CAPÍTULO

5

Geometría analítica

En el tema de Geometría Analítica se asume cierta familiaridad con el *plano cartesiano*. Se entregan básicamente los conceptos más básicos y los principales resultados (*fórmulas*) que normalmente se requieren para resolver los ejercicios y problemas asociados a esta materia. Las justificaciones de estos resultados se trabajarán en clases.
En todo lo que sigue P, P_1, P_2 son puntos del plano de coordenadas $(x, y), (x_1, y_1)$ y (x_2, y_2) respectivamente.

5.1. Puntos y pendientes

1. La longitud del segmento $\overline{P_1P_2}$ es: $|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

2. Las coordenadas del punto P que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ (o su prolongación) en la razón $r = \dfrac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}, \quad r \neq -1$ son: $x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \quad y = \dfrac{y_1 + ry_2}{1 + r}$

3. Si P es el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$, entonces $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

4. La pendiente m de la recta que pasa por P_1 y P_2 es: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$

5. Sean L_1 y L_2 dos rectas de pendientes m_1 y m_2, respectivamente.

a) El ángulo α (agudo) determinado por L_1 y L_2 es tal que

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|, \quad m_1 \neq m_2$$

b) $L_1 \parallel L_2 \Longleftrightarrow m_1 = m_2$

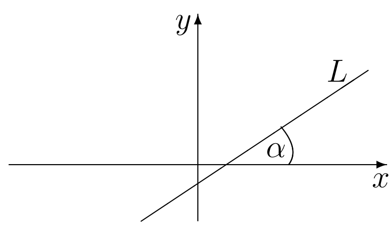
c) $L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1 m_2 = -1$

5.2. La línea recta

Dados $P_1 = (x_1, y_1)$ y m un número real. Se llama línea recta, que pasa por P_1 y pendiente m, al lugar geométrico de todos los puntos $P = (x, y)$ del plano tales que:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Nota: La relación anterior no incluye el caso de las rectas verticales.

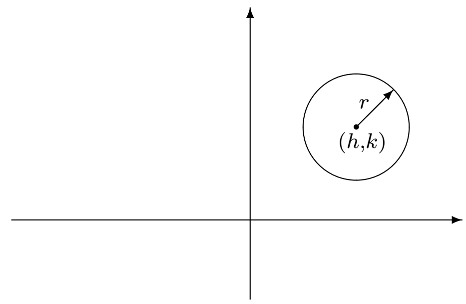


En la figura, α es el ángulo de inclinación de la recta L ($0 \leqslant \alpha < 180°$) y $m = \tan\alpha$ es la pendiente de L.

1. La ecuación de la recta paralela al eje Y que pasa por el punto $(h, 0)$, es: $x = h$
2. La ecuación de la recta paralela al eje X que pasa por el punto $(0, k)$, es: $y = k$
3. La ecuación de la recta de pendiente m y que pasa por P_1, es: $y - y_1 = m(x - x_1)$
4. La ecuación de la recta de pendiente m y ordenada b, es: $y = mx + b$
5. La ecuación de la recta que pasa por P_1 y P_2, es: $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_1 \neq x_2$
6. La forma general de la ecuación de una recta, es: $Ax + By + C = 0$, $A \neq 0$ o $B \neq 0$
7. La distancia de P_1 a la recta $Ax + By + C = 0$, es: $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

5.3. La circunferencia

Dados $C = (h, k)$ y $r > 0$. Se llama circunferencia, con centro C y radio r, al lugar geométrico de todos los puntos $P = (x, y)$ que cumplen $|\overline{CP}| = r$

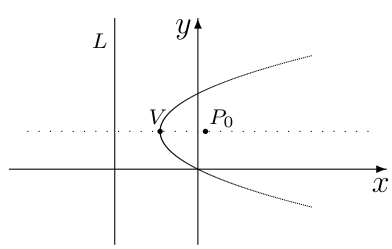


1. La circunferencia de centro (h, k) y radio r, es: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
2. La circunferencia de centro en el origen y radio r, es: $x^2 + y^2 = r^2$
3. La ecuación: $(*)$ $x^2+y^2+Dx+Ey+F = 0$ representa a una circunferencia cuando: $\Delta = D^2 + E^2 - 4F > 0$, en tal caso su centro es $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ y su radio es $\frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$.

Nota: Si $\Delta = 0$, $(*)$ representa el punto $(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ y si $\Delta < 0$, no hay puntos que satisfagan $(*)$.

