CAPÍTULO

# 3

# Funciones

El concepto de función es uno de los más importantes en todas las matemáticas y es esencial para el estudio del Cálculo, fué introducido en el vocabulario matemático en el siglo XVII por Leibniz. Intuitivamente, una función $f$ es una regla de correspondencia que asigna a cada número de entrada $x$ exactamente un número de salida $f(x)$. Por lo general, se especifican las funciones mediante ecuaciones que señalan que es lo que debe hacerse a la entrada $x$ para obtener $f(x)$. El dominio de una función consiste de todos los números de entrada (o de insumo) y su rango o recorrido consiste de todos los números de salida (o de producto). A menos que se especifique lo contrario, el dominio de $f$ consiste en todos los valores de $x$ para los cuales $f(x)$ es un número real, *regla del máximo dominio*. Una función que está definida por más de una ecuación recibe el nombre de función compuesta.
En lo que sigue $f : A \longrightarrow B, \quad g : C \longrightarrow D$ son funciones.

1. **Nociones básicas**

   $A$ se llama *Dominio* de $f$ ($\mathrm{Dom}\, f$). El subconjunto $\{b \in B \ / \ b = f(a)\ ,\ \text{para algún } a \in A\}$ de $B$ es llamado *Imagen* de $f$ o *Recorrido* de $f$ ($\mathrm{Im}\, f$ o $\mathrm{Rec}\, f$). $B$ se llama *Codominio* ($\mathrm{Cod}\, f$). La gráfica de $f$ es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ y consiste de todos los puntos $(x, f(x))$ del gráfico de $A\mathrm{x}B$.

2. **Igualdad de funciones**

   $f = g$ siempre y cuando $A = C,\ B = D$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x$ en $A$.

3. **Composición de funciones**

La función compuesta $g \circ f$ está definida siempre y cuando $\operatorname{Rec} f \subseteq C$, en tal caso

$$g \circ f : A \longrightarrow D, \quad \text{definida por } (g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ para } x \in A$$

.

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todos los números $x$ tales que $x$ está en el dominio de $g$ y $g(x)$ está en el dominio de $f$.

4. **Tipos especiales de funciones**

   *a*) $f$ es inyectiva o 1-1 o uno a uno $\Longleftrightarrow [f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y, \quad x, y \in A]$

   *b*) $f$ es sobreyectiva o sobre o epiyectiva $\Longleftrightarrow \operatorname{Rec} f = B$

   *c*) $f$ es biyectiva $\Longleftrightarrow f$ es 1-1 y sobre.

5. **Función inversa**

   Si $f$ es biyectiva hay una única función $f^{-1} : B \longrightarrow A$ tal que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$ y $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$, donde la notación $\mathrm{id}_X$ denota la función identidad en $X$, es decir, $\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ definida por $\mathrm{id}_X(x) = x,$ para todo $x \in X$. Además, $f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$.

6. **Algebra de funciones**

   Si $A$, $B$, $C$, $D$ son subconjuntos de los números reales, entonces $f$ y $g$ se dicen funciones reales de variable real y se pueden combinar para formar una suma, una diferencia, un producto o un cuociente, de la siguiente manera:

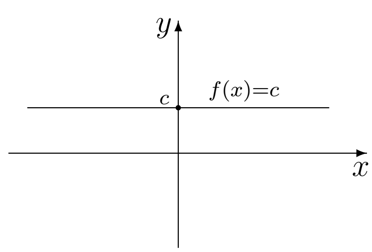
   *a*) $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$. $\quad \operatorname{Dom}(f \pm g) = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$.

   *b*) $(fg)(x) = f(x)g(x)$. $\quad \operatorname{Dom}(fg) = \operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g$.

   *c*) $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$. $\quad \operatorname{Dom} \dfrac{f}{g} = (\operatorname{Dom} f \cap \operatorname{Dom} g) \setminus \{x \ / \ g(x) = 0\}$.

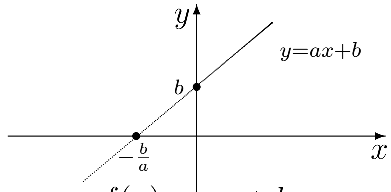
## 3.1. Tipos especiales de funciones reales de variable real

**La función constante**



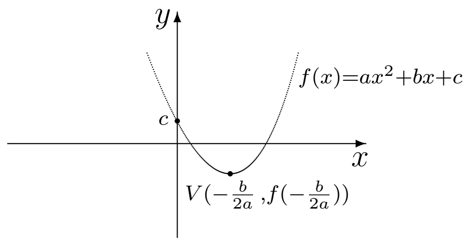

La función constante tiene la forma $y = f(x) = c, \ c \in \mathbf{R}$. El dominio es $\mathbf{R}$ y el recorrido es $\{c\}$. Su gráfica es una recta paralela (o coincidente) al eje $X$.

