CAPÍTULO

7

Derivación de Funciones

Sea f una función definida al menos en un intervalo abierto que incluya al número x. Si

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

existe (*finito*), se llama la *derivada de* f en x, y se denota $f'(x)$.
Otras notaciones de uso frecuente para la derivada de $y=f(x)$ son: $\frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}(f(x)),\ y',\ f'(x)$.
Nota: Toda función derivable en un punto es continua en ese punto. El recíproco de esta observación *no es válido*.

7.1. Fórmulas básicas de derivación

1. $(c)'=0,\ c$ constante, es decir,

   La derivada de una función constante es igual a cero.

2. $(x^n)'=nx^{n-1}, \quad n\in\mathbf{R}$

3. $(cf(x))'=cf'(x),\ c$ constante, es decir,

   La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

4. $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$, es decir,

La derivada de la suma o diferencia de funciones es igual a la suma o diferencia de las derivadas de las funciones.

5. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$, es decir,

   La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda más la derivada de la segunda función por la primera.

6. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$, es decir,

   La derivada del cuociente de dos funciones es igual al cuociente *entre* la derivada del denominador por el numerador **menos** el numerador por la derivada del denominador y el denominador al cuadrado.

   En lo que sigue y es función de u, y u es función de x.

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$

8. $\dfrac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$, es decir,

   La derivada de una potencia es igual al exponente por la base elevada al exponente menos 1 y todo esto multiplicado por **la derivada de la base**.

9. $\dfrac{d}{dx}(\log_b u) = \dfrac{1}{u}\log_b \mathrm{e}\dfrac{du}{dx}$

10. $\dfrac{d}{dx}(a^u) = a^u(\ln a)\dfrac{du}{dx}$

11. $\dfrac{d}{dx}(\sin u) = u'(\cos u)$

12. $\dfrac{d}{dx}(\cos u) = -u'(\sin u)$

13. $\dfrac{d}{dx}(\tan u) = u'(\sec^2 u)$

7.2. Derivadas implícitas y sucesivas

Si una relación define en forma implícita a y como función de x, entonces se puede evaluar $\dfrac{dy}{dx}$ mediante derivación implícita. Hay que tener presente, por ejemplo, que

$$\frac{d}{dx}(y^n) = ny^{n-1}\frac{dy}{dx}$$

Puede utilizarse el método de derivación logarítmica para derivar $y = f(x)$ cuando $f(x)$ consiste en productos, cuocientes, potencias o cuando $f(x)$ es de la forma u^v, donde tanto u como v son funciones de x.

Debido a que la derivada $f'(x)$ de una función $y = f(x)$ es en sí misma una función, se le puede derivar en forma sucesiva para obtener la segunda derivada $f''(x)$, la tercera derivada $f'''(x)$ y otras derivadas de orden superior.

7.3. Interpretación de la derivada

En lo que sigue se supone que la derivada existe.

- Geométricamente, la derivada $f'(x)$ da la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$. La ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto específico de ella, (a, b), es $y - b = f'(a)(x - a)$
- En una ecuación de movimiento rectilíneo $s = s(t)$, en donde s es la posición en el tiempo t, entonces la derivada $\frac{ds}{dt}$ da la velocidad en el tiempo t.
- También se puede interpretar la derivada $\frac{dy}{dx}$ como la razón de cambio o la tasa (instantánea) de cambio de y con respecto a x

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{cambio en y}}{\text{cambio en x}}$$

- En Economía se utiliza el término *marginal* para describir las derivadas de tipo específicos de funciones, por ejemplo:
    - Si $c = f(q)$ es una función de costo total (c es el costo total de q unidades de un producto), entonces la tasa de cambio $\frac{dc}{dq}$ se denomina *costo marginal*.

      Se interpreta el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional de producción. (El costo promedio por unidad, $\bar{c}$, está relacionado con el costo total c mediante $\bar{c} = \frac{c}{q}$).
    - Una función de ingreso total, $r = f(q)$, da el ingreso r de un fabricante por la venta de q unidades de un producto. (El ingreso r y el precio p están relacionados mediante $r = pq$). A la tasa de cambio $\frac{dr}{dq}$ se denomina *ingreso marginal*.

      Se interpreta el ingreso marginal como el ingreso aproximado que se obtiene por la venta de una unidad adicional de producción.
    - Si r es el ingreso que recibe un fabricante cuando se vende la producción total q, elaborada por m obreros, a un precio p por unidad, entonces a la derivada $\frac{dr}{dm}$ se denomina *producto de ingreso marginal* y está dada por:

      $$\frac{dr}{dm} = \frac{dq}{dm}\left(p + q\frac{dp}{dq}\right)$$

      El producto de ingreso marginal proporciona el cambio aproximado en los ingresos que se producen cuando el fabricante contrata un trabajador extra.

- Si $C = f(I)$ es una función de consumo, en donde I es el ingreso nacional y C es el consumo nacional, entonces $\dfrac{dC}{dI}$ es la *propensión marginal al consumo*. $1 - \dfrac{dC}{dI}$ es la *propensión marginal al ahorro*.