5.4. La parábola

Sea L una línea recta y P_0 un punto del plano $(P_0 \notin L)$. Se llama parábola, con directriz L y foco P_0, al lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de L y P_0.



1. La distancia del vértice V al foco es p
2. Logitud del lado recto es $|4p|$

3. La ecuación de la parábola de vértice en el origen y eje el eje X, es: $y^2 = 4px$

   Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < 0$, se abre hacia la izquierda.

4. La ecuación de la parábola de vértice en el origen y eje el eje Y, es: $x^2 = 4py$

   Si $p > 0$, la parábola se abre hacia la arriba; si $p < 0$, se abre hacia abajo.

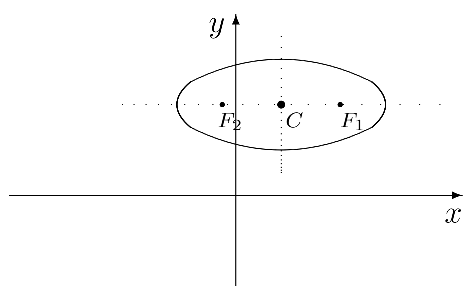
5. La ecuación de la parábola de vértice (h, k) y eje paralelo al eje X (foco: $(h + p, k)$), es:
$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

6. La ecuación de la parábola de vértice (h ,k) y eje paralelo al eje Y (foco: $(h, k + p)$), es:
$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

5.5. La elipse

Dados dos puntos distintos F_1 y F_2 y un número $a > 0$. Se llama elipse, con focos F_1 y F_2, al lugar geométrico de todos los puntos P del plano tales que:

$$|\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a$$



1. Longitud del eje mayor $= 2a$

   Longitud del eje menor $= 2b$

   Longitud del lado recto $= \dfrac{2b^2}{a}$

   Distancia del centro a uno u otro foco $= \sqrt{a^2 - b^2}$

   Excentricidad $e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$

   Relación entre las constantes a, b y c : $\quad a^2 = b^2 + c^2$

2. La ecuación de la elipse de centro en el origen, eje focal el eje X; focos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3. La ecuación de la elipse de centro en el origen, eje focal el eje Y; focos $(0, c)$ y $(0, -c)$:
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

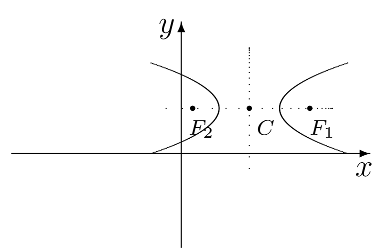
4. La ecuación de la elipse de centro en (h, k), eje mayor paralelo al eje X:
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

5. La ecuación de la elipse de centro en (h, k), eje mayor paralelo al eje Y:
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

6. La ecuación: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con A y C del mismo signo representa una elipse con ejes paralelos a los coordenados (o bien un punto o ningún lugar geométrico real).

5.6. La hipérbola

Dados dos puntos distintos F_1 y F_2 y $a > 0$. Se llama hipérbola, con focos F_1 y F_2, al lugar geométrico de todos los puntos P tales que:
$$||\overline{F_1P}| - |\overline{F_2P}|| = 2a$$



1. Longitud del lado recto $= \dfrac{2b^2}{a}$

   Distancia del centro a uno u otro foco $= \sqrt{a^2 + b^2}$

   Excentricidad $e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$

   Relación entre las constantes a, b y c : $\quad c^2 = a^2 + b^2$

2. La ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje focal el eje X; focos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$:
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3. La ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje focal el eje Y; focos $(0, c)$ y $(0, -c)$:
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

4. La ecuación de la hipérbola de centro en (h, k) y eje focal paralelo al eje X:
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

5. La ecuación de la hipérbola de centro en (h, k) y eje focal paralelo al eje Y:
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

6. La ecuación: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

   con A y C de distinto signo representa una hipérbola con ejes paralelos a los coordenados (o un par de rectas que se cortan).

7. La hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, tiene por asíntotas las rectas: $\left\{ \begin{array}{rcl} bx - ay & = & 0 \\ bx + ay & = & 0 \end{array} \right.$

5.7. Ejemplos

1. Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es el punto $A = (3, -2)$. Si la abscisa del otro extremo es 6, determinar su ordenada.

