CAPÍTULO

# 8

# Integración (Introducción)

El problema típico del Cálculo Diferencial consiste en *Dada una función $F(x)$, encontrar su derivada, es decir, $F'(x)$*. En el Cálculo integral, el problema que preocupa es el inverso.

## 8.1. Integral Indefinida

Dada una función $f(x)$, se llama *primitiva, antiderivada o integral* de $f(x)$ a una función $F(x)$ tal que:

$$F'(x) = f(x)$$

Al conjunto de funciones $\{F(x) + C / C \in \mathbf{R}\}$ se le llama *integral indefinida* de $f(x)$ y se le anota $\displaystyle\int f(x)\,dx$, o sea,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \ , \quad C \text{ constante}$$

en donde:

$$\begin{array}{ccl} \displaystyle\int & : & \text{Símbolo de la Integral} \\ x & : & \text{Variable de integración} \\ f(x) & : & \text{Función integrando} \\ F(x) & : & \text{Primitiva de } f(x) \\ C & : & \text{Constante de Integración} \end{array}$$

Luego,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff F'(x) = f(x)$$

## 8.2. Algunas fórmulas de Integración

1. $\displaystyle\int a\,dx = ax + C$ , $a$ constante

2. $\displaystyle\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

4. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\ ,\quad n \neq -1$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

6. (a) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ , $a > 0$

   (b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + C$

7. (a) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

   (b) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$

   (c) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln\sec x + C$

   (d) $\displaystyle\int \csc x\,dx = \ln(\csc x - \operatorname{ctg} x) + C$

   (e) $\displaystyle\int \sec x\,dx = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + C$

   (f) $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln(\operatorname{sen} x) + C$

**Observación**
El proceso de integración, en general es más complicado que el de derivación, ésto se debe esencialmente a que no existen fórmulas para

$$\int f(x)g(x)\,dx\ , \quad \int \frac{f(x)}{g(x)}dx$$

## 8.3. Métodos de integración

1. **Cambio de variable**

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(v)dv$$

2. **Integración por partes**

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

3. **Fracciones parciales** (ejemplo 7)

## 8.4. Ejemplos

1. Calcular las siguientes integrales:

(a) $\int t^4 dt$ (b) $\int (3u)^3 du$

(c) $\int (z-5)^2 dz$ (d) $\int \frac{7}{2t^3} dt$

(e) $\int y^3(1+y)dy$ (f) $\int \frac{(x-1)(x+3)}{x^2} dx$

**Solución**: En la resolución de las siguientes integrales indefinidas, se hace referencia a las fórmulas de integración.

(a) $\int t^4 dt \overset{(4)}{=} \frac{t^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}t^5 + C$

(b) $\int (3u)^3 du = \int 3^3 u^3 du \overset{(2)}{=} 3^3 \int u^3 du \overset{(4)}{=} \frac{27}{4}u^4 + C$

(c) $$\begin{aligned}\int (z-5)^2 dz &= \int (z^2-10z+25)dz \\ &\overset{(3),(2)}{=} \int z^2 dz - 10\int z\,dz + \int 25\,dz \\ &\overset{(4),(1)}{=} \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{10}{2}z^2 + 25z + C \\ &= \tfrac{1}{3}z^3 - 5z^2 + 25z + C\end{aligned}$$

Esta integral también se puede resolver usando cambio de variable.

Para ello, sea $u = z-5$, entonces $du = dz$, luego

$$\int (z-5)^2 dz = \int u^2 du \overset{(4)}{=} \tfrac{1}{3}u^3 + C = \tfrac{1}{3}(z-5)^3 + C$$

(d) $$\int \tfrac{7dt}{2t^3} \overset{(2)}{=} \tfrac{7}{2}\int t^{-3}dt \overset{(4)}{=} \tfrac{7}{2}(\tfrac{t^{-2}}{-2}) + C = -\tfrac{7}{4t^2} + C$$

(e) $$\begin{aligned}\int y^3(1+y)dy &= \int (y^3+y^4)dy \\ &\overset{(3)}{=} \int y^3 dy + \int y^4 dy \\ &\overset{(4)}{=} \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{5}y^5 + C\end{aligned}$$

(f) $$\begin{aligned}\int \tfrac{(x-1)(x+3)}{x^2}dx &= \int \tfrac{x^2+2x-3}{x^2}dx \\ &= \int (1+\tfrac{2}{x}-\tfrac{3}{x^2})dx \\ &\overset{(3)}{=} \int dx + \int \tfrac{2}{x}dx - \int \tfrac{3}{x^2}dx \\ &\overset{(2)}{=} \int dx + 2\int \tfrac{dx}{x} - 3\int x^{-2}dx \\ &\overset{(1),(5),(4)}{=} x + 2\ln|x| + \tfrac{3}{x} + C\end{aligned}$$

