CAPÍTULO

1

Conceptos fundamentales de Algebra

1.1. Conjuntos. Notaciones

Se supone que el lector tiene conocimientos básicos de la Teoría de conjuntos. La notación que se usará será la usual, así, por ejemplo, $A \subseteq B$ indicará que A es subconjunto de B, $A \cap B$ indicará la intersección de los conjuntos A y B, $\emptyset$ representará al conjunto vacío, etc.

Son de particular interés los conjuntos numéricos:

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbf{Z}^+$ conjunto de los números naturales o conjunto de los números enteros positivos.

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ conjunto de los números enteros.

$\mathbf{Q} = \{\frac{a}{b} \ / \ a, b \in \mathbf{Z}, \ b \neq 0\}$ conjunto de los números racionales.

$\mathbf{R}$ conjunto de los números reales.

$\mathbf{R}^+$ conjunto de los números reales positivos.

$\mathbf{R}^-$ conjunto de los números reales negativos.

$\mathbf{R}_{\geqslant 0}$ conjunto de los números reales mayores o iguales que cero.

$]a, b] = \{x \in \mathbf{R} \ / \ a < x \leqslant b\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \ / \ a \leqslant x \leqslant b\}$

Finalmente, se usarán las típicas *abreviaciones* lógicas: $\exists$ (existe), $\forall$ (para todo), $\Longrightarrow$ (implica), $\Longleftrightarrow$ (si y sólo si), $\vee$ (o), $\wedge$ (y).

1.2. Algunas propiedades de los números reales

1. Se suponen conocidas las propiedades: Conmutativa, asociativa, distributiva, existencia de neutros, existencia de inversos de las operaciones *adición* y *multiplicación* en los números reales.

2. Para $x,\ a,\ b,\ c,\ d,$ números reales se cumple:

   a) Ley de simplificación:

      1) Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$
      2) Si $ab = ac,\ a \neq 0$, entonces $b = c$

   b) Posibilidad de sustracción: Si $a + x = b$, entonces $x = b - a$

   c) Posibilidad de división: Si $ax = b,\ a \neq 0$, entonces $x = \dfrac{b}{a}$

   d) Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$

   e) $\left(\dfrac{a}{b}\right)\left(\dfrac{c}{d}\right) = \dfrac{ac}{bd}, \quad b \neq 0,\ d \neq 0$

   f) $(\frac{a}{b}) \div (\frac{c}{d}) = \dfrac{ad}{bc}, \quad b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0$

   g) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}, \quad b \neq 0,\ d \neq 0$

1.3. Potencias y raíces

Sea $a \in \mathbf{R},\ a \neq 0$. Para n número entero se define:

$$a^n = \begin{cases} a \cdot a \cdots a,\ n \text{ factores} & \text{si } n \text{ entero positivo.} \\ 1 & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{1}{a^{-n}} & \text{si } n \text{ es entero negativo.} \end{cases}$$

Si $a^n = b$, en donde n es un entero positivo, se dice que a *es una raíz n-ésima de* b. Así, por ejemplo, como $4^2 = 16$, se tiene que 4 es una raíz segunda (usualmente llamada raíz cuadrada) de 16, pero como $(-4)^2 = 16$, también -4 es una raíz cuadrada de 16. Análogamente, ya que $(-5)^3 = -125$, -5 es una raíz cúbica de -125.
Nota: Ciertos números no poseen raíz n-ésima en el conjunto de los números reales. Dar un ejemplo.
La raíz n-ésima principal (o simplemente, *raíz n-ésima* cuando no haya confusión) de un número b es la raíz n-ésima de b del mismo signo de b, la que se denota por: $\sqrt[n]{b}$
Cuando $b > 0$, p y q enteros con $q > 0$ se adopta la definición: $b^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{b^p}$
A continuación se entrega un listado con las propiedades de potencias y raíces de uso más frecuente:
Propiedades de las potencias
En lo que sigue $m,\ n$ representan números enteros:

1. $a^m a^n = a^{m+n}, \quad a \neq 0$
2. $a^n b^n = (ab)^n, \quad a \neq 0,\ b \neq 0$
3. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0$
4. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n, \quad a \neq 0,\ b \neq 0$
5. $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{nm}, \quad a \neq 0$
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = (a^n)^{-1} = (a^{-1})^n = \left(\dfrac{1}{a}\right)^n$, n número entero positivo
7. $1^n = 1$
8. $0^n = 0$, siempre que n sea un número entero positivo

Propiedades de las raíces
En caso que las expresiones involucradas esteén *bien definidas*, se tiene que:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \quad b \neq 0$
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}, \quad a \neq 0$
4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

Notas:

