CAPÍTULO

4

Polinomios y teoría de ecuaciones

4.1. Polinomios y teoría de ecuaciones

Un *polinomio real en* x, o simplemente *polinomio en* x es una expresión algebraica de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ son números reales y n es un número entero no negativo. Se deja al estudiante el estudio de la suma, diferencia, multiplicación y división de polinomios. Si $p(x)$ es un polinomio, $p(x) = 0$ se llama ecuación polinomial. Los ceros o raíces de $p(x)$ son las soluciones de la ecuación $p(x) = 0$.

4.2. Propiedades

1. **Teorema del resto**: Si un polinomio cualquiera, $p(x)$, se divide por un polinomio de grado 1 mónico, $x - a$, entonces el resto, r, de tal división es $p(a)$.

2. **Algoritmo de la división**: Dados $p(x)$ y $q(x)$ polinomios, $q(x) \neq 0$, existen dos únicos polinomios $s(x)$ y $r(x)$, llamados cuociente y resto, respectivamente, tales que $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, donde grado $r(x) <$ grado $q(x)$ ó $r(x) = 0$.

3. **Teorema del factor**: Si α es una raíz de $p(x)$, entonces $x - \alpha$ es un factor de $p(x)$.

Nota: El recíproco del teorema del factor también es válido, es decir, si $x - \alpha$ es un factor de $p(x)$, entonces α es una raíz de $p(x)$.

4. Si $p(x)$ es de grado $\geqslant 3$, entonces siempre puede representarse como un producto de factores lineales y/o cuadráticos de las formas $ax+b$, cx^2+dx+e, con a, b, c, d, e reales, respectivamente.

5. Toda ecuación polinomial real $p(x) = 0$ con grado de $p(x) \geqslant 1$, tiene por lo menos una raíz (real o compleja).

6. Toda ecuación polinomial de grado n tiene contando multiplicidades n y solamente n raíces (reales o complejas).

División sintética: Es una forma cómoda y simple de realizar una división entre un polinomio cualquiera y un polinomio de la forma $x - a$. Este método se ilustrará más adelante en base a ejercicios.

4.3. Raíces de polinomios

- **Relación entre raíces y coeficientes**

  Si $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$, entonces

$$\begin{array}{lcl} \text{suma de raíces de } p(x) & = & -a_{n-1}/a_n \\ \text{suma de productos de raíces} & = & a_{n-2}/a_n \\ \text{tomadas de dos en dos} & & \\ \text{suma de productos de raíces} & = & -a_{n-3}/a_n \\ \text{tomadas de tres en tres} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{producto de las raíces} & = & (-1)^n (a_0/a_n) \end{array}$$

- **Raíces racionales**: Si $p(x) = a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$ tiene coeficientes *enteros*, y si $\alpha = \dfrac{p}{q}$ es una raíz racional de $p(x)$, entonces p divide o es un factor de a_0 y q de a_n.

- **Raíces irracionales**: Si $a+\sqrt{b}$ es una raíz de $p(x)$ con coeficientes racionales, entonces $a - \sqrt{b}$ también lo es.

- **Raíces complejas**: Si $z = a + bi$ es raíz de $p(x)$, entonces $\bar{z} = a - bi$ también lo es. Luego todo polinomio real de grado impar tiene por lo menos una raíz real.

- **Raíces positivas**: $p(x)$ no puede tener más raíces positivas que el número de cambios de signos que hay en $p(x)$.

- **Raíces negativas**: $p(x)$ no puede tener más raíces negativas que el número de cambios de signos que hay en $p(-x)$.
- **Raíces nulas**: Si $p(x)$ tiene al 0 como raíz, entonces x es factor de $p(x)$.
- **Multiplicidad**: Si α es raíz de $p(x)$ se dice que α es de multiplicidad m, $m \in \mathbf{N}$, si y sólo si $(x-\alpha)^m$ divide a $p(x)$, pero $(x-\alpha)^{m+1}$ no lo divide.
- **Acotación de raíces**: En los ejemplos se mostrará un procedimiento para resolver el problema importante en teoría de ecuaciones y que consiste en lo siguiente: Dado $p(x)$ con coeficientes reales, se desea encontrar dos números reales m y n tales que si α es raíz de $p(x)$ entonces $n < \alpha < m$.