**La función lineal**



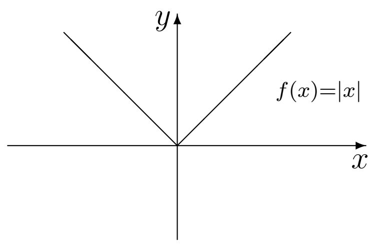

Una función lineal tiene la forma $y = f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, $a, b \in \mathbf{R}$.
El Dominio y Recorrido de una función lineal es $\mathbf{R}$. Es biyectiva, por lo tanto, tiene inversa definida por $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{a}x - \dfrac{b}{a}$.
**Nota**: El estudio de esta función se complementará en el capítulo 5.

**La función cuadrática**




Una función cuadrática tiene la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$
Intercepta al eje $Y$ en el punto $(0, c)$. Su gráfica es una parabóla con vértice $(-\dfrac{b}{2a}, f(-\dfrac{b}{2a}))$.
Si $a > 0$ se abre hacia arriba, y si $a < 0$ se abre hacia abajo.
**Nota**: El estudio de esta función se complementará en el capítulo 5.

**La función valor absoluto**



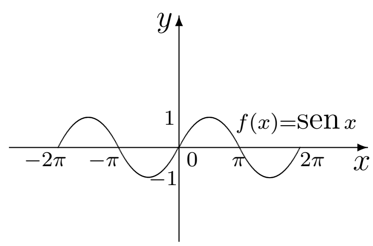

La función valor absoluto tiene la forma $y = f(x) = |x|$. Su dominio es $\mathbf{R}$, el recorrido es $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$

**Funciones circulares o trigonométricas**

1. **La función seno**

$$\begin{array}{rcrcl} \operatorname{sen} & : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & & x & \longmapsto & \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen} x \end{array}$$

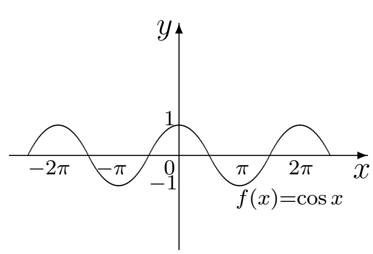
Su dominio es $\mathbf{R}$, y su recorrido es $[-1,1]$. Su gráfica (parcial) es




2. **La función coseno**

$$\begin{array}{rcrcl} \cos & : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & & x & \longmapsto & \cos(x) = \cos x \end{array}$$

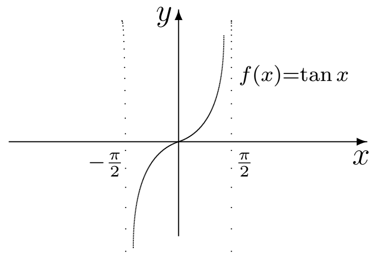
Su dominio es $\mathbf{R}$ y su recorrido es $[-1,1]$. Su gráfica (parcial) es




3. **La función tangente**

$$\begin{array}{rcrcl} \tan & : & \mathbf{D} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & & x & \longmapsto & \tan(x) = \tan x \end{array}$$

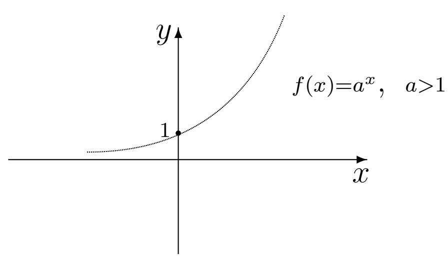
Su dominio es $D = \mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \text{ entero}\}$, y su recorrido es $\mathbf{R}$. Una parte de la gráfica correspondiente al intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (rama principal) es




