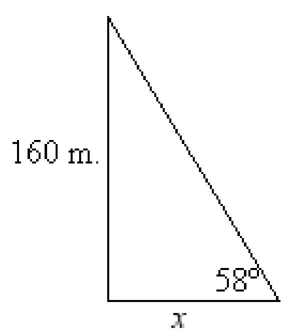
Área del terreno $= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 11{,}55 \; + \; 20 \cdot (35 - 11{,}55) = 115{,}5 \; + \; 469 = 584{,}5$

Luego el área del terreno es $584{,}5m^2$

12. Desde un punto, situado a cierta distancia de una torre de $160m$. de altura, se mide su ángulo de elevación resultando éste de 58º. ¿A qué distancia está el punto de observación?

    Solución:

    Una representación gráfica de la situación es:

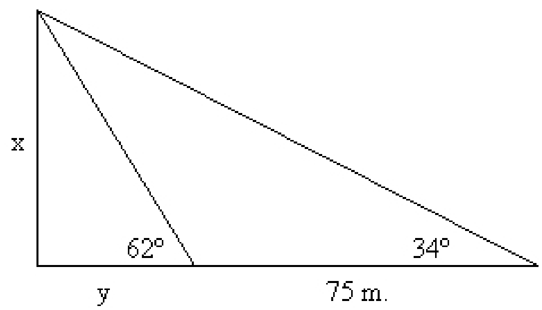
    $$\tan 58° = \frac{160}{x} \quad \Rightarrow \quad 1{,}6 \approx \frac{160}{x} \quad \Rightarrow \quad x \approx 100$$

    Por lo tanto, el punto de observación está a 100 m. de la torre.

13. Calcular la altura de un edificio que se observa desde un punto en que el ángulo de elevación es 62º y, alejándose 75m. de ese punto, el ángulo de elevación es ahora 34º.

    Solución:

    Una representación gráfica de la situación es:



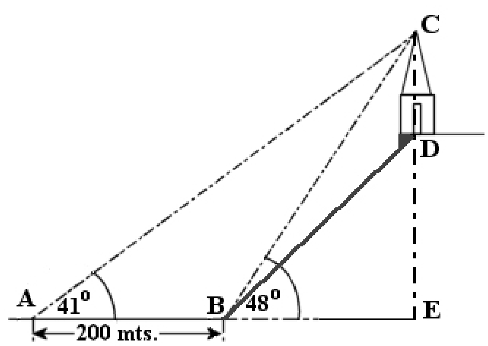
Observando la figura anterior, se obtiene:

$\tan 62° = \dfrac{x}{y}$ $\quad y \quad$ $\tan 34° = \dfrac{x}{y+75}$ $\quad \Rightarrow \quad$ $1{,}88 = \dfrac{x}{y}$ $\quad y \quad$ $0{,}67 = \dfrac{x}{y+75}$

Despejando x en ambas ecuaciones e igualando se tiene $1{,}88y = 0{,}67y + 50{,}25$, de donde $y = 41{,}5m$. Reemplazando este valor de y, se tiene que $x = 78$.

Por lo tanto, la altura del edificio es de $78m$.

14. Una catedral esta sobre una colina, como se ve en la figura. Cuando el extremo superior de la catedral se ve desde la base del cerro, su ángulo de elevación es de 48°. Cuando se ve a una distancia de $200\,mts$ de la base de la colina, su ángulo de elevación es de 41°. La pendiente de la colina forma una ángulo de 32° con la horizontal.



a) Determinar la distancia desde la base de la colina al extremo superior de la catedral.

b) Calcular la altura aproximada de la catedral.