4.4. Ejemplos

1. Determinar el resto, r, de la división entre $p(x) = 3x^6 - 2x^4 - x^3$ y $x+1$

   Solución: Según Teorema del resto, $r = p(-1) = 3(-1)^6 - 2(-1)^4 - (-1)^3 = 2$

2. La *división sintética* permite encontrar, de manera simple, el cuociente y el resto de la división de un polinomio cualquiera, $p(x)$, y un polinomio de la forma $x - \alpha$. Por ejemplo si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, se dispone en la primera fila los coeficientes de $p(x)$ según potencias decrecientes de x, y se procede a completar la tabla como sigue:

   $$\begin{array}{c|lll} & a_2 & a_1 & a_0 \\ \hline \alpha & & \alpha a_2 & \alpha(a_1+\alpha a_2) \\ \hline & a_2 & a_1+\alpha a_2 & \boxed{a_0+\alpha(a_1+\alpha a_2)} \end{array}$$

   $s(x) = b_0 + b_1x$, con $b_1 = a_2$, $b_0 = a_1 + \alpha a_2$ es el polinomio cuociente.

   $r(x) = a_0 + \alpha(a_1 + \alpha a_2)$ es el resto de la división.

   Este proceso se generaliza a cualquier $p(x)$, por ejemplo si $p(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ se divide por $x+3$.

   $$\begin{array}{c|rrrrl} & 3 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ \hline -3 & & -9 & 27 & -75 & 225 \\ \hline & 3 & -9 & 25 & -75 & \boxed{226}\ \text{resto} \end{array}$$

   $s(x) = 3x^3 - 9x^2 + 25x - 75 \quad$ y $\quad r(x) = 226 = p(-3)$

3. Determinar si $p(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ es divisible por $x+2$. Además, calcular el cuociente de esta división.

Solución: El resto de la división entre $p(x)$ y $x+2$ es cero, en efecto

$$\begin{array}{r|rrrrrl} & 1 & 3 & 3 & 3 & 2 & \\ \hline -2 & & -2 & -2 & -2 & -2 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & = p(-2) \text{ resto} \end{array}$$

y el cuociente de tal división es $s(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

4. Probar que los números 1, $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ y $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ son raíces del polinomio $p(x) = x^3 - 1$

   Solución: Tenemos, que $p(1) = p(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}) = p(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}) = 0$, luego son raíces de $p(x)$.

5. Si $p(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x + 9$, probar que 3 es una raíz de $p(x)$ de multiplicidad 2.

   Solución: 3 es de multiplicidad 2 pues $(x-3)^2$, divide a $p(x)$ y $(x-3)^3$ no divide a $p(x)$ (verificarlo).

6. Encontrar todas las raíces racionales de $p(x) = 2x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 6x + 4$

   Solución: Si α es raíz racional de $p(x)$, entonces α es de la forma $\frac{p}{q}$, con $p,\ q \in \mathbf{Z},\ q \neq 0$

posibles p	$\pm1,\ \pm2,\ \pm4$ (divisores de 4)
posibles q	$\pm1,\ \pm2$ (divisores de 2)
posibles $\frac{p}{q}$	$\pm1,\ \pm1/2,\ \pm2,\ \pm4$