**Algunas Propiedades de las funciones circulares**

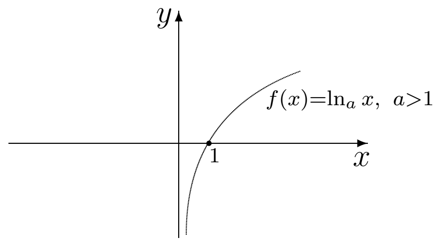
1. $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$
2. $\cos(-x) = \cos(x)$
3. $\tan(-x) = -\tan(x)$
4. $\operatorname{sen}(x + 2k\pi) = \operatorname{sen} x,\ k$ entero
5. $\cos(x + 2k\pi) = \cos x,\ k$ entero
6. $\tan(x + k\pi) = \tan x,\ k$ entero
7. $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$
8. $(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$
9. $1 + \tan^2 x = sec^2 x$
10. $1 + \operatorname{ctg}^2 x = csc^2 x$

**Función exponencial**




Una función exponencial tiene la forma $f(x) = a^x,$ con $a > 0,\ a \neq 1$
El dominio de una función exponencial es $\mathbf{R}$. El recorrido es $\mathbf{R}^+$ y la grafica de cualquier función exponencial intercepta al eje $Y$ en $(0, 1)$ debido a que $a^0 = 1$, para todo $a \neq 0$. Con el eje $X$ no hay intersección.
Una base que se utiliza con frecuencia en las funciones exponenciales es el número irracional e, en donde e $\approx 2,71828$. Esta base se presenta en análisis económico y en muchas situaciones que implican crecimiento o decrecimiento, como por ejemplo en estudios de población.

**Función logarítmica**




El dominio de la función logarítmica es $\mathbf{R}^+$, el recorrido es $\mathbf{R}$ y la gráfica de cualquier función logarítmica intercepta al eje $X$ en $(1,0)$ debido a que $\log_a 1 = 0$; con el eje $Y$ no hay intersección. La función logarítmica es la función inversa de la exponencial, y viceversa. La función logarítmica con base $a$ se denota por $\log_a$, además $\log_a x = b \Longleftrightarrow a^b = x$.
A los logaritmos con base e se les llama logaritmos naturales y se denotan por ln, a los de base 10 se les denomina logaritmos comunes y se les simboliza por log.
**Algunas propiedades de los logaritmos**

1. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
2. $\log_a(\frac{b}{c}) = \log_a b - \log_a c$
3. $\log_a b^c = c\log_a b$
4. $\log_a 1 = 0$
5. $\log_a a^b = b$
6. Si $\log_a b = \log_a c$, entonces $b = c$
7. $a^{\log_a b} = b$, en particular $10^{\log x} = x$ y $\mathrm{e}^{\ln x} = x$
8. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, cambio de base.

## 3.2. Ejemplos

1. Considerar la función $f$ definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < t < 5 \\ 3 & \text{si } 5 \leqslant t \leqslant 7 \\ t-3 & \text{si } 7 < t \leqslant 50 \end{cases}$$

Esta función esta definida por más de una ecuación, aquí $t$ es la variable independiente y el dominio de $f$ es el conjunto de todos los $t$ tales que $-1 < t \leqslant 50$, es decir, el dominio de $f$ es el intervalo $]-1,50]$.

El valor de $t$ determina que ecuación se debe utilizar; por ejemplo:

$f(0) = 1$ pues $-1 < 0 \leqslant 5$ ; $f(7) = 3$ pues $5 \leqslant 7 \leqslant 7$ ; $f(13) = 13 - 3 = 10$ pues $7 < 13 \leqslant 50$ ; $f(-5)$ no está definido, ya que $-5$ no pertenece al Dom $f$.

2. Si $f : A \longrightarrow B$ no es biyectiva, entonces no existe la función inversa $f^{-1}$, pero restringiendo el dominio de $f$ a un subconjunto adecuado de $A$ o el codominio de $f$ a un subconjunto de $B$, $f$ (más bien la restricción de $f$) puede ser biyectiva y luego existir $f^{-1}$, por ejemplo:
$$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \text{ definida por } f(x) = x^2 - 4$$
En este caso $f$ no es 1-1 ni sobre, pero si se restringe,
$$f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \operatorname{Rec} f = \ [-4, +\infty[$$
$f$ es biyectiva y luego existe
$$f^{-1} :\ [-4, +\infty[ \longrightarrow \mathbf{R}^+ \text{ definida por } f^{-1}(x) = \sqrt{x+4}. \quad \text{Verificarlo !}$$

3. Considerar las funciones reales $f$ y $g$ definidas por:
$$f(x) = \frac{x+4}{2-x}, \quad g(x) = \frac{12}{4x-2}$$
   *a*) Determinar dominio y recorrido de $f$ y de $g$.
   *b*) Determinar dominio de $g \circ f$. Calcular $(g \circ f)(x)$
   *c*) Determinar $A, B \subseteq \mathbf{R}$ para que $f^{-1} : A \longrightarrow B$, sea función. ($A$ dominio máximo). Encontrar $f^{-1}(x)$.