Solución:

a) **Calculo de BC:** (En $\triangle ABC$)

$$\begin{aligned} \frac{\sin(7°)}{200} &= \frac{\sin(41°)}{BC} \\ BC &= \frac{200 \cdot \sin(41°)}{\sin(7°)} \end{aligned}$$

$$BC \approx 1076{,}76mts.$$

Calculo de EC: (En $\triangle BEC$)

$$\begin{aligned}\sin(48^\circ) &= \frac{EC}{1032{,}78}\\ EC &= 1032{,}78 \cdot \sin(48^\circ)\\ EC &\approx 767{,}5mts.\end{aligned}$$

Luego, a distancia desde la base de la colina al extremo superior de la catedral es de 1032.78mts. (o bien, si se considera como base de la colina el punto E, 757.5mts.)

b) En $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}\frac{\sin(122^\circ)}{1032{,}78} &= \frac{\sin(16^\circ}{CD}\\ CD &= \frac{1032{,}78 \cdot \sin(16^\circ)}{\sin(122^\circ)}\\ CD &\approx 335{,}68mts\end{aligned}$$

Luego, la altura aproximada de la catedral es de 335.68mts.

15. **Resolución de triángulos.**

a) Caso I (un lado y dos ángulos.)
Resolver el triángulo ABC dados $a = 38{,}124,\ \alpha = 46^\circ 31{,}8'$ y $\gamma = 79^\circ 17{,}4'$.
Solución:
Se debe encontrar b, c y β.

Para encontrar β usaremos la relación: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ de donde:

$$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma) \quad \Longrightarrow \quad \beta = 180^\circ - (125^\circ 49' 12'') = 54^\circ 10' 48''$$

luego $\beta = 54^\circ 10' 48''$

Se usa el *Teorema de los senos* para calcular b:

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a} \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{38{,}124 \sin 54^\circ 10' 48''}{\sin 46^\circ 31' 81''} = 42{,}59$$

luego $b = 42{,}59$

Análogamente, se encuentra que $c = 51{,}62$

b) Caso II (Dos lados y el ángulo comprendido.)
Resolver el $\triangle$ ABC, dados $a = 2526{,}4,\ c = 1387{,}6$ y $\beta = 54°24'12''$.
Solución:
Se debe calcular $b,\ \alpha$ y γ.

El lado b se encuentra usando el *Teorema del coseno*: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$, de aquí se obtiene $b = 2056$.

α se encuentra, usando el *Teorema de los senos* y γ con la relación $\alpha+\beta+\gamma = 180°$.

Se obtiene: $\alpha = 92°18'42''$ y $\gamma = 33°17'6''$. (Verificarlo).

c) Caso III (dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos).
Resolver el triángulo ABC, dados: $b = 67{,}246,\ c = 56{,}915$ y $\beta = 65°15'48''$.
Solución:
Como $b > c$, el problema tiene una solución, la que se obtiene usando también el *Teorema de los senos.* $\alpha = 64°30', \quad \gamma = 50°14'12''$ y $a = 66{,}828$. (Verificarlo)

d) Caso IV (tres lados).
Resolver el triángulo ABC, dados $a = 643{,}84,\ b = 778{,}72\ y\ c = 912{,}28$
Solución:
Aquí se deben encontrar los tres ángulos.
Para hallar uno de ellos, digamos α, se usa el *Teorema de los cosenos* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, de donde

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

de donde $\cos\alpha = 0{,}72080$ y $\alpha = 43°52'47''$ y el resto del ejercicio es análogo al caso II: $\beta = 56°58'1'', \quad \gamma = 79°9'4''$.

8.9. Ejercicios

1. Expresar en grados y radianes:

   a) Siete décimos de 4 ángulos rectos.

   b) Cinco cuartos de dos ángulos rectos.

   c) Dos tercios de un ángulo recto.

