CAPÍTULO

6

Límite y Continuidad de Funciones

6.1. Límite de una función

La noción de límite es la base del cálculo. Decir que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ significa que es posible hacer que los valores de $f(x)$ sean *tan cercanos* al número L como se desee, haciendo que x *se aproxime* lo suficiente a a.

Propiedades de los límites

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ existen y son iguales a L y M respectivamente, y si c es una constante, entonces:

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$, es decir,

   El límite de una función constante es la misma constante.

2. $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$, es decir,

   El límite de la suma o diferencia de dos funciones es igual a la suma o diferencia de los límites de ambas funciones.

3. $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$, es decir,

   El límite de una constante por una función es igual a la constante por el límite de dicha función.

4. $\lim\limits_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \lim\limits_{x \to a} g(x)$, es decir,

El límite del producto de dos funciones es igual al producto de los límites de ambas funciones.

5. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, si $g(x)\neq 0$ en las *cercanías* de a y $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$, es decir,

   El límite del cuociente de dos funciones es igual al cuociente de los límites de ambas funciones.

6. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)^{g(x)})=(\lim\limits_{x\to a}f(x))^{(\lim\limits_{x\to a}g(x))}$ si ambos lados están bien definidos.

7. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$

8. Si f es una función polinomial, entonces $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$, es decir,

   Para encontrar el límite de un polinomio cuando x tiende a a, basta *sustituir* a en dicho polinomio.

Nota: Como se comento, la propiedad 8 dice que se puede encontrar el límite de una función polinomial por simple sustitución de x por a. Sin embargo, con otras funciones la sustitución puede llevar a fórmulas indeterminadas, es decir que carecen de sentido, como por ejemplo, a la forma $\frac{0}{0}$, ó a la forma 0^0, etc. En estos casos, la manipulación algebraica, tales como: la factorización, la racionalización, etc., pueden dar como resultados una forma a partir de la que pueden determinarse los límites.
Si $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a por la derecha se escribe: $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=L$. De manera similar, si $f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a por la izquierda, entonces se tiene $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=L$.
Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ que *no* representan un número, se utilizan para describir límites. El símbolo ∞ representa al $+\infty$ y al $-\infty$.
El planteamiento $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ significa que cuando x aumenta indefinidamente sin cota superior, los valores de f(x) tienden al número L. Análogamente, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=L$ significa que cuando x toma valores negativos de valor absoluto muy grandes, $f(x)$ se aproxima al número L.
Decir que el límite de una función es $+\infty$ ó $-\infty$ no significa que exista ese límite, es más bien una forma de decir que el límite no existe y además se dice por qué no existe.
Límites especiales

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=\mathrm{e}^a$

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$

6.2. Continuidad de Funciones

Una función que no tiene interrupciones en su gráfica cuando x es a se dice que es continua en a. Si no es así, es discontinua en a.
Formalmente, f es continua en a si y sólo si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. $f(a)$ existe

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Una función f es continua en un conjunto A si y sólo si f es continua en cada punto de A.
Si f y g son continuas en un conjunto A, también lo son: $f \pm g,\ fg,\ \frac{f}{g}$ con $g \neq 0$.
Si $g(t)$ es continua en $t = a$ y $f(x)$ es continua en $b = g(a)$, entonces $f \circ g$ es continua en $t = a$.
Son funciones continuas en $\mathbf{R}$, los polinomios, las funciones seno, coseno, la función exponencial . Las funciones racionales (cuociente de dos polinomios) son continuas en todo $\mathbf{R}$ salvo en aquellos puntos donde el denominador se anula, en tales puntos la función es discontinua.
Las funciones logarítmica, cosecante, secante, tangente y cotangente son contínuas en sus respectivos dominios de definición.
Tipos de discontinuidad

1. Discontinuidad *reparable* en un punto $x = a$. Se da en el caso que los límites laterales en a son iguales, pero distintos de $f(a)$. distintos a $f(a)$.