   Probando estos números se encuentra que:

$$\begin{array}{r|rrrrrl} & 2 & 5 & -7 & -6 & 4 & \\ \hline -1 & & -2 & -3 & 10 & -4 & \\ \hline & 2 & 3 & -10 & 4 & \boxed{0} & \Longrightarrow -1 \text{ es raíz} \end{array}$$

   luego, $p(x) = (x+1)(2x^3 + 3x^2 - 10x + 4)$

$$\begin{array}{r|rrrrl} & 2 & 3 & -10 & 4 & \\ \hline 1/2 & & 1 & 2 & -4 & \\ \hline & 2 & 4 & -8 & \boxed{0} & \Longrightarrow 1/2 \text{ es raíz} \end{array}$$

   Luego, $p(x) = (x+1)(x-1/2)(2x^2 + 4x - 8)$. Resolviendo la ecuación cuadrática, $2x^2 + 4x - 8 = 0$, se obtienen las restantes raíces que resultan ser irracionales, a saber: $x = -1 + \sqrt{5},\ x = -1 - \sqrt{5}$. En consecuencia, las raíces racionales de $p(x)$ son $x = -1$ y $x = 1/2$

7. Hallar todas las raíces de $p(x) = 4x^6 - 4x^5 + 17x^4 - 20x^3 - 15x^2$

   Solución: Se procede a hacer un análisis de la naturaleza de raíces:

   $p(x)$ tiene 2 raíces nulas ($x = 0$ es una raíz doble) ya que x^2 es factor de $p(x)$.

Al ver los signos de $p(x) = + - + - -$, se observa que hay 3 cambios de signo, luego, $p(x)$, tiene 3 ó 1 raíz positiva, (tiene al menos una raíz positiva).

Al ver los signos de $p(-x) = + + + -$, se observa un cambio, luego $p(x)$ tiene una raíz negativa, (tiene exactamente una raíz negativa).

$p(x)$ es de grado 6, luego tiene 6 raíces (reales o complejas).

Esta información se sintetiza en el siguiente cuadro que muestra las cantidades de raíces y las posibles combinaciones de cada tipo:

Nulas	$+$	$-$	Complejas
2	3	1	0
2	1	1	2

Las posibles raíces racionales son: $\pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5, \pm 15,\ \pm 1/2,\ \pm 3/2,\ \pm 5/2,\ \pm 15/2,$ $\pm\ 1/4,\ \pm 3/4,\ \pm 5/4,\ \pm 15/4.$

Como $p(-1) > 0$ y $p(-1/4) < 0$, hay una raíz real entre -1 y $-1/4$ (cambio de signo en $p(x)$), luego usando división sintética se obtiene que $x = -1/2$ es raíz (hacerlo). También se tiene que $p(1) < 0$ y $p(2) > 0$ (verificarlo), luego p(x) tiene otra raíz entre 1 y 2 igual a 3/2. Se deja al estudiante verificar usando división que 0, $-1/2$, $3/2$, $\sqrt{5}$i y $-\sqrt{5}$i son las raíces de $p(x)$.

8. Acotar las raíces de la ecuación $p(x) = 6x^5 + 27x^4 - 100x^3 - 200x - 50 = 0$

   Solución: Se efectúa la división de $p(x)$ por un polinomio cualquiera de la forma $x-m$. Se tantean diferentes valores para m hasta encontrar un cuociente en que ninguno de sus coeficientes sea negativo y para el cual también el resto sea positivo. Entonces toda raíz de $p(x)$ es menor que m. Así m es una cota superior de las raíces de $p(x)$.

   Para acotar inferiormente las raíces de $p(x)$ se acotan superiormente las raíces de $p(-x)$, ya que si n es una cota superior de las raíces reales de $p(-x)$, entonces $-n$ es una cota inferior de las raíces reales de $p(x)$

   Para $m = 1$ se tiene:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 6 & 27 & -100 & 0 & -200 & -50 \\ \hline 1 & & 6 & 33 & & & \\ \hline & 6 & 33 & -67 & & & \end{array}$$

   El proceso se detiene aquí por que salió un coeficiente negativo en el cuociente, lo que indica que deber haber una cota mayor que 1. Luego tomando $m = 3$ se tiene:

$$\begin{array}{c|cccccc} & 6 & 27 & -100 & 0 & -200 & -50 \\ \hline 3 & & 18 & 135 & 105 & 315 & 345 \\ \hline & 6 & 45 & 35 & 105 & 115 & 295 \end{array}$$

Luego 3 es una cota superior para las raíces de $p(x)$.