2. Expresar

   a) $\alpha = 3,8^\circ$ en radianes

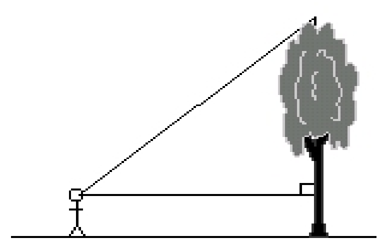
   b) $\beta = 16\pi$ en grados

   c) El ángulo $\gamma = 4{,}5$ en grados, minutos y segundos

   d) Expresar en grados el ángulo $\delta = 104^\circ\ 26'\ 38''$

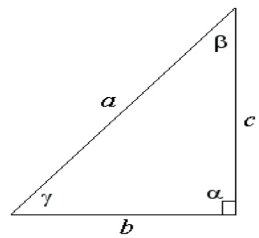
3. El péndulo de un reloj mide 1.3m y oscila a lo largo de un arco de 15cm. Encontrar el ángulo central y el área del sector a través del cual el péndulo se mueve en uno de sus balanceos.

4. Una persona de $1,78m$ de altura observa que el ángulo de elevación de la copa de un árbol es de 20°. Si la persona se encuentra ubicada a $10,5m$ de la base del árbol, ¿cuál es la altura del árbol?. (Ver siguiente figura).



5. El radio de la tierra es, aproximadamente 6380 km. ¿Cuántos kilómetros se desplaza una persona que viaja desde una ciudad A a otra B, si ambas están ubicadas sobre el mismo meridiano, a 43° 51' y 38° 12' de latitud sur respectivamente.

6. Resolver los siguientes triángulos rectángulos:

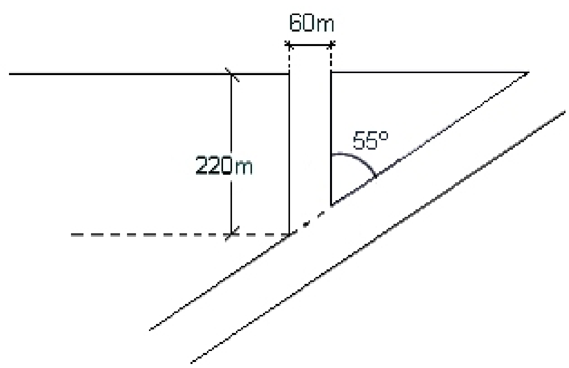


a) $a = 5cm, \qquad \beta = 30^{o}$

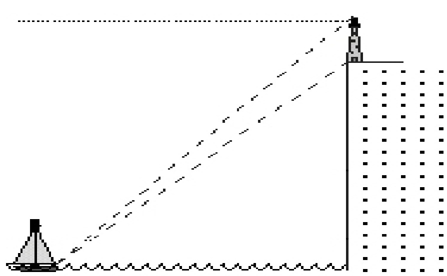
b) $b = 82cm, \qquad \gamma = 57^{o}$

c) $b = 2m, \qquad c = 5m$

7. Determinar los metros de alambrado que son necesarios para cerrar el terreno *triangular* en la siguiente siguiente figura:

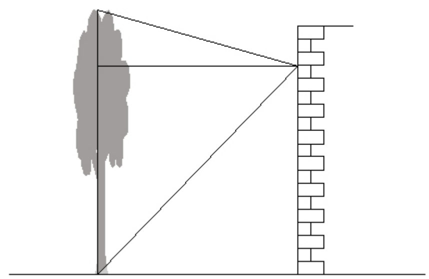


8. Un barco se encuentra a $500m$ de la costa. Desde el barco el ángulo de elevación de la parte superior de un acantilado es de 30°. Sobre el acantilado hay un faro. Desde la parte superior del faro el ángulo de depresión del barco es de 58°. A partir de esta información, ¿es posible determinar la altura del faro?. En caso afirmativo, calcular la altura del faro.



9. Desde un tren que viaja hacia el norte por una vía recta, el maquinista observa una columna de humo en dirección **N** $20°20'$ **E**. Después de recorrer 145 m. observa la misma columna de humo en dirección **S** $71°41'$ **E**. ¿A qué distancia estaba el humo del primer punto de observación?, ¿del segundo?, ¿de la vía férrea?.