- Para cualquier función la *tasa de cambio relativa* de $f(x)$ es $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, que compara la tasa de cambio de $f(x)$ con la propia $f(x)$. La tasa de cambio porcentual es $\dfrac{f'(x)}{f(x)}100$

7.4. Monotonía, valores extremos, concavidad y puntos de inflexión de una función

7.4.1. Monotonía

- **Función creciente:** Si la función $y = f(x)$ es derivable en $]a, b[$, entonces f es creciente en $]a, b[$, si y sólo si $f'(x) \geqslant 0$ en $]a, b[$. La gráfica de f *asciende de izquierda a derecha.*

- **Función decreciente:** Si la función f es derivable en $]a, b[$, entonces f es decreciente en $]a, b[$, si y sólo si $f'(x) \leqslant 0$ en $]a, b[$. La gráfica de f *desciende de izquierda a derecha.*

7.4.2. Valores extremos

- **Máximo (Mínimo) Absoluto:** Una función f definida en $[a, b]$ tiene un máximo (mínimo) absoluto en el punto x_0, si y sólo si $f(x) \leqslant f(x_0) \quad (f(x) \geqslant f(x_0))$, para todo x en $[a, b]$. En tal caso $f(x_0)$ se llama valor máximo o simplemente máximo (mínimo) absoluto de f.

- **Máximo (Mínimo) Local o Relativo:** Una función f tiene un máximo (mínimo) relativo en el punto x_0, si y sólo si f tiene un máximo (mínimo) absoluto en x_0, en algún entorno de x_0.

- **Necesidad para la existencia de valores extremos:** Sea f definida en $[a, b]$, excepto tal vez en un número finito de puntos de $[a, b]$. Si $f(x_0)$ es un máximo o mínimo relativo, entonces x_0 debe satisfacer una de las siguientes condiciones:

  1. $f'(x_0) = 0$
  2. $f'(x_0)$ no existe, pero $f(x_0)$ existe.
  3. x_0 es uno de los extremos del intervalo $[a, b]$

  Nota: Esta afirmación *no* dice que puntos dan extremos relativos, simplemente indica donde se deben buscar. A este tipo de puntos se les llama *valores críticos* de f.

- **Suficiencia para la existencia de valores extremos:**

- **Criterio o Prueba de la primera derivada:** Si $a \in \text{Dom} f$ y es un valor crítico del tipo 1. ó del tipo 2. precedentes, y $f'(x)$ cambia de positiva a negativa al crecer x y pasar por a, entonces f tiene un máximo local en $x = a$. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva cuando x aumenta y pasa por a, entonces f tiene un mínimo local en $x = a$.

  Si $f'(x)$ no cambia de signo cuando x aumenta y pasa por a, entonces f no tiene extremo en $x = a$.

- **Criterio o Prueba de la segunda derivada:** Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en $x = a$. Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en $x = a$.
  Nota: Este método no se puede aplicar cuando $f'(a) = 0$ y $f''(a) = 0$. En estas condiciones, en $x = a$ puede haber un máximo, o un mínimo local, o ninguno de ellos. La prueba de la primera derivada siempre entrega información al respecto y puede utilizarse.

7.4.3. Concavidad y puntos de inflexión

Se utiliza la segunda derivada para determinar si existe concavidad y para identificar los puntos de inflexión.
Si $f'' > 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava hacia arriba en ese intervalo y su gráfica se "curva" hacia arriba.
Si $f'' < 0$ en un intervalo, entonces f es cóncava hacia abajo en ese intervalo y su gráfica se "curva" hacia abajo.
Un punto de una gráfica en donde cambia la concavidad se denomina punto de inflexión. El punto $(a, f(a))$ de la gráfica es un posible punto de inflexión si $f''(a) = 0$, o bien, si $f''(a)$ no existe.

7.5. Estudio de funciones y sus gráficas, trazado de curvas

Para trazar la gráfica de una curva se pueden utilizar muchos medios auxiliares:

1. **Estudio del dominio de** f (ver capítulo 3)

2. **Intersecciones con los ejes coordenados**

   Con el eje X: Hacer $y = 0$ en la ecuación de la curva.

   Con el eje Y: Hacer $x = 0$ en la ecuación de la curva.

3. **Simetrías**

   Con respecto al eje X: Reemplazar y por $-y$ en la ecuación. Existe simetría si se obtiene una ecuación equivalente.

Con respecto al eje Y: Reemplazar x por $-x$ en la ecuación dada. Existe simetría si se obtiene una ecuación equivalente.

Con respecto al origen: Sustituir x por $-x$, e y por $-y$ en la ecuación dada. Existe simetría si se obtiene una ecuación equivalente.

4. **Asíntotas**

   Horizontales: La recta $y = b$ es una asíntota horizontal para la gráfica de una función f si ocurre cualquiera de las situaciones siguientes:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b\ , \quad \text{o bien} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

   Verticales: La recta $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de una función f si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty\ (\text{o} -\infty)\ , \quad \text{o cuando} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty\ (\text{o} -\infty)$$

5. **Monotonía, intervalos de crecimiento y de decrecimiento**

6. **Valores extremos**

7. **Concavidad, intervalos de concavidad hacia abajo o hacia arriba**

7.6. Aplicaciones de la derivada

1. **Aplicaciones de máximos y mínimos: Optimización** En un sentido práctico la mayor utilidad del cálculo es que permite maximizar o minimizar cantidades. Por ejemplo, se puede maximizar utilidad, minimizar costo, maximizar capacidad, minimizar esfuerzo, etc. En todos estos casos, el objetivo principal es obtener el óptimo de una función.

   La parte crucial de un problema de optimización consiste en expresar la cantidad que se desea maximizar o minimizar como función de alguna variable implicada en el problema.

   Los problemas que se tratarán, en este curso, serán tales que si en él intervienen dos variables, digamos x e y, ellas estarán relacionadas, es decir, será posible hallar una relación entre x e y que podrá usarse para eliminar una de las dos.

   Una vez planteada la función, en una variable y que modela el problema, se determinan los valores críticos y se prueban usando el criterio de la primera o de la segunda derivada. Si el interés se centra en los extremos absolutos, deben examinarse los extremos del dominio de la función que, generalmente, es un intervalo.