Ahora acotamos superiormente las raíces de $p(-x)$. Como $p(-x)$ tiene por coeficiente principal un número negativo, -6, el análisis se realiza con $-p(-x)$. Tomando $n = 7$ se tiene :

$$\begin{array}{c|cccccc} & 6 & -27 & -100 & 0 & -200 & -50 \\ \hline 7 & & 42 & 105 & 35 & 245 & 315 \\ \hline & 6 & 15 & 5 & 35 & 45 & 265 \end{array}$$

Por lo tanto, 7 es cota superior de las raíces reales de $p(-x)$, así -7 es cota inferior de las raíces reales de $p(x)$.

El 6 no sirve (verificarlo) . Luego, todas las raíces reales de $p(x)$ se encuentran entre -7 y 3.

9. En cursos más avanzados, sobre todo en cálculo y en ecuaciones diferenciales, es una gran ventaja tener la capacidad de expresar el cuociente de dos polinomios como la suma de dos o más cuocientes menos "complicados" denominados *fracciones parciales*. Se centrará la atención en cuocientes de la forma $\frac{p(x)}{q(x)}$ donde $p(x), q(x)$ son polinomios reales. Si el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$, entonces $\frac{p(x)}{q(x)}$ se denomina *fracción propia*.

   Cualquier fracción propia reducida $\frac{p(x)}{q(x)}$ se puede descomponer en la suma de fracciones parciales. Después de factorizar completamente $q(x)$ sobre los reales, sigue:

   a) Si $q(x)$ tiene un factor lineal que no se repite, de la forma $ax + b$, entonces la descomposición en fracciones parciales de $\frac{p(x)}{q(x)}$ contiene un término de la forma

   $$\frac{A}{ax+b}, \quad A \text{ constante}$$

   b) Si $q(x)$ tiene un factor lineal, que se repite k veces, de la forma $(ax+b)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales de $\frac{p(x)}{q(x)}$ contiene los términos de la forma:

   $$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

   Donde, $A_1, A_2, \ldots A_k$ son constantes.

   c) Si $q(x)$ tiene un factor cuadrático que no se repite, de la forma $ax^2 + bx + c$, entonces entonces la descomposición en fracciones parciales de $\frac{p(x)}{q(x)}$ contiene un término de la forma :

   $$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}, \quad A \;\; y \;\; B \text{ constantes}$$

d) Si $q(x)$ tiene un factor cuadrático, que se repite k veces, de la forma $(ax^2+bx+c)^k$, entonces la descomposición en fracciones parciales de $\frac{p(x)}{q(x)}$ contiene los términos de la forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

$A_1, A_2, \ldots A_k, B_1, B_2, \ldots B_k$ constantes.

El siguiente ejemplo ilustra lo anterior:

10. Descomponer $\frac{5x^2-8x+5}{(x-2)(x^2-x+1)}$ en fracciones parciales.

Solución: Observar, en primer lugar, que el factor cuadrático del denominador es irreducible con respecto a los números reales; entonces, aplicando la parte (a) y (c), se tiene:

$$\frac{5x^2-8x+5}{(x-2)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

De donde

$$\frac{5x^2-8x+5}{(x-2)(x^2-x+1)}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2-x+1)}$$