2. Discontinuidad *irreparable* en un punto $x = a$. Se da en los siguientes casos:

   - Los límites laterales en a son distintos (Discontinuidad de salto).
   - A lo menos uno de los límites laterales en a no existe.

6.3. Ejemplos

1. Sea $y = f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$. Analizar, usando tabla de valores, el comportamiento de f "cerca"de $x = 1$ (matemáticamente, ésto se dice: en una vecindad de $x = 1$)

   Solución: Notar que 1 no pertenece al dominio de f. Para analizar el comportamiento de f cerca del 1, nos *acercamos* al 1 tanto por la izquierda como por la derecha.

Por la izquierda, se toman valores cercanos a 1 y menores que él, la siguiente tabla es de utilidad:

x	0,6	0,8	0,9	0,99	0,999	$\cdots \longrightarrow 1^-$
$f(x)$	1.96	2.44	2.71	2.9701	2.997	$\cdots$

Por la derecha, se toman valores cercanos al 1 y mayores que él

x	1,4	1,2	1,1	1,01	1,001	$\cdots \longrightarrow 1^+$
$f(x)$	4.36	3.64	3.31	3.0301	3.003	$\cdots$

Por lo tanto, cuando nos acercamos al 1 por la izquierda, $f(x)$ se acerca cada vez más a 3, y lo mismo ocurre si nos acercamos por la derecha al 1. Luego, se puede inferir que cuando x se acerca a 1, $f(x)$ tiende a 3. Observar que en este estudio *no interesa* el comportamiento de la función *en el punto*, sino a *su alrededor*, ésto es algo que no se debe olvidar!

2. Calcular los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x^2+5x-8}{4x^3+9x-7}$
   Solución: Aplicando las propiedades de los límites, se obtiene:

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+5x-8}{4x^3+9x-7}=\frac{3\lim\limits_{x\to 2}x^2+5\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}8}{4\lim\limits_{x\to 2}x^3+9\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}7}=\frac{3\cdot 4+5\cdot 2-8}{4\cdot 8+9\cdot 2-7}=\frac{14}{23}$$

   b) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+6x-27}{x^2-2x-3}$
   Solución: Tanto el numerador como el denominador se anulan para $x=3$, luego no se puede aplicar el método del ejercicio anterior, el procedimiento consiste en factorizar por $(x-3)$ y luego simplificar, es decir:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+6x-27}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+9)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+9}{x+1}=\frac{12}{4}=3$$

   c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}$
   Solución: Se tiene

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x-2)}$$

   El límite del numerador es 6 y el del denominador es 0, luego el límite pedido es ∞.

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{3x-3}\right)^x$

Solución: Usando límites especiales se tiene,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{3x-3}\right)^x &= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x-3+4}{3x-3}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{4}{3x-3}\right)^x \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{3x-3}{4}}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x-3}{4}}\right)^{(3x-3)/4}\right)^{4x/(3x-3)} \\
&= \mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x}{3x-3}} = \mathrm{e}^{4/3} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^4}
\end{aligned}$$

e) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 10x}{3x}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 10x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{10\sin 10x}{3(10x)} = \lim_{x\to 0} \frac{10}{3}\frac{\sin 10x}{10x} = \frac{10}{3}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 10x}{10x} = \frac{10}{3}$$

f) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)$

Solución: El numerador y el denominador tienden a 0 cuando x tiende a 0, luego el límite es de la forma $\frac{0}{0}$. La indeterminación se deshace de la siguiente manera:

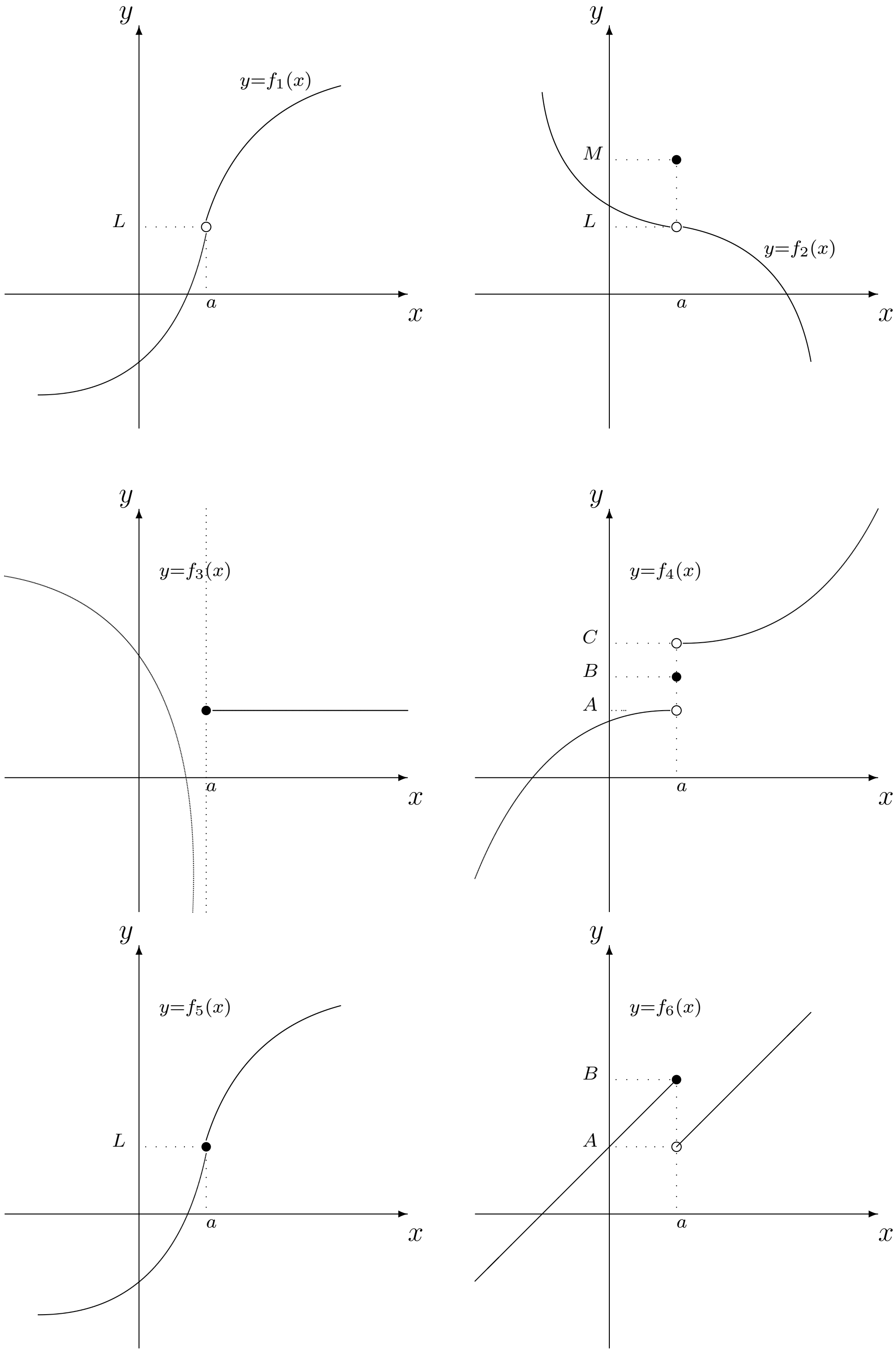
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{1-\cos x}\right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(1+\cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+\cos x)}{\sin x} = \infty
\end{aligned}$$

g) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+8x-10}{9x^2-7x+1}$

Solución: El límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, luego simplificando la fracción por x^2, se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3+\frac{8}{x}-\frac{10}{x^2})}{x^2(9-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \left(3+\frac{8}{x}-\frac{10}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(9-\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \text{ pues } \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

3. Considerar las gráficas de las siguientes funciones:



a) ¨Cuáles de las funciones precedentes son continuas y cuáles discontinuas en $x = a$?
Solución: Es continua en $x = a$ sólo la función f_5, ya que no presenta *cortes* o *saltos* o *interrupciones*; las restantes son discontinuas en $x = a$.

b) Se afirma que la función f_1 es discontinuidad reparable en $x = a$. Justificar lo anterior, e indicar como se repara.