   Debe tenerse presente que no todo valor de la variable es admisible, restricción que alcanza a los máximos y mínimos, por ejemplo, las longitudes no se consideran negativas, si se habla de cantidad máxima de personas, ésta será entera no negativa, etc.

2. **Diferenciales** Si $y = f(x)$ es una función derivable de x, se define la diferencial de y, anotada dy, por

$$dy = f'(x)dx$$

en donde dx es cualquier número real y Δx representa el cambio en la variable x.

Si dx está cercano a 0, entonces dy es una aproximación de Δy (cambio en y), es decir, para $\Delta x \approx 0$, se tiene que $\Delta y \approx dy$.

Puede utilizarse dy para estimar el valor de una función empleando la relación

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy$$

Aquí, $f(x + dx)$ es el valor que se desea estimar; se eligen x y dx para que sea fácil de calcular $f(x)$ de manera que dx sea pequeña.

7.7. Ejemplos

1. Si $f(x) = 2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{x^2}$ encontrar $f'(x)$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{x^2})' \\ &= (2\mathrm{e}^x)' + (\mathrm{e}^2)' + (\mathrm{e}^{x^2})' \\ &= 2(\mathrm{e}^x)' + 0 + \mathrm{e}^{x^2} \cdot (x^2)' \\ &= 2\mathrm{e}^x + 2x\mathrm{e}^{x^2} \end{aligned}$$

2. Si $4x^2 - 9y^2 = 4$, hallar y'

Solución: Derivando implícitamente tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(4x^2 - 9y^2) &= \frac{d}{dx}(4) \\ (4x^2)' - (9y^2)' &= 0 \\ 8x - 18y\mathbf{y}' &= 0 \\ \mathbf{y}' &= \frac{4x}{9y} \end{aligned}$$

3. Hallar y''' en el punto $(1, \mathrm{e})$, si $y = x^2\mathrm{e}^x$

Solución:

$$\begin{aligned} y' &= 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x \\ &= \mathrm{e}^x(2x + x^2) \\ y'' &= \mathrm{e}^x(2x + x^2) + \mathrm{e}^x(2 + 2x) \\ &= \mathrm{e}^x(4x + x^2 + 2) \\ y''' &= \mathrm{e}^x(4x + x^2 + 2) + \mathrm{e}^x(4 + 2x) \\ &= \mathrm{e}^x(6x + x^2 + 6) \end{aligned}$$

Para $x = 1$, $y = \mathrm{e}$, se tiene $y''' = \mathrm{e}^1(6 \cdot 1 + 1^2 + 6) = 13\mathrm{e} \approx 28{,}38$

4. Si $y = f(x) = x^x$, calcular y' en el punto $x = \mathrm{e}$.

   Solución:

$$\begin{array}{rcll} y &=& x^x & / \ \ln \\ \ln y &=& \ln x^x & \\ \ln y &=& x \ln x & / \ \dfrac{d}{dx} \\ (\ln y)' &=& (x \ln x)' & \end{array}$$

   Derivando implícitamente y aplicando fórmulas básicas (9 y 5), queda

$$\frac{1}{y} y' = x' \ln x + x(\ln x)' = 1 \ln x + x \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

   Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} y' &=& y(\ln x + 1) \\ &=& x^x(\ln x + 1) \end{array}$$

   En $x = e$, $\quad y' = 2\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$

5. Calcular la derivada de

$$y = \frac{(x+3)^2(x+2)(x-1)}{(x+5)(x-2)^3}$$

   Solución: Una forma de calcular y' es aplicar las fórmulas del producto y cuociente, otra, realizar los productos y luego derivar, y otra es derivar implícitamente previo uso de logarítmo (método recomendable en estos casos)

$$\begin{array}{rcl} y &=& \dfrac{(x+3)^2(x+2)(x-1)}{(x+5)(x-2)^3} \quad / \ \ln \\ \ln y &=& \ln(\dfrac{(x+3)^2(x+2)(x-1)}{(x+5)(x-2)^3}) \\ \ln y &=& 2\ln(x+3) + \ln(x+2) + \ln(x-1) - \ln(x+5) - 3\ln(x-2) \\ \dfrac{y'}{y} &=& \dfrac{2}{x+3} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+5} - \dfrac{3}{x-2} \\ y' &=& y(\dfrac{2}{x+3} + \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+5} - \dfrac{3}{x-2}) \end{array}$$

   Reemplazando y, resulta

$$y' = \frac{(x+3)^2(x+2)(x-1)}{(x+5)(x-2)^3}(\frac{2}{x+3} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+5} - \frac{3}{x-2})$$

6. Obtener una ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{x}{1-x}$, en $x = 3$

   Solución: Si $x = 3$, entonces $y = \frac{3}{1-3} = -\frac{3}{2}$, luego el punto de tangencia es $(3, -\frac{3}{2})$

$$\begin{aligned} y' &= \tfrac{(1-x)\cdot 1 - x\cdot(-1)}{(1-x)^2} \\ y' &= \tfrac{1}{(1-x)^2} \\ y'|_{x=3} &= \tfrac{1}{(1-x)^2}\bigg|_{x=3} = \tfrac{1}{4}\,, \quad \text{pendiente de la recta tangente} \end{aligned}$$

   Luego, una ecuación de la recta tangente es:

$$y + \frac{3}{2} = \frac{1}{4}(x-3)$$

7. Calcular la pendiente de la recta tangente y de la recta normal, en el punto $P = (0, 2)$, a la curva

$$y = f(x) = 3e^x - x^4 + 2x - 1$$

   Solución: La pendiente de la tangente a la curva en P está dada por la derivada de f en $x = 0$, es decir $f'(0)$; la pendiente de la normal es $-1/f'(0)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^x - 4x^3 + 2 \\ f'(0) &= 3e^0 - (4)(0^3) + 2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

   Así, 5 y -1/5 es lo pedido, respectivamente. Se sugiere, escribir una ecuación para cada línea recta.