**Solución**:

(a) Se tiene que $f(x)$ esta definida si y sólo si $2 - x \neq 0$, es decir, si y sólo si $x \neq 2$, luego $\operatorname{Dom} f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

El recorrido de $f$ es el conjunto de los $y \in \mathbf{R}$ tal que que $y = f(x) = \frac{x+4}{2-x}$ para algún $x \in \operatorname{Dom} f$. Despejando $x$ en función de $y$ se tiene:
$$\begin{array}{rcl} y = \frac{x+4}{2-x} \implies (2-x)y & = & x+4 \\ 2y - xy & = & x+4 \\ 2y - 4 & = & x + xy \\ 2y - 4 & = & x(1+y) \\ x & = & \frac{2y-4}{1+y} \end{array}$$
Se debe tener que $1 + y \neq 0 \implies y \neq -1$. Luego $\operatorname{Rec} f = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

De manera análoga se encuentra que $\operatorname{Dom} g = \mathbf{R} \setminus \{1/2\}$ y $\operatorname{Rec} g = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Verificarlo!

(b) $\mathrm{Dom}\,(g\circ f) = \mathrm{Dom}\,f \setminus \{x \in \mathbf{R} \,/\, f(x) = 1/2\}$.
Si $f(x) = 1/2,$ entonces $\frac{x+4}{2-x} = 1/2,$ entonces $x = -2$. Luego $\mathrm{Dom}\,(g\circ f) = \mathbf{R} \setminus \{2, -2\}$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\frac{x+4}{2-x}) = \frac{12}{4((x+4)/(2-x)) - 2} = \frac{4-2x}{x+2}$$

Por lo tanto, $(g\circ f)(x) = \frac{4-2x}{x+2}$
(c) $f^{-1}$ es función $\Longleftrightarrow$ $f$ es biyectiva. Como $f : \mathrm{Dom}\,f \longrightarrow \mathrm{Rec}\,f$ es biyectiva, entonces basta tomar

$$A = \mathrm{Rec}\,f = \mathbf{R} \setminus \{-1\},\; B = \mathrm{Dom}\,f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$$

$f^{-1}(x) = \frac{2x-4}{1+x}$ (ver parte (a) donde se despejó $x$).

4. Un campesino va a cercar un pastizal rectangular que se encuentra al lado de un río. No se requiere alambrada a lo largo del río. Si el área del potrero es de 3.200 yardas cuadradas, expresar la longitud de la cerca como una función de la longitud del lado no cercado.

   **Solución**: Sean $x$ e $y$ variables que denotarán las longitudes de los lados del potrero, y $L$ la longitud de la cerca, luego:

$$L = x + 2y \quad \text{y} \quad xy = 3200$$

   Como se quiere la longitud de la cerca expresada como una función de $x$ se debe encontrar una ecuación que relacione a $x$ y a $y$, o sea, se debe expresar $y$ en términos de $x$.

   De lo anterior se tiene: $y = \frac{3200}{x}$
   Luego: $L = f(x) = x + \frac{6400}{x}$
   Notar que la función $f$ está definida sólo para valores de $x$ distintos de cero, además $x$ representa la longitud de uno de los lados de la cerca, luego $x$ no puede ser un número negativo. Luego, el $\mathrm{Dom}\,L = ]0, +\infty[$.

5. En Economía, las funciones de oferta y demanda presentan la correspondencia entre el precio $p$ de un producto y el número máximo de unidades $q$ de los productos que los fabricantes (o los consumidores) ofrecerán (o comprarán) a ese precio. La tabla que aparece a continuación es un programa de oferta. Señala la correspondencia entre el precio $p$ de cierto producto y la cantidad $q$ que los fabricantes proveerán por semana a ese precio. A cada precio le corresponde exactamente una cantidad y viceversa.

| Precio por unidad (en $) | Cantidad ofrecida (por semana) |
|---|---|
| 500 | 13 |
| 600 | 15 |
| 700 | 17 |
| 800 | 19 |

Así, si $p$ es la variable independiente, entonces $q$ es función de $p$. O sea $q = f(p)$ ; si $q$ es la variable independiente, entonces $p$ es función de $q$, es decir, $p = g(q)$.