Solución: La función en cuestión tiene esa característica debido a que

$$\lim_{x\to a^-} f_1(x) = \lim_{x\to a^+} f_1(x) = \lim_{x\to a} f_1(x) = L$$

De las tres condiciones necesarias para la continuidad falla la primera, es decir, $f(a)$ no existe. La *reparación* se hace redefiniendo f_1 de la manera siguiente: $f_1(a) = L$ y $f_1(x)$ igual que antes para $x \neq a$.

Se sugiere, determinar el tipo de discontinuidad para las restantes funciones.

4. Considerar $f(x) = \frac{x^3+1}{x+1}$ ¿Es continua en $x = -1$? ¿Cómo se podría reparar la función para que sea continua en todo punto?

   Solución: Se tiene que $f(x)$ es discontinua en $x = -1$ pues no existe $f(-1)$. Falla la condición 1 de la definición de continuidad en un punto.

   El límite $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1}$ es de la forma $\frac{0}{0}$ (expresión indeterminada). Factorizando el numerador y luego simplificando se obtiene:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x^2-x+1) = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3$$

   f es discontinua reparable en $x = -1$. Luego, definiendo $f(-1) = 3$, la función será continua en todo número real. La función redefinida quedaría:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{x+1} & \text{si } x \neq -1 \\ 3 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

5. Estudiar la continuidad de $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$

   Solución: Una forma equivalente para la ecuación que define f es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ \frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Como $(1+x)$ no se anula para $x \geqslant 0$ y $(1-x)$ no se anula para $x < 0$, la función es continua en todo $\mathbf{R}$.

6. Estudiar la continuidad de $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3+7x-8}$ en $\mathbf{R}$.

   Solución: f es una función racional. El numerador y el denominador son funciones polinómicas, luego continuas. Los únicos puntos de discontinuidad posibles son aquellos en que se anula el denominador. Como,

$$x^3 + 7x - 8 = (x-1)(x^2+x+8)$$

se tiene que el denominador se anula para $x = 1$ (el factor $x^2 + x + 8$ no tiene raíces reales). En consecuencia, el único punto de discontinuidad es el 1, ya que no existe $f(1)$.

Para ver si la discontinuidad es reparable o no en $x = 1$, se analiza el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 7x - 8} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+x+8)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2+x+8} = \frac{1}{5}$$

Como el límite existe se trata de una discontinuidad reparable.

6.4. Ejercicios

1. Analizar el comportamiento de la función f "cerca" de $x = 2$. ¿Cuando se acerca al 2 por la izquierda, hacia dónde se acercan las imágenes?. Idem por la derecha. ¿Qué se puede concluir?

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 2, & \text{si } x \leqslant 2 \end{cases}$$

2. Completar la siguiente tabla de valores e inferir el valor de los límites indicados:

$f(x) = \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{4}{5}}{x-4}$; $\quad \lim_{x\to 4^-} f(x)$; $\quad \lim_{x\to 4^+} f(x)$; $\quad \lim_{x\to 4} f(x)$

x	3.5	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1	4.5
$f(x)$								

3. Usando una tabla de valores calcular aproximadamente:

(a) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{3}$ (b) $\lim_{x\to -1} (1 - x^2)^{-1/2}$ (c) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

4. Usando límites especiales calcular:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\ 2x}{\sin\ 3x}$ (b) $\lim_{h\to 0} \frac{(1-\cos\ h)^2}{h}$ (c) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin\ 2x}{x + \sin\ 3x}$