8. Un objeto recorre $s(t) = t^3$ metros en los primeros t segundos. Determinar la velocidad media entre $t = 2$ y $t = 2,01$ y la velocidad del objeto en el instante $t = 2$.

   Solución

$$\begin{aligned} \text{velocidad media entre 2 y } 2,01 &= \frac{s'(2,01) - s'(2)}{0,01} \\ \text{velocidad en el instante 2} &= s'(2) \end{aligned}$$

   En ambos casos se requiere conocer la derivada de la función s (velocidad)

$$s'(t) = 3t^2 = v(t)$$

   Evaluando $s'(t)$ para $t = 2,01$, para $t = 2$ y sustituyendo donde corresponda se obtiene lo pedido (hacerlo).

9. Si $C = 7 + 0,6I - 0,21\sqrt{I}$ es una función de consumo, obtener la propensión marginal al consumo y la propensión marginal al ahorro cuando $I = 16$.

   Solución:

   Propensión marginal al consumo cuando $I = 16$ es $\frac{dC}{dI}\Big|_{\mathrm{I=16}}$

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dI}\Big|_{\mathrm{I=16}} &= (0,6 - \frac{0,21}{2\sqrt{I}})\Big|_{\mathrm{I=16}} \\ &= 0,6 - \frac{0,21}{2\sqrt{16}} \\ &\approx 0,57 \end{aligned}$$

   Así, la propensión marginal al ahorro cuando $I = 16$ es $1 - \frac{dC}{dI}\Big|_{\mathrm{I=16}} \approx 0,43$

10. Una población crece de acuerdo con el modelo logístico tal que en instante t su tamaño P está dado por

$$P = P_0(1 + C\mathrm{e}^{kt})^{-1}$$

   con P_0 , C , k constantes. Calcular la tasa de crecimiento de la población en el instante t.

   Solución: La tasa de crecimiento requerida es $\frac{dP}{dt}$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= P_0(-1)(1 + C\mathrm{e}^{-kt})^{-2}(1 + C\mathrm{e}^{-kt})' \\ &= -P_0(1 + C\mathrm{e}^{-kt})^{-2}C\mathrm{e}^{-kt}(-k) \\ &= CkP_0(1 + C\mathrm{e}^{-kt})^{-2}\mathrm{e}^{-kt} \end{aligned}$$

11. Un fabricante decidió que m trabajadores fabricarían un total de q unidades de un producto por día, en donde $q = m(50 - m)$. Si la función de demanda está dada por $p = -0,01q + 9$, determinar el producto de ingreso marginal cuando $m = 10$.

   Solución: Producto de ingreso marginal cuando $m = 10$ es:

$$\frac{dr}{dm}\Big|_{m\,=\,10} = \frac{dq}{dm}(p + q\frac{dp}{dq})\Big|_{m\,=\,10} = \frac{dr}{dq}\frac{dq}{dm}\Big|_{m\,=\,10}$$

   donde r es el ingreso que recibe el fabricante cuando se vende la producción total q.

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dm} &= 50 - 2m \\ \frac{dp}{dq} &= -0,01 \end{aligned}$$

Si $m = 10$, entonces $q = 400$, $\frac{dq}{dm} = 30$, $\frac{dp}{dq} = -0,01$, en consecuencia, el producto marginal cuando $m = 10$ es

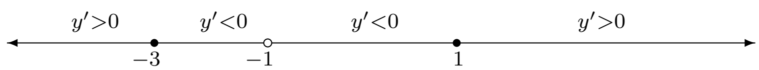
$$\frac{dr}{dm} = 30[5 - 400(0,01)] = (30)(1) = 30$$

12. Si $y = f(x) = x + \frac{4}{x+1}$, determinar extremos relativos.

    Solución:
    $$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$$

    Si $f'(x) = 0$, se obtiene $x = -3$ o $x = 1$. El denominador de $f'(x)$ se hace cero cuando $x = -1$, de manera que $f'(-1)$ no existe. Así, los valores críticos son -3 y 1 .Se omite $x = -1$ como valor crítico debido a que en -1 la función f no está definida.

    Los valores críticos dividen el eje real en tres tramos, se analiza el signo de $f'(x)$ en cada uno de ellos (criterio de la primera derivada).



    Como la derivada de f cambia de $+$ a $-$ al pasar por -3, entonces en $x = -3$ hay un máximo local, este valor máximo es $f(-3) = -5$. También, f' cambia de $-$ a $+$ al pasar por $x = 1$, se concluye que en $x = 1$ hay un mínimo local, y este valor mínimo es $f(1) = 3$

13. Hallar extremos relativos y absolutos para $y = f(x) = x^2 - 4x + 5$ en el intervalo $[1, 4]$.

    Solución: $f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$. Haciendo $f'(x) = 0$ se obtiene el valor crítico $x = 2$.

    Como $f''(x) = 2$ se tiene que $f''(2) = 2 > 0$, de acuerdo al criterio de la segunda derivada existe un mínimo local en $x = 2$, el valor mínimo es $f(2) = 1$.

    Para determinar extremos absolutos hay que analizar los extremos, 1 y 4, del dominio de la función, $[1, 4]$, y comparar sus imágenes con la de $x = 2$ (donde f tiene un extremo). De ésto se obtiene que en $x = 4$ existe un máximo absoluto y en $x = 2$ existe un mínimo absoluto (el que además es mínimo local).