Luego: $\begin{array}{llllllll} g(13) &= 500, & g(15) &= 600, & g(17) &= 700, & g(19) &= 800 \\ f(500) &= 13, & f(600) &= 15, & f(700) &= 17, & f(800) &= 19 \end{array}$

6. El fabricante de cierto producto vende todo lo que produce. Si el producto se vende a \$16 por unidad, los costos fijos son de \$10.000 y los costos variables están dados por $y_{vc} = 8q$, en donde $q$ es el número de unidades que se fabrican.

   *a*) Determinar la producción en el punto de equilibrio.

   **Solución**: El punto de equilibrio es el punto donde los ingresos totales coinciden con los costos totales (utilidad igual a cero), o sea, el punto de equilibrio ocurre cuando los niveles de producción y de venta dan como resultado que no haya utilidades ni pérdidas para el fabricante

$$\begin{aligned} \text{Costos totales} &= \text{Costos fijos} + \text{Costos variables} \\ &= 10000 + 8q \\ \text{Ingresos totales} &= \text{Valor por unidades} \times \text{cantidad} \\ &= 16q \end{aligned}$$

   En el punto de equilibrio,

$$\begin{aligned} \text{Ingresos totales} &= \text{Costos totales} \\ 10000 + 8q &= 16q \\ q &= \frac{10000}{8} = 1250 \end{aligned}$$

   En consecuencia, la producción que se desea es 1250 unidades.

   *b*) ¿Cuáles son los ingresos totales en el punto de equilibrio?

   **Solución**: Ingresos totales $= 16q$
   En $q = 1250$ se tiene que ingreso total es $(16)(1250) = \$20,000$.

   *c*) ¿Hay pérdidas o ganancia cuando se fabrican y venden 1.000 unidades?

   **Solución**: cuando $q = 1000$

$$\begin{aligned} \text{Ingresos totales} - \text{Costos totales} &= (16)(1000) - 10000 - (8)(1000) \\ &= 16000 - 10000 - 8000 \\ &= -2000 \end{aligned}$$

   Se presenta una pérdida de \$2.000 cuando el nivel de producción es de 1.000 unidades.

7. La población proyectada $P$ de una ciudad esta dada por $P = 10^4 e^{0,05t}$ en donde $t$ es el número de años después de 1985. Pronosticar la población para el año 2005.

   **Solución**: De 1985 a 2005 van 20 años, luego $t = 20$. Entonces

$$P = 100000\mathrm{e}^{(0{,}05)(20)} = 100000\mathrm{e}^{1} = 100000\mathrm{e}$$

Como $\mathrm{e} \approx 2,71828$, tenemos que

$$P = (100000)(2,71828) = 271,828$$

Luego la población para el año 2005, será de 272 habitantes aproximadamente.

8. Se dice que *y varía directamente* con $x$ o que $y$ es *directamente proporcional* a $x$, cuando existe $k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$ tal que

$$y = ky$$

Cuando existe una constante $k \neq 0$ tal que

$$y = \frac{k}{x}$$

Se dice que *y varía inversamente* con $x$ o que $y$ es *inversamente proporcional* a $x$.

En ambos casos $k$ se llama constante de variación o de proporcionalidad.

**Observación:** Que *w varía conjuntamente* con $x$ e $y$ equivale a la existencia de $k \neq 0$ tal que

$$w = kxy$$

Escribir cada enunciado en relación funcional.

*a*) Los geólogos han encontrado, en estudios sobre la erosión de la tierra que la fuerza erosiva $P$ de una corriente rápida de agua varía directamente con la sexta potencia de la velocidad $v$ del agua.

*b*) El biólogo Reaumur propuso en 1735 que el tiempo $t$ que toma una fruta en madurar en la temporada de crecimiento varía inversamente con el promedio $T$ de la temperatura de los días de la temporada de crecimiento.

**Solución**:

(a) $P = kv^6$ ; (b) $t = \frac{k}{T}$

9. El n£mero $N$ de genes alterados que resulta de una exposición a los rayos X es directamente proporcional a la dosis $d$ de exposición. ¿Cuál es el efecto sobre $N$ si $d$ se cuadruplica?