10. Desde una torre de observación de 25 m. de alto, un hombre observa desde una posición situada a 2 m. bajo el extremo superior de la torre que el ángulo de elevación de la copa de un árbol es de $12°40'$ y que el ángulo de depresión de su base es de $72°20'$. Si las bases de la torre y del árbol están a un mismo nivel horizontal, ¿Cuál es la altura del árbol?.



11. Desde un globo de 1000 m. altura, los ángulos de depresión de dos ciudades son $11°50'$ y $84°10'$. ¿A qué distancia está una ciudad de la otra?.

12. ¿Qué ángulo forma la falda de un cerro con la horizontal si un árbol de 22.3 m. de alto, que crece en la falda, se ve bajo ángulo de $19°30'$ desde un punto situado a 44.1 m. de la base del árbol? (la distancia se considera a lo largo de la falda del cerro y bajando en dirección de la máxima pendiente).

13. Un astronauta se encuentra en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 116 km. de la superficie lunar. El observa desde su nave que el ángulo de depresión del horizonte lunar es de $29°30'$. Calcular el radio de la luna.

14. Un barco parte de un puerto y navega 15 millas náuticas hacia el Este. Luego navega 18 millas náuticas en la dirección **S** $27°$ **E**. ¿A qué distancia del puerto se encuentra y en que dirección?

15. Dos boyas se encuentran (alineadas) al sur de un faro de 178 m. de altura. Sus ángulos de depresión desde la parte superior del faro son $18°22'$ y $11°36'$. ¿A qué distancia, entre si, están las boyas?.

16. Dos barcos parten de un puerto al mismo tiempo. El primero navega N 15° O a 25 nudos (un nudo es una milla náutica por hora). El segundo navega N 32° E a 20 nudos. Al cabo de 2 horas, ¿a qué distancia se encuentran uno del otro?

8.10. Respuesta a los ejercicios

1. a) $252°, \dfrac{7\pi}{5}$ b) $225°, \dfrac{5\pi}{4}$ c) $60°, \dfrac{\pi}{3}$

2. a) $\alpha \approx 0{,}0663$ b) $\beta = 2880°$ c) $\gamma \approx 257°\ 49'\ 51{,}6''$ d) $\delta \approx 104,4439°$

3. Ángulo central $\approx 6{,}6°$, área del sector$= 973cm^2$

4. La altura del árbol es, aproximadamente, $5{,}6m$

5. La persona viaja una distancia de $629,1\,km$

6. a) $\gamma = 60°$, $b = 5 \cdot \sin 30° = 2{,}5 \Rightarrow b = 2{,}5cm$, $c = 5 \cdot cos30° = \frac{5\sqrt{3}}{2} \approx 4{,}33 \Rightarrow c \approx 4{,}33cm$.
   Comprobación: $(\frac{5\sqrt{3}}{2})^2 + (2{,}5)^2 = 25 = 5^2$
   c) $a = \sqrt{29}m \approx 5{,}38m$, $\gamma = 68{,}19° = 68°11'24''$, $\gamma = 21{,}8° = 21°48'$

7. Para cercar el terreno se requieren, aproximadamente, $916m$

8. La altura del faro es, aproximadamente, $222{,}8m$

9. El humo estaba a $137{,}74m$ del primer punto de observación, a $50{,}42m$ del segundo y a $47{,}86m$ de la línea férrea

10. La altura del árbol es aproximadamente 24,7m

11. Las ciudades distan, aproximadamente, $4{,}9km$

12. El ángulo que forma la falda del cerro con la horizontal es de 158,10°

13. El radio de la luna es, aproximadamente, $148{,}30km$

14. El barco se encuentra a 28,1807 millas del puerto en la dirección $\mathbf{S}\,55^\circ 18' 40{,}75''\,\mathbf{E}$

15. La distancia entre las boyas es, aproximadamente, $320{,}4m$

16. Después de dos horas la distancia entre los barcos es de 1600 millas náuticas.