14. Hallar puntos de inflexión e intervalos de concavidad de $y = f(x) = 6x^4 - 8x^3 + 1$

    Solución:

    $$\begin{aligned} y' &= 24x^3 - 24x^2 = 24x^2(x-1) \\ y'' &= 72x^2 - 48x = 24x(3x-2) \end{aligned}$$

$y''(x)$ está definida para todo x, además $y''(x) = 0$ en $x = 0$ y en $x = 2/3$. Estos puntos dividen al eje real en tres tramos, en cada uno de los cuales se analiza el signo de $f''(x)$. Después de este análisis se obtiene que la curva es cóncava hacia arriba en $]-\infty, 0[$ y $]2/3, +\infty[$ y es cóncava hacia abajo en $]0, 2/3[$.

Como la concavidad cambia en $x = 0$ y $x = 2/3$, los puntos de inflexión son

$$(0, f(0)) = (0, 1) \quad \text{y} \quad (2/3, f(2/3)) = (2/3, -5/27)$$

15. Un fabricante descubre que el costo total c, para elaborar un producto, está dado por la función $c = 0,05q^2 + 5q + 500$. ¿A qué nivel de producción los costos promedios por unidad serán mínimos?

    Solución: Sea $\bar{c}$ el costo promedio por unidad, así

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \frac{c}{q} \\ &= (0,05q^2 + 5q + 500)/q \\ &= 0,05q + 5 + 500/q \\ \bar{c}\,' &= 0,05 - 500/q^2 \\ &= (0,05q^2 - 500)/q \end{aligned}$$

$$\bar{c}\,' = 0 \Longleftrightarrow q^2 = 500/0,05 = 10000 \Longleftrightarrow q = \pm 100$$

    Además, $\bar{c}\,'' = 1000/q^3$. Considerando que $q > 0$ (representa cantidad) y aplicando la prueba de la segunda derivada, se tiene

$$\bar{c}\,''(100) = 1000/(100)^3 > 0$$

    luego en $q = 100$ la función costo promedio tiene un mínimo. En consecuencia, el nivel de producción debe ser de 100 unidades para minimizar los costos promedios por unidad.

16. La ecuación de demanda para el producto de un momopolista es $p = -5q + 30$ (q es el número de unidades, p es el precio por unidad) ¿Cuál es el ingreso máximo?

    Solución: Sea r ingreso total (función a maximizar)

$$\begin{aligned} \text{Ingreso} &= (\text{precio}) \times (\text{cantidad}) \\ r &= pq \\ &= (-5q + 30)q \\ r &= -5q^2 + 30q, \quad q \geqslant 0 \\ r' &= -10q + 30 \end{aligned}$$

    luego, $r' = 0 \Longleftrightarrow q = 3$ y $\quad r'' = -10$, para todo q.

    Por lo tanto en $q = 3$ el ingreso r es máximo. Reemplazando $q = 3$ en $r = -5q^2 + 30q$ se tiene que $r = 45$ unidades monetarias es el ingreso máximo.

17. Una compañía fabrica y vende anualmente 10.000 unidades de un producto. Las ventas se distribuyen de manera uniforme en todo el año. La compañía desea determinar el número de unidades que debe fabricar en cada corrida de producción con el objeto de minimizar costos anuales totales de preparación y los costos de inventario. En cada corrida se fabrican el mismo múmero de unidades. A este número se le denomina *Tamaño económico del lote o cantidad económica de pedido*. El costo de producción de cada unidad es \$20 y los costos de inventario (seguros, intereses, almacenamiento, etc.) se estudian en 10 % del valor del inventario promedio. Los costos de preparación por corrida de producción son \$40. Calcular el tamaño económico del lote.

    Solución: Sea q el número de unidades de una corrida de producción. Como las ventas se distribuyen a una tasa uniforme, se supone que los inventarios varían de manera uniforme de q a 0 entre corridas de producción, o sea, se considera el inventario promedio por $q/2$ unidades. Los costos de producción son de \$20 por unidad por lo cual el valor promedio del inventario es $20(q/2)$. Los costos respectivos son 10 % de este valor, es decir $(0,10)(20)(q/2)$.

    El número de corridas de producción por año es $10000/q$. Por lo tanto, los costos totales de producción son

    $$40(10000/q)$$

    Por consiguiente, los costos anuales totales de inventario y de preparación, C, son

    $$\begin{aligned} C &= (0,10)(20)(q/2) + 40(10000/q) \quad \text{(función a minimizar)} \\ C &= q + 400000/q, \quad (q > 0) \\ C' &= 1 - 40000/q^2 = (q^2 - 40000)/q^2 \end{aligned}$$

    Haciendo $C' = 0$ se obtiene

    $$q^2 = 40000$$

    Como $q > 0$, se elige $q = \sqrt{40000} \approx 632,5$. Para determinar si este valor de q minimiza C se analiza la segunda derivada $C'' = 80000/q^3$, como $C''(632,5) > 0$, se tiene, que en $q = 632,5$ la función C tiene un mínimo.

    El número de corridas de producción es $10000/632,5 \approx 15,8$. Para fines prácticos, habría 16 lotes cada uno de ellos con tamaño ecónomico de 632 unidades.

18. Sea $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$. Hallar dy y Δy cuando $x = 5$ y $\Delta x = dx = 0,02$

    Solución: Si $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, entonces

    $$y' = f'(x) = 3x^2 - 4x$$

    Además, por definición:

    $$dy = f'(x)dx = (3x^2 - 4x)dx$$

Cuando $x = 5$ y $\Delta x = 0,02$, se tiene

$$dy = [(3)(25) - (4)(5)](0,02) = 1,1$$

Por otra parte, por definición

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(5 + \Delta x) - f(5) \\ &= f(5,02) - f(5) \\ &= (5,02)^3 - 2(5,02)^2 + 1 - 5^3 + 2(5)^2 - 1 \\ &= 1,105 \end{aligned}$$

Esto muestra que la diferencial y el incremento de y no son exactamente iguales.