Usando el hecho que: Si dos fracciones con idéntico denominador son iguales, entonces los numeradores también lo son. Así, para todo x

$$5x^2-8x+5=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x-2)$$

Asignando a x tres valores distintos, por ejemplo $x=2$, $x=0$, $x=1$, se obtiene $A=3$, $C=-1$ y $B=2$, respectivamente. Luego:

$$\frac{5x^2-8x+5}{(x-2)(x^2-x+1)}=\frac{3}{x-2}+\frac{2x-1}{x^2-x+1}$$

4.5. Ejercicios

1. Determinar las constantes A, B, C para que se cumpla

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{2}{x-1}-\frac{9}{x-2}+\frac{8}{x-3},\ \text{donde } x\in\mathbf{R}\setminus\{1,2,3\}$$

2. Si $p(x)=x^3+bx^2+cx+d$, determinar valores reales para $b,\ c,\ d$ tales que se cumpla, simultáneamente, las dos condiciones siguientes :

   - $r(x)=2x+2$ debe ser el resto de la división de $p(x)$ por x^2-1

- El producto de las raíces de $p(x)$ debe ser 5.

3. Encontrar el cuociente y el resto al dividir:

(a)	$p(x) = 5x^6 - 2$	por $x + 1$
(b)	$p(x) = x^7 + 3x^6 + 2x^3 + 3^2 - x + 1$	por $x^4 - x + 1$
(c)	$p(x) = -x^4 + 7x^3 - 4x^2$	por $x - 3$

4. Descomponer en fracciones parciales :

(a) $\dfrac{x^3 + x^2 - 13x + 11}{x^2 + 2x - 15}$ (b) $\dfrac{5x^2 + 3x + 6}{x^3 + 2x^2 + 3x}$ (c) $\dfrac{2^3 + 7x + 5}{x^4 + 4x^2 + 4}$

(d) $\dfrac{4x^2 + 5x - 9}{x^3 - 6x - 9}$ (e) $\dfrac{7x - 4}{(x^2 + 2x + 1)(x - 3)}$ (f) $\dfrac{1}{x^4 - x}$

5. Encontrar los valores de a y b de manera que $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + ax + b$ sea divisible por $x^2 - 1$.

6. Determinar a y b de modo que $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 8$ sea divisible por $x - 1$, y que al dividirlo por $x - 2$ el resto sea 4.

7. Si el polinomio $p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 18x - 12$ se divide por $(x + 1)(x + 3)$ el resto es $2x + 3$, determinar a y b.

8. Sea $p(x) = x^4 + bx^3 - 13x^2 - 14x + 24$. Determinar $b \in \mathbf{R}$ de modo que -2 sea raíz de $p(x)$. Calcular las raíces restantes.

9. En cada caso comprobar, por división sintética, que el valor indicado para α es raíz del polinomio $p(x)$ y determinar las otras raíces reales (si existieran).

(a)	$p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5x - 2$	$\alpha = 1$
(b)	$p(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 3$	$\alpha = 3$
(c)	$p(x) = x^3 + 3x^2 - 4$	$\alpha = -2$

10. Sea $p(x) = 2x^5 + 10x^4 - 14x^3 - bx^2 + ax$. Si $p(1) = 0$ y $p(-5) = 0$, determinar a y b y escribir $p(x)$ como producto de factores de primer grado (si fuere posible).

11. Comprobar que 3 es una raíz múltiple de $p(x) = 3x^4 - 37x^3 + 147x^2 - 207x + 54$. ¿Cuál es su multiplicidad?

12. Determinar:

    a) Las raíces de $p(x) = x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 176x - 320$ si tiene una raíz multiple.

    b) Las raíces de $p(x) = x^5 - 7x^4 + 16x^3 - 32^2 + 15x - 25$ si i y $1 + 2$i también lo son.

    c) Las raíces de $p(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 2$ si $\sqrt{2}$ y $1 + \sqrt{2}$ también lo son.

d) Un polinomio de grado mínimo con coeficientes enteros que tenga las raíces 5 y $2 - 3\mathrm{i}$.

e) un polinomio de grado mínimo con coeficientes reales que tenga las raíces diferentes 1 y -3 y la raíz doble 2.

f) Un polinomio $p(x)$ de grado 4, con coeficientes reales tal que $p(2\mathrm{i}) = 0,\ p(2) = 6$ y la suma de sus raíces sea 2.