**Solución**:

De los datos del problema se tiene: $N = kd$. Ahora si $d$ se cuadruplica, entonces $N = k(4d) = 4kd$. Luego $N$ también se cuadruplica.

10. Una variable $u$ varía directamente con la raíz cuadrada de $v$. Si $u = 10$ cuando $v = 4$, encontrar el valor de $u$ cuando $v = 8$.

    **Solución**:

    De la relación entre las variables, se tiene $u = k\sqrt{v}$. Ahora como $u = 10$ cuando $v = 4$, se tiene que $10 = k\sqrt{4}$, de donde $k = 5$.

    Luego $u = 5\sqrt{v}$. Ahora, si $v = 8$ se tiene que $u = 5\sqrt{8} = 10\sqrt{2}$. Por lo tanto, $u = 10\sqrt{2}$ cuando $v = 8$

11. Una compañía de seguros examinó los historiales de un grupo de personas hospitalizadas por una cierta enfermedad. Se descubrió que la proporción total de los que habían sido dado de alta al final de $t$ días de hospitalización está dado por $f(t)$, en donde

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3$$

    *a*) Evaluar $f(0)$ y $f(100)$

    *b*) ¿Al final de cuántos días se habrá dado de alta a la mitad de los pacientes ?

    **Solución**:

    (a) $f(0) = 1 - (\frac{300}{300+0})^3 = 1 - (\frac{300}{300})^3 = 1 - 1 = 0$

    $f(100) = 1 - (\frac{300}{300+100})^3 = 1 - (\frac{3}{4})^3 = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64} \approx 0,578$

    (b) La mitad de los pacientes corresponde a la proporción 0,5.

    Luego, $0{,}5 = 1 - (\frac{300}{300+t})^3$ , de donde, $(\frac{300}{300+t})^3 = 0,5$. Luego $t \approx 77,976$, es decir, aproximadamente en 80 días se habrá dado de alta a la mitad de los pacientes.

12. El n£mero de bacterias, $y$, en un cultivo en un tiempo $t$ (en días) está dado por la función $y = 50\mathrm{e}^{2t}$

    *a*) ¿Cuál es el n£mero de bacterias en el instante inicial ($t = 0$)?

    *b*) ¿En qué momento el n£mero de bacterias será el doble del inicial?

    **Solución**:

    (a) Cuando $t = 0$, se tiene $y = 50\mathrm{e}^{(2)(0)} = 50\mathrm{e}^0 = 50$. Luego, en $t = 0$ hay 50 bacterias.

    (b) La colonia tendrá 100 (que corresponde al doble del original) bacterias cuando $t$ satisfaga la relación: $100 = 50\mathrm{e}^{2t}$.

    De donde, $\mathrm{e}^{2t} = 2$, aplicando logaritmo natural se tiene: $2t = \ln 2$, luego $t \approx 0,346$

    Por lo tanto en aproximadamente $0,346$ días $= 8,32$ horas la colonia se duplica.

## 3.3. Ejercicios

1. Determinar dominio (usando la regla del máximo dominio) y recorrido de las funciones siguientes:

   (a) $f(x) = 2x + 3$ (b) $f(x) = 2x^2 - x - 5$
   (c) $f(x) = \frac{1}{2-x}$ (d) $f(x) = |x - 2|$
   (e) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ (f) $f(x) = \ln(x^2 + x - 12)$

2. Determinar el dominio (usando la regla del máximo dominio) de las funciones definidas por:

   (a) $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ (b) $f(x) = \frac{x-4}{2x^2+7x-4}$ (c) $f(x) = \sqrt{x+1}$
   (d) $f(x) = \sqrt{a^2 - x}$ (e) $f(x) = \ln(x - 3)$ (f) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$
   (g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ (h) $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$ (i) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

3. Considerar la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x > 9 \\ x^2 - |x| & \text{si } -9 \leqslant x \leqslant 9 \\ x - 4 & \text{si } x < -9 \end{cases}$$

   Determinar dominio, recorrido y la gráfica de $f$.