19. De cada lado de un terreno cuadrado de lado 5.280 metros, se remueve una franja de 20 metros para destinarse a un camino. Usando diferenciales, calcular aproximadamente cuanta área se pierde en el terreno.

Solución: Sea x la longitud del lado, luego el área, A, es

$$A = f(x) = x^2$$

El lado se modifica de x a $x + \Delta x$, luego el cambio de área, ΔA, está dado aproximadamente

$$\Delta A \approx f'(x)\Delta x = 2x\Delta x$$

En este caso, $x = 5280$, $\quad \Delta x = -40$. Por lo tanto

$$\Delta A \approx 2(5280)(-40) = -422400$$

Así, la pérdida de área es aproximadamente 422.400 m^2. Se sugiere hacer una figura ilustrativa y resolver este problema sin usar diferenciales.

20. Analizando, previamente, cada uno de los medios auxiliares que se indican en la sección trazado de curvas, trazar la gráfica de $y = f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

Solución:

Intersecciones: Cuando $x = 0$, entonces $y = 0$; cuando $y = 0$, entonces $x = 0$, luego (0,0) es la única intersección con los ejes coordenados.

Simetría: Existe sólo simetría con respecto al origen, reemplazando x por $-x$ e y por $-y$ se obtiene $-y = \frac{-x}{(-x)^2-4} = \frac{-x}{x^2-4}$ que es la misma ecuación original.

Asíntotas: El denominador de $x/(x^2 - 4)$ es cero cuando $x = \pm 2$ y el numerador no es cero para estos valores de x, además

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4} = -\infty$$
$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x}{x^2-4} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to -2^-} \frac{x}{4-x^2} = -\infty$$

Por lo tanto, las rectas $x = 2$ y $x = -2$ son asíntotas verticales.

Se tiene además que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0 \ , \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$$

Por lo tanto, la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

Valores extremos:

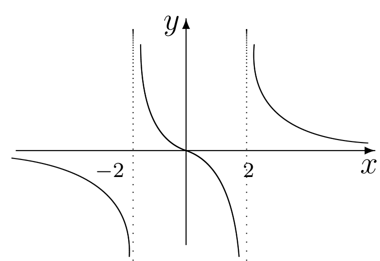
$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} = -\frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}$$

$f'(x) = 0 \iff 4 + x^2 = 0$, pero $4 + x^2 \neq 0$ para todo x real. Luego f no tiene extremos locales.

Intervalos de crecimiento y de decrecimiento: Analizando la derivada de f, se tiene que $f'(x) < 0$ para todo x real, luego f es decreciente en $\mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$

Concavidad: Analizando la segunda derivada de f, se concluye que f es cóncava hacia arriba en los intervalos $]-2, 0[$ y $]2, +\infty[$; cóncava hacia abajo en $]-\infty, -2[$ y en $]0, +\infty[$

Por último, la gráfica de f es



7.8. Ejercicios

1. Hallar la derivada $f'(x)$ de cada una de las siguientes funciones aplicando la definición

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

(a) $f(x) = 4x$ (b) $f(x) = (x + 1)^2$ (c) $f(x) = \sqrt{5x - 1}$

(d) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ (e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$ (f) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{2x+3}}$

2. Sean f y g funciones reales definidas por :

$$f(x) = \begin{cases} x(x - 3) & \text{si } x < 4 \\ 4(5 - x) & \text{si } x \geqslant 4 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} \left| \frac{x^2 - 9}{x + 3} \right| & \text{si } x \neq -3 \\ 6 & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

a) Trazar la grafica de f y la de g.

b) Probar que que f y g son continuas .

c) Probar que f no es derivable en $x = 4$ y que g no es derivable en $x = 3$.

3. Derivar cada una de las siguientes funciones reales :

(a)$f(x) = 5/x^4 + 7/x^6$	(b)$f(x) = \sqrt{3}(x^3 - x^2)$
(c) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$	(d)$f(x) = \frac{a+bx+cx^2}{x}$
(e) $f(x) = 2/\sqrt{a^2 - x^2}$	(f) $f(x) = \frac{8-3x}{12x^2+7}$
(g) $f(x) = (a + b/x^2)^3$	(h) $f(x) = \sqrt{2x - \frac{a}{x^2}}$
(i) $f(x) = 1 - \sqrt{1+x}$	(j) $f(x) = 3^{5x}$
(k) $f(x) = \log\left(\frac{x}{x+1}\right)$	(l) $f(x) = (2x+3)^4/\sqrt{x+2}$
(m) $f(x) = \ln(e^x)$	(n) $f(x) = \ln(2x - 1)^3$
(o) $f(x) = [\sin(3x + 5)]^4$	(p) $f(x) = \cos^2(\cos(x + 1)^2)$
(q) $f(x) = \sqrt[3]{\tan\ 3\theta}$	(r) $f(x) = x^{\sin x}$
(s) $f(t) = e^{-t} \sin 2t$	(t) $f(x) = \ln(\sqrt{(1 + \sin x)/(1 - \sin x)}$

4. En cada caso evaluar la expresión de la derecha:

(a) $s = \dfrac{t}{\sqrt{2t+1}}$	$\dfrac{d^2s}{dt^2}$
(b) $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$
(c) $x^3 + y^3 = 1$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$
(d) $x^4 + 2x^2y^2 - a^4 = 0$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$
(e) $y = \sqrt{ax} + \dfrac{a^2}{\sqrt{ax}}$	$y' + y''$ en $x = a$
(f) $x^2 + 4xy + y^2 + 3 = 0$	$y' + y''$ en $x = 2$ e $y = -1$

5. Encontrar la ecuación de la recta tangente y normal a la curva dada donde se indica .

(a) $y = x^2 - 4x + 3$, en el punto $(4, 3)$	(b) $y = 2x^2 + 3$, en $x = 1$
(c) $y = x^3 - 3x$, en el punto $(2, 2)$	(d) $y = \sqrt{4x - 3} - 1$, en $x = 1$
(e) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$, en $(1, 2)$	(f) $y^2 - x^2 = 16$, en $x = -3$

6. Hallar los valores de las constantes a, b y c para los cuales las gráficas de los polinomios $p(x) = ax^2 + bx + c$ y $q(x) = x^3 - c$ se corten en el punto (1,2) y tengan la misma tangente en dicho punto.