   Solución: Sea $B = (6, y)$ el otro extremo del segmento. Como $|\overline{AB}| = 5$, se tiene

$$\begin{array}{rcll} \sqrt{(6-3)^2 + (y-(-2))^2} & = & 5 & \quad /()^2 \\ 9 + (y+2)^2 & = & 25 & \\ y^2 + 4y - 12 & = & 0 & \\ (y+6)(y-2) & = & 0 & \end{array}$$

   de donde $y = -6$ o $y = 2$, luego este problema tiene dos soluciones.

2. Hallar el valor de k para que la recta $L_1 :\ kx + (k+1)y + 3 = 0$ sea perpendicular a la recta $L_2 :\ 3x - 2y - 11 = 0$

   Solución: La pendiente de L_1 es $m_1 = -\frac{k}{k+1}$ y la de L_2 es $m_2 = \frac{3}{2}$. Para que dos rectas sean perpendiculares, el producto de sus pendientes debe ser -1, luego

$$-\frac{k}{k+1} \cdot \frac{3}{2} = -1, \text{ de donde } \quad k = 2$$

3. La suma y el producto de los segmentos que una recta determina sobre los ejes coordenados es igual a 10 y 12 respectivamente. Hallar la ecuación de la recta que cumple con estas condiciones.

   Solución: Sea $L :\ y = mx + b$ la ecuación de la recta buscada.

   Intersección de L con el eje X: $y = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{b}{m}$.

   Intersección de L con el eje Y: $x = 0 \Longrightarrow y = b$

   De la primera condición se obtiene $-\frac{b}{m} + b = 10$ y de la segunda $(-\frac{b}{m})b = 24$, de donde se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -\frac{b}{m} + b &= 10 \\ -b^2 &= 24m \end{cases}$$

   De la segunda ecuación $m = -\dfrac{b^2}{24}$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{24}{b} + b &= 10 \qquad / \cdot b \\ 24 + b^2 &= 10b \\ b^2 - 10b + 24 &= 0 \end{aligned}$$

   de donde $\quad b = 6$ o $b = 4$. Si $b = 6$, entonces $m = -\frac{3}{2}$ y si $b = 4$, entonces $m = -\frac{2}{3}$. Luego, el problema tiene dos soluciones que son: $3x + 2y - 12 = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$

4. Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A = (0, 0)$; $B = (3, 6)$ y $C = (7, 0)$, indicando su centro y radio.

   Solución: La ecuación general de la circunferencia es: $(**)\ x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$. Como los tres puntos dados están en la circunferencia, sus coordenadas deben satisfacer $(**)$, sustituyendo los puntos A, B y C en $(**)$ se tiene respectivamente:

$$\begin{cases} 0^2 + 0^2 + 0 \cdot D + 0 \cdot E + F &= 0 \\ 3^2 + 6^2 + 3 \cdot D + 6 \cdot E + F &= 0 \\ 7^2 + 0^2 + 7 \cdot D + 0 \cdot E + F &= 0 \end{cases}$$

   es decir,

$$\begin{cases} F & = & 0 \\ 3D+6E+F & = & -45 \\ 7D+F & = & -49 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, se obtiene: $F = 0,\ D = -7,\ E = -4$. Luego, la ecuación de la circunferencia es: $x^2 + y^2 - 7x - 4y = 0$. Para determinar su centro y radio se escribe la ecuación en la forma: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, lo que se logra por el método "completar cuadrado".

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + y^2 - 4y + 4 - 4 &= 0 \\ (x^2 - 7x + \frac{49}{4}) + (y^2 - 4y + 4) &= \frac{65}{4} \\ (x - \frac{7}{2})^2 + (y-2)^2 &= (\frac{\sqrt{65}}{2})^2 \end{aligned}$$

De donde el centro de la circunferencia es $(\frac{7}{2}, 2)$ y su radio $\frac{1}{2}\sqrt{65}$.

5. La ecuación de una cónica es: $(***)\ \dfrac{x^2}{k+1} + \dfrac{y^2}{2-k} = 1$. Determinar los valores de k para que la cónica sea:

   a) Elipse

   b) Hipérbola centrada en el origen y focos en el eje X

   Solución:

   (a) Para que $(***)$ represente una elipse se debe tener: $k+1 > 0$ y $2-k > 0$, o sea, $k > -1$ y $k < 2$, es decir, $(***)$ corresponde a una elipse cuando $-1 < k < 2$. Notar que para $k = \frac{1}{2}$, $(***)$ representa a una circunferencia (¿Cuál es el centro y el radio de esta circunferencia?).