1. 0^0 no está definido
2. $\sqrt[n]{a} = b \Longleftrightarrow b^n = a$
3. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, siempre que tenga sentido
4. Racionalizar el denominador de una fracción es un procedimiento en el que una fracción que tiene un radical en su denominador se expresa como una fracción equivalente sin el radical aludido. Para ello, se utiliza la propiedad de las fracciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc},\ b \neq 0,\ c \neq 0$$

1.4. Operaciones con expresiones algebraicas

Una expresión algebraica es una combinación de números, representados por símbolos, mediante operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división o extracción de raíces. Por su frecuente utilización se entrega un listado de productos especiales y reglas de factorización:

Productos especiales

1. $x(y \pm z) = xy \pm xz$
2. $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
3. Cuadrado de un binomio

   $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$
4. Cuadrado de un trinomio

   $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$
5. Producto de una suma por su diferencia

   $(x + a)(x - a) = x^2 - a^2$
6. Cubo de un binomio

   $(x \pm a)^3 = x^3 \pm 3ax^2 + 3xa^2 \pm a^3$

Reglas de factorización

1. Los productos notables precedentes del 1 al 4, mirados de derecha a izquierda, entregan una regla de factorización
2. Suma de dos cubos

   $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$
3. Diferencia de dos cubos

   $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$

1.5. Ejemplos

Los siguientes ejemplos ilustran diversas aplicaciones de las propiedades de los números reales.

1. Determinar el valor de verdad (V o F) de los siguientes enunciados. Cuando sea falso, proporcionar un contraejemplo

   a) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$

b) $(2^0)^n = 1$

c) $\frac{a+2b}{a} = 2b$

Solución:

a) Falso. Contraejemplo: Para $a = 0$, $b = 1$ se tiene:
$(a-b)^2 = (0-1)^2 = (-1)^2 = 1$, en cambio
$a^2 - b^2 = 0^2 - 1^2 = 0 - 1 = -1$

b) Verdadero, pues $2^0 = 1$ y $1^n = 1$, para todo n

c) Falso. Contraejemplo: Para $a = 2$, $b = 4$ se tiene:
$\dfrac{a+2b}{a} = \dfrac{2+2\cdot 4}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$, en cambio $2b = (2)(4) = 8$

2. Verificar que si $a \in \mathbf{Z}$, entonces a es par $\iff a^2$ es par.

Solución:

$\Longrightarrow$) Si a es par, existe un $n \in \mathbf{Z}$ tal que $a = 2n$. De donde $a^2 = 4n^2 = 2(2n)$. Luego a^2 es par.

$\Longleftarrow$) En este caso se tiene que a^2 es par, por demostrar que a es par.

Demostración (Indirecta)

Supongamos que a es impar, entonces $\exists n \in \mathbf{Z}$ tal que $a = 2n+1$, luego $a^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1$, de donde a^2 es impar, lo que contradice nuestra suposición. Luego a no es impar, es decir, a es par.

3. Un antiguo problema es encontrar una fórmula que sólo entregue números primos. Tal problema aún permanece sin solución.

Considerar la expresión
$$P = n^2 - n + 41$$

a) Calcular P para $n = 1, 2, 3, \cdots, 10$

b) De los valores calculados en (a), ¿cuáles de ellos son primos?, ¿qué conjetura sugiere este resultado?

c) Calcular P para $n = 41$. Comentar.

Solución:

(a)

$$\begin{array}{rcc} n & \cdots & P = n^2 - n + 41 \\ \\ 1 & \cdots & 41 \\ 2 & \cdots & 43 \\ 3 & \cdots & 47 \\ 4 & \cdots & 53 \\ 5 & \cdots & 61 \\ 6 & \cdots & 71 \\ 7 & \cdots & 83 \\ 8 & \cdots & 97 \\ 9 & \cdots & 113 \\ 10 & \cdots & 131 \end{array}$$

(b) Todos son primos!

La conjetura sugerida es que la fórmula propuesta representa un número primo para cada $n \in \mathbf{N}$

(c) Para $n = 41$, $P = 1681 = 41 \cdot 41$ que no es primo. Luego la conjetura sugerida en (b) es incorrecta.