(d) $\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$ (e) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\ 2x}{x}\right)^{1+x}$ (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2}$

5. Encontrar los siguientes límites:

(a) $\lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 1)$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-5}{2x^3+6}$ (c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1-x^3}{x^2-3x+4}$ (d) $\lim_{x\to 3} \frac{2x^3-5x^2-2x-3}{4x^3-13x^2+4x-3}$

(e) $\lim_{x\to \frac{3}{2}} \sqrt{\frac{8x^3-27}{4x^2-9}}$ (f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ (g) $\lim_{x\to +\infty} \frac{7-5x^2}{x^3+3x}$ (h) $\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^3+2x^2-5}{8x^3+x+2}$

(i) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ (j) $\lim_{x\to 3} \frac{4x^2}{9-x^2}$ (k) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{3+x^2}}{x}$ (l) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$

6. Considerar la función g definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{1-\sqrt{1-(x-3)}} & \text{si } x \neq 3 \\ a & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

   Determinar a de modo que g sea continua en $x = 3$.

7. Considerar la función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ x^2+3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

   (a) Hallar $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ (b) Hallar $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ (c) ¿ Existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$?

8. Trazar la gráfica de una función $y = f(x)$ definida en $\mathbf{R}$ que cumpla simultáneamente cada una de las siguientes condiciones:

   (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = +\infty$ (c) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

   (d) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ (e) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ (f) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 2$

9. Sean $f(x) = 3x^2 + 1$ y $g(x) = \frac{1+x}{3-x}$. Calcular:

   (a) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (b) $\lim\limits_{k \to 0} \frac{g(x+k)-g(x)}{k}$

10. La siguiente función podría describir el inventario, y, de una compañía en el tiempo x.

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 600 & \text{si } x \in [0,5[\\ -100x + 1100 & \text{si } x \in [5,10[\\ -100x + 1600 & \text{si } x \in [10,15[\end{cases}$$

   Determinar si f es continua en $x = 5$ y en $x = 10$.

11. Analizar la discontinuidad de las siguientes funciones, en caso de ser discontinua redefinirla para que lo sea (cuando sea posible). Comprobar gráficamente.

   (a) $f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } x > 3 \\ -1 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 8-3x & \text{si } 1 < x < 2 \\ x+3 & \text{si } 2 \leqslant x \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{|x-3|} & \text{si } x \neq 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$ (d) $f(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-4} & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } 1x = 4 \end{cases}$

12. Considerar las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   a) Trazar la gráfica de f y la de g.

   b) Mostrar que ambas son discontinua en 0. Justificar.

   c) Mostrar que la función producto (fg) es continua en 0.

13. La siguiente tabla muestra el número de unidades que los consumidores demandarían de un producto específico cada semana a diversos precios.

precio / unidad, p	20	10	5	4	2	1
cantidad por semana, q	0	5	15	20	45	95

   Describir esta situación, en forma gráfica (diagrama cartesiano), mediante una función continua estrictamente decreciente. A partir de esta gráfica, estimar la demanda que habría para un precio de \$3.

6.5. Respuesta a los ejercicios de número impar

- 1) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1, \quad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 6$. Se puede concluir que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ no existe.
- 3) (a) $\sqrt{3}$ (c) $+\infty$
- 5) (a) 7 (c) $-\infty$ (e) $\frac{3}{\sqrt{2}}$
  (g) 0 (i) no existe (k) $+\infty$
- 7) (a) 3 (b) 7 (c) no existe (límites laterales distintos)
- 9) (a) $6x$ (b) $\frac{4}{(3-x)^2}$
- 11) (a) Discontinua reparable en $x = 3$. Nueva definición para f es

$$f(x) = \begin{cases} x+6 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } x > 3 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

  11) (c) Discontinua irreparable en $x = 3$, ya que $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{|x-3|}$ no existe (los límites laterales son 1 y -1).
- 13) Aproximadamente la demanda es de 33 unidades.