   (b) En este caso se debe tener: $k+1 > 0$ y $2-k < 0$, o sea, $k > -1$ y $k > 2$, es decir, $(***)$ es una hipérbola centrada en $(0,0)$ y focos en el eje X cuando $k > 2$.

6. Determinar el (o los) punto(s) donde la parábola $2x^2 + y = 8$ se intersecta con la recta $x - y = -5$.

   Solución:

   Para encontrar los puntos pedidos se debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x^2 + y & = & 8 \\ x - y & = & -5 \end{cases}$$

Despejando x en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera se tiene que:

$$2(y-5)^2 + y = 8, \text{ de donde } y = 6 \text{ o } y = 7/2$$

Sustituyendo estos valores en la expresión de x se obtiene que: si $y = 6$, entonces $x = 1$ y cuando $y = 7/2$, $x = -3/2$. Luego los puntos de intersección son $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$ y $(1, 6)$.

7. Bosquejar el gráfico de la desigualdad lineal

$$2x - 3y < 6$$

Solución:

La gráfica de una desigualdad consta de todos los puntos (x, y) del plano que la satisfacen. Para determinar estos puntos, en general, se procede de la siguiente manera:

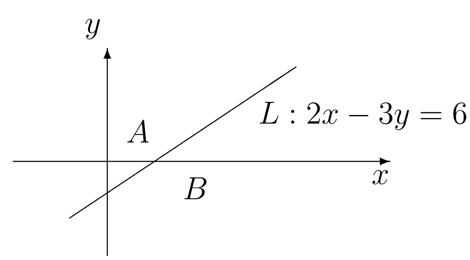
a) Se grafica la igualdad correspondiente (ecuación asociada a la desigualdad), en este caso, $2x - 3y = 6$.

b) La gráfica obtenida en (a) divide, en general, al plano en dos partes, digamos A y B, de las cuales una satisface la desigualdad en cuestión y la otra no la satisface.

c) Se escoge un punto en una de las partes, digamos A. Si tal punto satisface la desigualdad, entonces A es parte del conjunto solución buscado. Si el punto no satisface la desigualdad, entonces B es parte del conjunto solución.

d) Se verifica si los puntos que satisfacen la ecuación asociada son soluciones de la desigualdad.

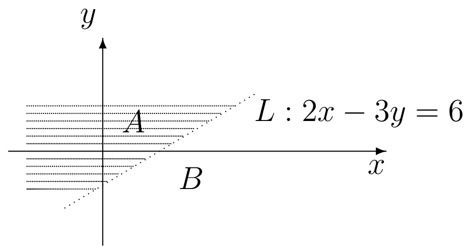
Apliquemos este procedimiento



Elijamos el punto $(0, 0)$ de la parte llamada A, y veamos si él satisface la inecuación:

$$(2)(0) - (3)(0) < 3$$

Como esta desigualdad es verdadera, se tiene que la región denominada por A constituye, en este caso, el conjunto solución buscado. Usualmente, este conjunto se grafica asi



Observar que los puntos de la recta $2x - 3y = 6$ no forman parte del conjunto solución, ésto se señala haciendo su gráfica con línea punteada.

8. Un comerciante de automóviles puede vender x automóviles de un modelo particular al fijar un precio de p por automóvil, con

$$x^2 + p^2 + 4000x + 2500p = 19437500$$

   a) Identificar la curva (curva de demanda) indicando sus principales elementos.
   Solución: La ecuación propuesta corresponde a una circunferencia de centro $(-2000, -1250)$ y radio 5.000. Por lo tanto, la curva de demanda corresponde al arco de esta circunferencia comprendida en el primer cuadrante, pues $x > 0$ y $p > 0$.

   b) ¿Cuál es el precio más alto por encima del cual no hay ventas posibles?
   Solución: Este precio, graficando la curva de demanda, corresponde al valor de p cuando $x = 0$, el que es igual a 3.332,58.

9. Un artículo que cuesta \$9 se vende en \$52 y otro que cuesta \$99 se vende en \$142. Si la política general de precios viene dada por una ecuación lineal.

   a) Encontrar una función que represente el precio de venta en términos del costo.
   Solución: Como la recta buscada pasa por los puntos $(9, 12)$ y $(99, 142)$ se tiene que su pendiente es $m = \frac{142-12}{99-9} = \frac{13}{9}$, luego la función buscada es:

$$p - 12 = \frac{13}{9}(c - 9), \text{ o sea , } p = \frac{13}{9}c - 1$$

   b) Determinar el costo de un artículo que se vende en \$80.
   Solución:
   Aquí, $p = 80$, luego el costo asociado debe satisfacer la relación:

$$\begin{aligned} 80 &= \tfrac{13}{9}c - 1, \text{ de donde} \\ c &= \tfrac{721}{13} \approx 55,46 \end{aligned}$$

c) Encontrar el precio de venta de un artículo que cuesta \$35.