4. Eliminar los exponentes negativos y simplificar la expresión $x^{-1} + y^{-1}$

   Solución: $x^{-1} + y^{-1} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{y+x}{xy}$

   Notar que $x^{-1} + y^{-1} \neq \dfrac{1}{x+y}$

5. Simplificar la expresión $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{5}} y^{\frac{6}{5}}}{z^{\frac{2}{5}}}\right)^5$

   Solución: $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{5}} y^{\frac{6}{5}}}{z^{\frac{2}{5}}}\right)^5 = \dfrac{(x^{\frac{1}{5}} y^{\frac{6}{5}})^5}{(z^{\frac{2}{5}})^5} = \dfrac{xy^6}{z^2}$

6. Si x es un número real, simplificar $\sqrt{x^2}$

   Solución:

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es positivo} \\ -x & \text{si } x \text{ es negativo} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   Se tiene que $\sqrt{2^2} = 2$ y $\sqrt{(-3)^2} = 3$. Notar que en general $\sqrt{x^2} \neq x$

7. Expresar $(8x-y)^{\frac{4}{5}}$ de modo equivalente utilizando radicales.

   Solución: $(8x-y)^{\frac{4}{5}} = ((8x-y)^4)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{(8x-y)^4}$

8. Racionalizar el denominador y simplificar la expresión $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{xy^2}}$

   Solución: $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{xy^2}} = \dfrac{2^{\frac{1}{4}}(xy^2)^{\frac{2}{3}}}{(xy^2)^{\frac{1}{3}}(xy^2)^{\frac{2}{3}}} = \dfrac{2^{\frac{3}{12}}(xy^2)^{\frac{8}{12}}}{xy^2} = \dfrac{\sqrt[12]{2^3x^8y^{16}}}{xy^2}$

9. Factorizar completamente la expresión $x^2 - x - 6$

   Solución: Si se factoriza este trinomio en la siguiente forma $x^2-x-6 = (x+a)(x+b)$, que es el producto de dos binomios, entonces debe determinarse los valores reales de a y b. Se tiene que $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$. Igualando los coeficientes correspondiente, se tiene $a+b = -1$ y $ab = -6$. Si $a = -3$ y $b = 2$, entonces se satisfacen ambas condiciones, Luego $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$

10. Factorizar completamente las siguientes expresiones:

    a) $A = 6t^3 - 7t^2 - 20t$

    b) $B = 2(a-b)^2(a+b)^3 - 5(a+b)^2(a-b)^3$

    c) $C = x^4 - 16y^4$

    Solución:

    (a) $$\begin{aligned} A &= t[6t^2 - 7t - 20] \\ &= t[(2t-5)(3t+4)] \\ &= t(2t-5)(3t+4) \end{aligned}$$

    (b) $$\begin{aligned} B &= (a-b)^2(a+b)^2[2(a+b) - 5(a-b)] \\ &= (a-b)^2(a+b)^2(-3a+7b) \end{aligned}$$

    (c) $$\begin{aligned} C &= x^4 - (2y)^4 \\ &= [x^2 - (2y)^2][x^2 + (2y)^2] \\ &= [(x-2y)(x+2y)][x^2 + (2y)^2] \\ &= (x-2y)(x+2y)(x^2+4y^2) \end{aligned}$$

11. En algunas ocasiones es conveniente racionalizar el numerador de una fracción. Por ejemplo, en el tema de derivación será necesario racionalizar el numerador de:

    $$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

    Realizar esta racionalización.

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{(\sqrt{x+h})^2-(\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&= \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

12. Racionalizar el denominador de $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$

    Solución:

    Observar que en este caso, *no sirve* amplificar por $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$
    Usando la factorización $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, con $a=\sqrt[3]{x}$ y $b=\sqrt[3]{y}$ se tiene

    $$x-y=(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$$

    de donde se deduce que el factor adecuado para racionalizar la fracción propuesta es: $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}$. Haciéndolo se obtiene:

    $$\frac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}=\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}{x-y}$$

1.6. Ejercicios

1. A continuación se entrega una demostración de la propiedad:

   "Para cada $a\in\mathbf{R}$: $a\cdot 0=0$"

   Justificar cuidadosamente cada uno de sus pasos.

Paso				Justificación
(1)	$a\cdot 0$	$=$	$a\cdot 0+0$	....
(2)		$=$	$a\cdot 0+(a+(-a))$	....
(3)		$=$	$(a\cdot 0+a)+(-a)$	....
(4)		$=$	$(a\cdot 0+a\cdot 1)+(-a)$	....
(5)		$=$	$a\cdot(0+1)+(-a)$	....
(6)		$=$	$a\cdot 1+(-a)$	....
(7)		$=$	$a+(-a)$	....
(8)		$=$	0	....

2. Verificar que la suma y producto de 2 números pares es un número par. ¨Sucede lo mismo si los números son impares, primos, compuestos?