13. Calcular las raíces racionales de:

a) $3x^3 + 11x^2 + 8x - 4 = 0$

b) $5x^3 - 3x^2 - 55x + 33 = 0$

c) $x^7 - 3x^6 + x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$

d) $x^4 + 2x^3 + 11x^2 - 2x - 3 = 0$

e) $3x^5 - 4x^4 - 6x^3 + 4x^2 = 0$

f) $2x^6 - 5x^5 + 3x^4 - 13x^3 + 16x^2 + 12x = 0$

14. Determinar un polinomio $p(x)$ con coeficientes enteros, de menor grado posible y que satisfaga las condiciones que se indican en cada caso:

a) $p(1 - \sqrt{5}) = 0,\ p(1 + \mathrm{i}) = 0$ y $p(3) = 0$

b) $p(1 + 2\mathrm{i}) = 0\ p(\sqrt{5}) = 0$ y $p(1) = 3$

15. Calcular todas las raíces y factorizar completamente $p(x)$ sobre los números reales. Hacer, previamente, un análisis de la naturaleza de las raíces

$$p(x) = 2x^4 - 5x^3 + 15x^2 - 45x - 27$$

16. Mostrar que $p(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 5x - 5$ tiene una raíz positiva y determinar entre que enteros consecutivos se encuentra, justificar.

17. Determinar entre que enteros consecutivos existe una raíz real negativa del polinomio $p(x)$ que se indica a continuación. Calcularla con una aproximación de dos decimales:

$$p(x) = 4x^5 - 25x^4 + 14x^3 + 166x^2 - 294x + 63$$

18. El costo de fabricación de cierto producto está dado por $c(x) = 3x^3 + 4x^2 + 4x + 3$ y su precio de venta viene dado por $p(x) = x^4 - x^3 - 2$, donde x representa la cantidad de productos fabricados. Determinar el número de productos que se deben vender para que la ganancia sea nula.

19. Una caja rectangular tiene aristas $x,\ x^2$ y x^3. Determinar el polinomio que representa a la suma de todas sus aristas y el polinomio que representa al área total. Calcular los lados de la caja si la suma de sus aristas es $\frac{7}{2}$.

20. Para aumentar el volumen de una pieza cúbica se incrementa un lado de la pieza en 1m, la altura en 50cm y el otro lado al doble. Determinar todas las posibles medidas de la nueva pieza, sabiendo que queda con un volumen de 126m^3. Justificar adecuadamente su respuesta.

4.6. Respuesta a los ejercicios de número impar

- 1) $A = C = 1$, $B = 2$
- 3) (a) Cuociente $= 5(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$, resto $= 3$
  3) (c) Cuociente $= -x^3 + 4x^2 + 8x + 24$, resto $= 72$
- 5) $a = -3$, $b = 4$
- 7) $a = 4$, $b = -2$
- 9) (a) $(-7 + \sqrt{17})/8$, y $(-7 - \sqrt{17})/8$
  9) (c) 1 y -2
- 11) Multiplicidad 2
- 13) (a) -2 (doble) y 1/3
  13) (c) Sólo 3
  13) (e) 0 (doble) y el 2
- 15) $-\frac{1}{2}$, 3, 3i, -3i. La factorización en $\mathbf{R}$: $2(x-3)(x^2+9)(x+1/2)$
- 17) Entre -3 y -2. El valor con dos decimales: -2,65
- 19) Suma aristas: $S(x) = 4(x + x^2 + x^3)$; Area total: $A(x) = 2(x^3 + x^4 + x^5)$;
  Posibles medidas: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$