Solución:

Aquí, $c = 35$, luego el precio asociado debe satisfacer:

$$\begin{aligned} p &= (\tfrac{13}{9})(35) - 1, \text{ de donde} \\ p &= \tfrac{446}{9} \approx 49,55 \end{aligned}$$

5.8. Ejercicios

1. Probar que los puntos $(2, -2)$, $(-8, 4)$ y $(5, 3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo, y hallar su área.

2. Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos $(0, 0), (1, 2)$ y $(3, -4)$.

3. Uno de los extremos de un segmento rectílineo de longitud 5 es el punto $(3, -2)$. Si la abscisa del otro extremo es 6 hallar su ordenada.

4. Los puntos medios de los lados de un triángulo son $(2, 5)$, $(4, 2)$ y $(1, 1)$. Hallar las coordenadas de los tres vértices.

5. Dos rectas se cortan formando un ángulo de 45 grados. La recta inicial pasa por los puntos $(-2, 1)$ y $(9, 7)$ y la recta final pasa por el punto $(3, 9)$ y por el punto A cuya abscisa es -2. Hallar la ordenada de A.

6. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -4, y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y - 8 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$.

7. El punto P de ordenada 10 está sobre la recta cuya pendiente es 3 y que pasa por el punto $(7, -2)$. Calcular la abscisa de P.

8. Hallar la pendiente, ángulo de inclinación y las intersecciones con los ejes coordenados de la recta que pasa por el punto $(2, 3)$ y es perpendicular a la recta $2x - 7y + 2 = 0$.

9. Sean L_1 la recta de ecuación $y + 8x = 0$ y L_2 la recta que pasa por el punto $(0, 18)$ y tiene pendiente -3. Se pide encontrar:

   a) El ángulo de inclinación de L_1.

   b) El punto B de intersección entre L_1 y L_2.

   c) El área del triángulo OBC, donde O es el origen y C es el punto donde L_2 corta el eje X.

10. Determinar el valor de k para que la recta $4x+5y+k = 0$ forme con los ejes coordenados un triángulo de área igual a $\frac{5}{2}$ unidades cuadradas.

11. Probar que la recta que pasa por los puntos $(4, -1)$ y $(7, 2)$ bisecta al segmento cuyos extremos son los puntos $(8, -3)$ y $(-4, -3)$.

12. Determinar el(los) valor(es) de k para que:

    a) La recta $L_1 : kx + (3 - k)y + 7 = 0$ sea perpendicular a la recta $x + 7y + 1 = 0$.

    b) La recta $L_2 : kx + (k - 1)y - 18 = 0$ sea paralela a la recta $3x - 2y - 11 = 0$.

    c) La recta $L_3 : (2 + k)x - (3 - k)y + 4k = -14$ contenga al punto $P(2, 3)$.

13. Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A(2, 3)$ y $B(-4, 5)$. Hallar la ecuación de dicha circunferencia.

14. Considerar la recta $L : x - \frac{3}{4} = 0$ y el punto C centro de la circunferencia cuya ecuación es: $9x^2 + 9y^2 - 36x + 6y + 34 = 0$. Determinar el lugar geométrico de todos los puntos P, tales que la distancia de P a L es igual a la distancia de P a C, donde $P = (x, y)$. La ecuación encontrada representa una cónica, reconocerla y determinar su foco.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $A(7, -5)$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $7x - 9y - 10 = 0$ y $2x - 5y + 2 = 0$.

16. Una circunferencia pasa por los puntos $A(-3, 3)$, $B(1, 4)$ y su centro está sobre la recta $3x - 2y - 23 = 0$. Hallar su ecuación.

17. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente a los ejes coordenados, de radio $r = 8$ y centro en el primer cuadrante.

18. Hallar las coordenadas del foco, la longitud del lado recto y la ecuación de la directriz de las parábolas siguientes:

    a) $x^2 = 8y$ b) $y^2 = 6x$ c) $3y^2 = -4x$
    d) $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$ e) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$

19. Hallar la ecuación de la parábola de foco el punto $(-2, 3)$ y lado recto el segmento entre los puntos $(-2, 2)$ y $(-2, 4)$.