7. Probar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación $y = x^3-6x^2+8x$. Hallar los puntos de tangencia. ¿Vuelve a cortar la curva esa tangente?

8. Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que $P(0) = P(1) = -2$, $P'(0) = -1$ y $P''(0) = 10$. Calcular a, b, c y d.

9. Determinar la ecuación de la(s) recta(s) que pasan por el punto $(1,0)$ tangente(s) a la curva $x^2+4y^2-4x-8y+3=0$

10. Sea $f(x)=ax^2+bx+c$ con a, b, c constantes. Hallar los valores de a, b y c tales que la recta $y=2x$ sea tangente a la grafica de f en el punto (2,4).

11. Determinar el ingreso marginal cuando $q=50$ si la ecuación de demanda es $q=1000-100p$ (p es precio, q cantidad).

12. Una compañía fija una tarifa de \$10 por unidad de electricidad para las primeras 50 unidades utilizadas por un usuario doméstico cada mes y de \$3 adicionales por unidad en el caso de cantidades por encima de ésta. Si $C(x)$ denota el costo de x unidades por mes, analizar el costo marginal, bosquejando la gráfica de C.

13. La ecuación de demanda de cierto artículo es $p+0,1q=80$ y la función de costo es $C(q)=5000+20q$. Calcular la utilidad marginal cuando se producen y venden 150 unidades y también en el caso que se produzcan y vendan 400 unidades.

14. Hallar b tal que $f(x)=x^2+bx-7$ tenga un mínimo local en $x=4$.

15. Determinar extremos locales y absolutos

    (a) $f(x)=x^3-3x^2+1$ en $[-2,4]$ (b) $f(x)=\frac{1}{\mathrm{e}x^2+1}$ en $[-3,-\frac{4}{3}]$
    (c) $f(x)=x^2+4x-3$ en $[0,5]$ (d) $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+1}$ en $[-3,2]$

16. Determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

    (a) $f(x)=x^2-1$ (b) $f(x)=x^3-3x$ (c) $f(x)=1/x-1/(x-1)$
    (d) $f(x)=\frac{x^4+4}{x^4+2}$ (e) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (f) $f(x)=x\mathrm{e}^{x^2}$

17. Sea $f(x)=\dfrac{x^2}{a-x}$ con $a\in R$

    Usando el criterio de la primera derivada, determinar los valores de a para que f tenga un máximo y un mínimo local. Para $a=1$, trazar la gráfica de f.

18. Sea $f(x)=\dfrac{a}{1-x^2}$ con a número real

    Usando el criterio de la segunda derivada , determinar los valores de a para que f tenga un máximo en el intervalo $]-1,1[$. Para $a=-1$, trazar la gráfica de f.

19. Calcular máximos y mínimos (si existieren) para las siguientes funciones:

    (a) $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2$ (b) $y=(2x-a)^{1/3}(x-a)^{2/3}$
    (c) $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ (d) $f(x)=\dfrac{ax}{x^2+a^2}$
    (e) $f(x)=x\ln x$ (f) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+2x+4}$
    (g) $f(x)=\ln(8x-x^2)$ (h) $f(x)=3\sin x-4\cos x$, con $x\in[0,2\pi]$

20. Determinar máximos, mínimos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos de inflexión, concavidad. Además esbozar la gráfica utilizando la información anterior para las siguientes funciones:

(a) $f(x) = 2x^3 - 32x^2 - 36x + 25$	(b) $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+3}$
(c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$	(d) $f(x) = x + 2\sin x$
(e) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$	(f) $f(x) = x\mathrm{e}^x$

21. Determinar intervalos donde la curva es cóncava hacia arriba, cóncava hacia abajo y calcular los puntos de inflexión de: $y = f(x) = 3x^2 - x^3$

22. Determinar concavidad y puntos de inflexión de $y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 25$

23. Sea $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Calcular máximos, mínimos y puntos de inflexión, si existieren.

24. Sea $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$. Graficar la curva, hallar máximos, mínimos, puntos de inflexión, intervalos de concavidad, la ecuaciones de las rectas tangente y normal en cada punto de inflexión.

25. Determinar, si existieren, puntos de inflexión de cada una de las siguientes curvas y trazar la gráfica:

(a) $y = x\ln x$	(b) $y = \frac{x}{\ln x}$
(c) $y = \ln(8x - x^2)$	(d) $y = x\mathrm{e}^x$
(e) $y = \mathrm{e}^{-x^2}$	(f) $y = b + c(x-a)^{2/3}$

26. Sea $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7$. Hallar la ecuación de la tangente y de la normal en cada punto de inflexión.

27. El área del papel de una tarjeta rectangular debe ser de 225cm^2. Se desea que los márgenes sean de 15cm arriba y abajo, y de 10cm a la derecha e izquierda. ¿Qué dimensiones darán la máxima área impresa?

28. Se desea construir un depósito rectangular de base cuadrada, abierto por arriba. Debe tener 125m^3 de capacidad. Si el costo de las caras laterales es de \$2000 por m^2, y el del fondo es de \$4000 por m^2. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el costo sea mínimo?