4. Probar que la función $f$, definida a continuación, es biyectiva y calcular su inversa:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

5. En caso de ser la función $f$, definida a continuación, biyectiva calcular y graficar $f^{-1}$:

$$f(x) = \begin{cases} 2(1 - x) & \text{si } x \leqslant 1 \\ -x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

6. Dadas las funciones $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ y $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ definidas de la siguiente manera $f(x) = x^2 + 3x + 1$, $g(x) = 2x - 3$. Se pide:

   *a*) Encontrar $(f{\circ}g)(4)$, $(g{\circ}f)(4)$ y $(f{\circ}f)(4)$
   *b*) Mostrar que en general $(f{\circ}g)(x) \neq (g{\circ}f)(x)$
   *c*) ¿Existe algún $x \in \mathbf{R}$ tal que $(f{\circ}g)(x) = (g{\circ}f)(x)$?

7. Considerar las funciones reales $f$ y $g$ definidas por :

$$f(x) = \frac{4x - 9}{6x - 5}, \quad g(x) = \frac{1}{4x - 9}$$

*a*) Determinar el dominio de $f \circ g$ . Calcular $(f \circ g)(x)$

*b*) Determinar $A, B \subseteq \mathbf{R}$ para que $g^{-1} : A \longrightarrow B$ sea función ($A$ dominio máximo). Encontrar $g^{-1}(x)$.

8. Considerar las funciones reales $f(x) = 2x^2 + 1$ y $g(x) = x - 3$.

   *a*) Determinar todos los $x$ tal que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.

   *b*) Determinar $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(g^{-1} \circ f)(x)$, $(f \circ g^{-1})(x)$.

9. Determinar $g(f(x))$ para las funciones $f$ y $g$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x > 0 \\ x + 2 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

10. Un alambre de 16 pulgadas de longitud se corta en dos trozos. Con uno de los pedazos se hace una circunferencia y con el otro un cuadrado. Determinar una función que exprese la suma de las áreas encerradas, por cada una de las figuras realizadas, en términos de la longitud de uno de los trozos.

11. Una hoja rectangular de un libro contiene una superficie de 12 pulgadas cuadradas impresas, con un margen de 1 pulgada tanto arriba como abajo, y 2 pulgadas en cada lado. Expresar el área total de la hoja en función del ancho de la parte impresa.

12. En pruebas de dietas experimentales para cerdos, se determinó que el peso promedio de los cerdos era una función lineal del número de días posteriores al inicio de la dieta; la dieta tuvo una duración máxima de 100 días. Si el peso de un cerdo al comienzo de la dieta ($t = 0$) era de 20Kg y después subió 6,6Kg cada 10 días.

    *a*) Determinar el peso $P$ como función del número de días $d$ posteriores al inicio de la dieta.

    *b*) Calcular el peso del cerdo 50 días después de haber comenzado la dieta.

    *c*) Determinar el peso que registrará el cerdo al final del máximo período de dieta.

13. Los siguientes datos muestran una relación entre ventas y publicidad:

| Gastos[1] en publicidad | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 | ··· |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ventas[2] | 151 | 149 | 147 | 145 | 150 | 155 | 160 | ··· |

1 *y* 2 *en miles de pesos*

    *a*) Determinar una función que represente la ventas en términos de los gastos en publicidad, sabiendo que los datos anteriores representan la política usual de ventas.

*b*) Representar en un diagrama cartesiano la función determinada. Indicar dominio y recorrido. En el lenguaje del problema, indicar cual es la variable ubicada en el eje horizontal, y cual en el eje vertical.

*c*) Predecir las ventas cuando los gastos en publicidad sean de \$5.000 y de \$85.000.

14. ¿Cuánto tiempo tardará en cuadruplicarse una cantidad de dinero, si se invierte al 20 % de interés compuesto continuo?, sabiendo que $A = P\mathrm{e}^{rn}$ representa la cantidad compuesta P en forma continua a la tasa de interés anual $r$ ($r$ es tanto por 1).

15. Calcular el monto compuesto al final de 5 años de \$1000 invertidos a una tasa nominal del 6 % con capitalización trimestral, sabiendo que $A_n = P(1+i)^n$ representa el valor actual al final de $n$ períodos donde $P$ es el capital inicial, $i$ la tasa de interés por período.

16. Calcular la tasa de interés compuesto anual, si se obtiene un monto de \$24.321.800 al cabo de 8 años, con un capital inicial de \$18.000.000.

17. Una importante función que se utiliza en decisiones económicas y de negocios es la *función densidad de la distribución normal* , que en su forma estándar es :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

Evaluar $f(0),\ f(-1),\ f(1)$. Proporcionar las respuestas con tres cifras decimales.