3. Determinar el valor de verdad de los siguientes enunciados. Cuando sea falso, entregar un contraejemplo:

   a) $\sqrt{a-b} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

   b) $(2a)^5 = 2a^5$

   c) $\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{a^4}$

   d) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a-b}$

   e) $(-1)^n = -1$, si n es un entero impar

4. Simplificar y escribir las respuestas usando sólo exponentes positivos .

   (a) $\sqrt[5]{x^2y^3z^{-10}}$ (b) $\frac{9u^8}{v^6}3u^4v^8$ (c) $(x^{-1}-y^{-1})^{-2}$

   (d) $(x^{-3}y^2)^{-2}$ (e) $x^2\sqrt[4]{xy^{-2}z^3}$ (f) $(9a^4b^{-2})^{\frac{1}{2}}$

   (g) $\left(\frac{8u^{-1}}{2^2u^2v^0}\right)^{-2}\left(\frac{u^{-5}}{u^{-3}}\right)^3$ (h) $\left(\frac{27x^2y^{-3}}{8x^{-4}y^3}\right)^{\frac{1}{3}}$ (i) $(x^2y^3)^{\frac{1}{5}}[(x^3y^{-3})^{\frac{1}{5}} - (x^{-2}y^2)^{\frac{1}{5}}]$

5. Expresar las formas exponenciales de modo equivalente utilizando radicales.

   (a) $x^{\frac{-4}{5}}$ (b) $(ab^2c^3)^{\frac{3}{4}}$ (c) $2x^{\frac{-2}{5}} - (2x)^{\frac{-2}{5}}$ (d) $[(x^{-4})^{\frac{1}{5}}]^{\frac{1}{6}}$

6. Racionalizar los denominadores.

   (a) $\frac{y}{\sqrt{2x}}$ (b) $\frac{4}{3\sqrt[3]{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3}}$ (d) $\frac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt[3]{x^2y^3}}$

7. Simplificar y expresar en la forma radical.

   (a) $3x\sqrt[3]{x^5y^4}$ (b) $\sqrt{2x^2y^5}\sqrt{18x^3y^2}$ (c) $\frac{6ab}{\sqrt{3a}}$

   (d) $\sqrt{7} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$ (e) $\frac{\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ (f) $\sqrt[5]{\frac{3y^2}{8x^2}}$

   (g) $\sqrt[8]{y^6}$ (h) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{2}{\sqrt{3}+1}$ (i) $\frac{y^2}{\sqrt{y^2+4-2}}$

8. En las expresiones siguientes, efectuar las operaciones indicadas y simplificar los resultados.

   (a) $(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+5)$ (b) $\frac{2}{x^2+2x+1} - \frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{3}{x^2-x-2}$

   (c) $\frac{y-2}{y^2-4y+4} \div \frac{y^2+2y}{y^2+4y+4}$ (d) $\frac{u-\frac{1}{u}}{u-\frac{1}{u^2}}$

   (e) $\frac{m-1}{m^2-4m+4} + \frac{m+3}{m^2-4} + \frac{2}{2-m}$ (f) $\frac{y}{x^2} \div \left(\frac{x^2+3x}{2x^2+5x-3} \div \frac{x^3y-x^2y}{2x^2-3x+1}\right)$

9. Factorizar completamente las expresiones siguientes.

(a) $(4x-y)^2-9x^2$ (b) $2x^2+4xy-5y^2$

(c) $6x^3y+9x^2y^2-15xy^3$ (d) $(y-b)^2-y+b$

(e) $(p+q)^2+3(p+q)-4$ (f) y^3+2y^2-4y-8

10. Ejecutar las operaciones y simplificar cuando sea posible

(a) $\dfrac{\dfrac{1}{x+h}-\dfrac{1}{x}}{h}$ (b) $\dfrac{x^2+7x+10}{x^2-2x-8}\div\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-3x-4}$

(c) $\dfrac{2m}{n^3}\div\dfrac{4m}{n^2}$ (d) $(x-y^{-1})^{-2}$

(e) $\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (f) $\dfrac{4x^2-20x+24}{6+10x-4x^2}(2x+1)$

1.7. Respuesta a los ejercicios de número impar

- 1) (1) 0 es neutro aditivo. (3) Asociatividad de +. (5) Distributividad. (7) 1 es neutro multiplicativo.
- 3) (a) Falso. Contraejemplo, para $a=25$, $b=16$ se tiene: $\sqrt{a-b}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$, en cambio $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\sqrt{25}-\sqrt{16}=5-4=1$ (c) Verdadero. (e) Verdadero.
- 5) (a) $\sqrt[5]{x^{-4}}=\frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt[5]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[5]{(2x)^2}}$
- 7) (a) $3\sqrt[3]{x^8y^4}$ (c) $\frac{6\sqrt{ab}}{\sqrt{3}}$ (e) $\frac{3\sqrt{5}+5}{4}$ (g) $\sqrt[4]{y^3}$ (i) $2+\sqrt{y^2+4}$
- 9) (a) $(7x-y)(x-y)$ (c) $3xy(2x+5y)(x-y)$ (e) $(p+q+4)(p+q-1)$