29. Una compañía de teléfonos encuentra que obtiene una ganancia líquida de \$15 por aparato si la central tiene 1000 abonados o menos. Si hay más de 1000 abonados, la ganancia por aparato instalado disminuye un centavo por cada abonado que sobrepasa ese número. ¿Cuántos abonados darán ganancia máxima?

30. Para el producto de un monopolista la función de demanda es $p = 50/\sqrt{q}$ y la función de costo promedio es $\overline{c} = 0,50 + 1000/q$. Determinar el precio que maximiza las utilidades y la producción. A este nivel, demostrar que el ingreso marginal es igual al costo marginal.

31. Para una industria X, los costos fijos totales son \$1200, los costos combinados de materiales y de mano de obra son de \$2 por unidad, y la ecuación de demanda es $p = 100/\sqrt{q}$. ¿Qué nivel de producción maximiza las utilidades?, demostrar que ocurre ésto cuando los ingresos marginales son iguales a los costos marginales. ¿Cuál es el precio cuando se maximiza las utilidades?

32. Para un fabricante el costo de elaborar una refacción es de \$3 por unidad de mano de obra y \$1 por unidad de materiales, los gastos generales son de \$2000 por semana. Si se fabrica cada semana más de 500 unidades, la mano de obra es de \$4,50 por unidad para las unidades en exceso de 5000. ¿A qué nivel de producción sera mínimo el costo promedio por unidad?

33. Las ganancias anuales brutas de cierta compañía fueron $\sqrt{10t^2 + t + 236}$ mil pesos, t años después de su formación en enero de 1980.

    a) ¿A qué razón estaban aumentando las ganancias brutas de la compañía en enero de 1990?.

    b) ¿Cuál es la razón de cambio porcentual y promedio de las ganancias brutas en enero de 1990?

34. En cierta fábrica, el costo total de fabricación de q unidades durante el trabajo de producción diario es de $0,2q^3 - 0,1q^2 + 0,5q + 600$ pesos. Después de t horas en un día de trabajo típico, se han producido, $10\sqrt{t^2 + t + 4}$ unidades. Calcular la razón de cambio del costo total con respecto al tiempo 3 horas después de que comienza la producción.

35. Una firma encontró que su utilidad fue de p pesos en la produción de x kilógramos por hora de un producto, de acuerdo con la función $p = 30\sqrt{10x - x^2} - 50$. Determinar la variación de la utilidad si la producción está creciendo de modo que $\frac{dx}{dt} = 0{,}200\,\mathrm{kg/h^2}$, cuando $x = 4{,}00\,\mathrm{kg/h}$.

36. Dada la función de ingresos $r = 250q + 45q^2 - q^3$ aplicar diferenciales para obtener el cambio aproximado en ingresos si el número de unidades aumenta de $q = 40$ a $q = 41$. Hallar el cambio real.

7.9. Respuesta a los ejercicios de n£mero impar

- 1) (a) 4 (c) $\frac{5}{2\sqrt{5x-1}}$ (e) $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

- 3)

(a) $-\frac{42}{x^7} - \frac{20}{x^5}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}$ (e) $\frac{2x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$

(g) $-6(b+ax^2)^2x^{-7}$ (i) $-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ (k) $\frac{\log \mathrm{e}}{x(x+1)}$

(m) 1 (o) $12\cos(5+3x)[\operatorname{sen}(5+3x)]^3$

(q) $(\cos 3\theta)^{-4/3}(\operatorname{sen} 3\theta)^{-2/3}$ (s) $\mathrm{e}^{-t}[2\cos(2t) - \operatorname{sen}(2t)]$

- 5) (a) $y - 4x + 13 = 0$ (c) $y - 9x + 16 = 0$ (e) $y = 2$
- 7) Punto de tangencia $(3, -3)$. La vuelve a cortar en $(0, 0)$
- 9) $4y + x = 1$
- 11) Ingreso marginal 9
- 13) Si $q = 150$, entonces la utilidad marginal es 30; para $q = 400$ es -20.
- 15)

  (a) en $x = 0$, $f(0) = 1$ máximo local
  en $x = 2$, $f(2) = -3$ mínimo local
  en $x = -2$, $f(-2) = -19$ mínimo absoluto
  en $x = 4$, $f(4) = 17$ máximo absoluto

  (c) en $x = 0$, $f(0) = -3$ mínimo absoluto
  en $x = 5$, $f(5) = 42$ máximo absoluto
- 17) $a \neq 0$
- 19)

  (a) en $x = -1$, $f(-1) = -5$ mínimo local
  en $x = 0$, $f(0) = 0$ máximo local
  en $x = 2$, $f(2) = -32$ mínimo local

  (c) en $x = 0$, $f(0) = 1$ máximo local

  (e) en $x = 1/\mathrm{e}$, $f(1/\mathrm{e}) = -1/\mathrm{e}$ mínimo local

  (g) en $x = 4$, $f(4) = \ln 16$ máximo local
- 21) Cóncava hacia arriba en $]\infty, 1[$. Cóncava hacia abajo en $]\,1, +\infty[$.
  - Punto de inflexión $(1, 2)$

- 23)

  (a) en $x = 1$, $f(1) = 0$ mínimo local
  en $x = -1$, $f(-1) = 0$ mínimo local
  en $x = 0$, $f(0) = 1$ máximo local

  - Puntos de inflexión: $(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{4}{9})$

- 25) (a) No tiene (c) No tiene (e) $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$
- 27) $7,5\sqrt{6}$ cm y $5\sqrt{6}$
- 29) 250
- 31) Nivel de producción $q = 625$. Precio $p = 4$.
- 33) (a) 2,847 aproximadamente.
- 35) 1,225 pesos/hora.