18. En un análisis de penetración de mercado por parte de nuevos productos, Hurter y Rubenstein hacen referencia a la función:

$$F(t) = \frac{q - p\mathrm{e}^{-(t+C)(p+q)}}{q\left(1 + \mathrm{e}^{-(t+C)(p+q)}\right)}$$

en donde $p, q$ y $C$ son constantes. Afirman que si $F(0) = 0$, entonces:

$$C = -\frac{1}{p+q}\ln\frac{q}{p}$$

Mostrar que la afirmación es cierta.

19. La ecuación de demanda para cierto producto es $q = 80 - 2^p$ . Despejar $p$ y expresar la respuesta en términos de logarítmo en base 10. Evaluar $p$ a dos cifras decimales cuando $q = 60$.

20. El estroncio 90 se utiliza en los reactores nucleares y se desintegra según la fórmula

$$A = P\mathrm{e}^{-0{,}0248t}$$

donde $P$ es la cantidad presente cuando $t = 0$ y $A$ es la cantidad restante después de $t$ años. Calcular la vida media del estroncio 90 (la vida media es el tiempo que toma la cantidad original en disminuir a su mitad).

21. En biología hay una regla aproximada, llamada regla biodinámica, que establece que la diferencia $d$ en tiempo para que una fruta madure (o para que aparezcan insectos) varía directamente con el cambio de altura $h$. Si $d = 4$ días cuando $h = 500$ pies. Encontrar $d$ cuando $h = 2{,}500$ pies.

22. La fuerza total $F$ del viento sobre la pared varía conjuntamente con el área $A$ de la pared y el cuadrado de la velocidad del viento. ¿Cómo se afecta la fuerza total sobre la pared si su área se reduce a la mitad y la velocidad se duplica?

23. Un rectángulo está inscrito en una circunferencia de radio igual a 3cm. Expresar el área $A$ del rectángulo como una función de la longitud $x$ de uno de sus lados. ¿Cuál es el dominio de la variable $x$?

24. Una ley de curación de las heridas es $A = B\mathrm{e}^{-\frac{n}{10}}$, siendo $A$ (en cm$^2$) el área dańada después de $n$ días, y $B$ (en cm$^2$) el área original dańada. Hallar el n£mero de días necesarios para reducir la herida a su tercera parte del área dańada.

## 3.4. Respuesta a los ejercicios de número impar

- 1) (a) $\mathrm{Dom}\, f = \mathrm{Rec}\, f = \mathbf{R}$ (c) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R} \setminus \{2\}$ ; $\mathrm{Rec}\, f = \mathbf{R} \setminus \{0\}$

  (e) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R}$; $\mathrm{Rec}\, f = ]0, +\infty[$

- 3) $\mathrm{Dom}\, f = \mathbf{R}$ , $\mathrm{Rec}\, f = ]-\infty, -13[ \cup ]-\frac{1}{4}, +\infty[$

- 5) $f$ es biyectiva. $f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ \frac{2-x}{2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

- 7) (a) $\mathrm{Dom}\,(f \circ g) = \mathbf{R} \setminus \{\frac{9}{4}, \frac{51}{20}\}$ ; $(f \circ g)(x) = \frac{36x-85}{20x-51}$

  (b) $A = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ ; $B = \mathbf{R} \setminus \{\frac{9}{4}\}$ , $g^{-1}(x) = \frac{1+9x}{4x}$

- 9) $(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2x + 9 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x^2 + 9 & \text{si } 0 < x < 1 \\ (x^2 + 2)^2 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

- 11) $x$: ancho parte impresa, $y$: largo parte impresa, $xy = 12$, $A = 20 + 2x + \frac{48}{x}$

- 13) (a) $v(x) = \begin{cases} \frac{795-2x}{5} & \text{si } 0 \leqslant x < 35 \\ x + 110 & \text{si } x \geqslant 35 \end{cases}$

  (c) $v(5) = 157$ miles de pesos, $v(85) = 195$ miles de pesos.

- 15) $A = 1000(1 + \frac{0{,}06}{4})^{20} \approx 1346,855$

- 17) $f(0) \approx 0,399$, $f(-1) \approx 0,242$, $f(1) \approx 0,242$

- 19) $P = \frac{\log(80-q)}{\log 2}$. Si $q = 60$, $p \approx 4,32$
- 21) 20 días
- 23) $A = x\sqrt{36 - x^2}$ , Dom $A = ]0, 6[$