20. Hallar la ecuación de la elipse de centro el origen, focos en el eje X y que pasa por los puntos $(-3, 2\sqrt{3})$ y $(4, 4\sqrt{\frac{5}{3}})$.

21. Hallar la ecuación de la elipse de centro $(4, -1)$, uno de los focos en $(1, -1)$ y que pasa por el punto $(8, 0)$.

22. Hallar la ecuación de la hipérbola de vértices $(6, 0), (-6, 0)$ y asíntotas $6y = 7x$, $6y = -7x$.

23. Hallar la ecuación de la hipérbola de centro el origen, ejes sobre los ejes coordenados y que pasa por los puntos $(3, 1)$ y $(9, 5)$.

24. Representar graficamente el conjunto solución de las siguientes inecuaciones y sistemas de inecuaciones.

    a) $y \leqslant x^2$

    b) $-1 < x \leqslant 2$

    c) $x^2 + y^2 > 2$

    $(d) \begin{cases} x^2 + y^2 & \leqslant & 5 \\ y^2 - x^2 & \leqslant & 3 \end{cases}$

    (e) $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16$

25. Los catetos de un triángulo rectángulo son $2x$ e y. La hipotenusa es $x + 2$.

    a) ¿Qué tipo de curva representa la ecuación que relaciona a x e y ?

    b) Graficar la "porción"de la curva que representa la situación planteada.

26. Al precio de p pesos por unidad, un fabricante puede vender x unidades de su producto, en donde x y p estan relacionadas por:

$$x^2 + p^2 + 400x + 300p = 60{,}000$$

    a) Dibujar la curva de demanda.

    b) ¿Cuál es el precio más alto por encima del cual no hay ventas posibles?

27. La órbita de la tierra es una elipse donde el sol está en uno de sus focos. Si el semieje mayor mide $1,495\text{x}10^8$km y la excentricidad es $\frac{1}{60}$. Calcular el afelio y el perihelio (máxima y mínima distancia al sol, respectivamente).

28. Al lanzar un objeto horizontalmente desde el techo de un edificio, dicho objeto describe una trayectoria parabólica según la ecuación:

$$y = -\frac{g}{2v^2}x^2$$

    donde $g \approx 10\frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$ (aceleración de gravedad); v denota la velocidad de lanzamiento horizontal en $\frac{\text{m}}{\text{seg}}$. Tanto x como y se suponen dados en metros.

    a) Si $v = 2\frac{\text{m}}{\text{seg}}$ y la altura del edificio es de 40m. ¿a qué distancia del pie del edificio el objeto golpea al suelo?.

    b) Para el mismo edificio anterior se desea que el objeto golpee el suelo a 10m del pie del edificio ¿con qué velocidad debe ser lanzado?

29. Un vaso cilíndrico mide 3,5cm de radio y 13cm de alto; al inclinarlo, la superficie del líquido que contiene, toma forma elíptica, ¿cuáles son las dimensiones del eje mayor y eje menor de la elipse de mayor tamaño que así se puede formar?.

30. El tubo de una chimenea, que mide 12cm de radio, atraviesa el techo de una casa, estando éste inclinado en $60°$ con respecto a la horizontal. Calcular las medidas de los ejes mayor y menor del orificio elíptico a través del cual pasa el tubo.

5.9. Respuesta a los ejercicios de número impar

- 1) La pendiente del segmento que une el primer y segundo punto es $-3/5$ y la que une el primer y tercer punto es $5/3$. Como el producto de ellas es -1, se tiene que el ángulo que forman los lados indicados es $90°$. El área es 34 (unidades de longitud)^2.
- 3) Dos soluciones: $x = 2,\ x = -6$
- 5) Dos soluciones: $y = -8,\ y = 178/17$
- 7) $x = 11$
- 9) (a) $\approx 97°7'$ (b) $(-18/5, 144/5)$ (c) $432/5$ unidades de área
- 13) $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 10$
- 15) $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 58$
- 17) $(x-8)^2 + (y-8)^2 = 64$
- 19) Dos soluciones: $(y-3)^2 = 2(x+5/2)$, $(y-3)^2 = -2(x+3/2)$
- 21) $\frac{(x-4)^2}{18} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$
- 23) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$
- 25) Elipse de ecuación: $9(x-2/3)^2 + 3y^2 = 16$
- 27) Afelio $= 1,52\text{x}10^8$km Perihelio $= 1,47\text{x}10^8$km
- 29) Eje mayor 14,76cm Eje menor 7cm