2. Calcular $\displaystyle\int t\sqrt{t^2+5}\,dt$

**Solución:** Sea $u = t^2+5$, entonces $du = 2t\,dt$, luego

$$\begin{aligned}
\int t\sqrt{t^2+5}\,dt &= \frac{1}{2}\int (t^2+5)^{1/2}2t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int u^{1/2}du \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)+C \\
&= \frac{1}{3}u^{3/2}+C \\
&= \frac{1}{3}(t^2+5)^{3/2}+C
\end{aligned}$$

3. Calcular $\int \frac{2+\ln x}{x}dx$

   **Solución:** Sea $u = 2+\ln x$, entonces $du = \frac{dx}{x}$, , luego

$$\int \frac{2+\ln x}{x}dx = \int (2+\ln x)\frac{dx}{x} = \int u\,du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}(2+\ln x)^2 + C$$

4. Calcular $\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

   **Solución:** Sea $u = \sqrt{x}$, entonces $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$ , luego

$$\int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int \operatorname{sen}\sqrt{x}\,\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int \operatorname{sen}u\,du = 2(-\cos u)+C = -2\cos\sqrt{x}+C$$

5. Calcular $\int x\mathrm{e}^{-x^2}dx$

   **Solución:** Sea $u = -2x$, entonces $du = -2x\,dx$ , luego

$$\int x\mathrm{e}^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-x^2}(-2x\,dx) = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{u}du = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{u}+C = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}+C$$

6. Calcular $\int x\operatorname{sen}x\,dx$

   **Solución:** Usando integración por partes. Sea $u = x$, $dv = \operatorname{sen}x\,dx$ , de donde $du = dx$, $v = -\cos x + k \qquad \ldots(*)$

Luego:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x\, dx &= x(-\cos x + k) - \int (-\cos x + k)\, dx \\ &= -x\cos x + kx + \int \cos x\, dx - \int k\, dx \\ &= -x\cos x + kx + \operatorname{sen} x - kx + C \\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + C\end{aligned}$$

**Nota**: Como se ha visto en este ejercicio la constante $k$ que aparece en $(*)$ se cancela. Esto sucede siempre, razón por la cual se acostumbra poner $k = 0$ en $(*)$

7. Calcular $\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx$

**Solución:** Aquí, se apreciará el método de fracciones parciales. Para ello:

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

Entonces, para todo $x$ n£mero real se tiene

$$\begin{aligned}5x-3 &= A(x-3) + B(x+1) \\ &= (A+B)x + (-3A+B)\end{aligned}$$

De la definición de igualdad de polinomios, se obtiene

$$\left.\begin{array}{rcr} A+B &=& 5 \\ -3A+B &=& -3 \end{array}\right|$$

Resolviendo este sistema, se tiene que: $A = 2$, $B = 3$. Entonces,

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\int \tfrac{2x-3}{x^2-2x-3} dx &= \int \left(\tfrac{2}{x+1} + \tfrac{3}{x-3}\right) dx \\ &= 2\int \frac{dx}{x+1} + 3\int \frac{dx}{x-3} \\ &= 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C \\ &= \ln|x+1|^2 + \ln|x-3|^3 + \ln k \\ &= \ln k|x+1|^2|x-3|^3\end{aligned}$$

8. Encontrar la función $y = f(x)$ sabiendo que $y' = x^2 - x$ , y que además $y = 4$ cuando $x = 3$

   **Solución:** De $y' = \frac{dy}{dx} = x^2 - x$ , se tiene $dy = (x^2 - x)dx$ , aplicando integral

$$\begin{aligned} \int dy &= \int (x^2 - x)dx \\ \text{de donde,} \quad y &= \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

   Ahora, como $y = 4$ cuando $x = 3$, se tiene que $4 = \frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} + C$ , de donde $C = -\frac{1}{2}$
   Por lo tanto, la función buscada es

$$y = f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$$

9. Determinar $y = f(x)$ , sabiendo que satisface las dos condiciones siguientes: $y' = -\frac{x}{y}$ , $f(0) = 1$

   **Solución:** Como $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ , de donde $y\,dy = -x\,dx$ . Aplicando integral se tiene:

$$\begin{aligned} \int y\,dy &= -\int x\,dx \\ \frac{1}{2}y^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + C \\ y^2 &= -x^2 + 2C \\ y &= \pm\sqrt{-x^2 + 2C} \end{aligned}$$

   $f(0) = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 = \sqrt{-0^2 + 2C}$ , de donde $c = \frac{1}{2}$.
   Luego, la función es

$$y = f(x) = \sqrt{-x^2 + 1}$$

10. La función de costo marginal mensual de una empresa es

$$C'(x) = 30 - 0,05x$$

   *a*) Determinar la función de costo $C(x)$, si los costos fijos son de $2000 por mes.
   **Solución:**

$$\begin{aligned} \tfrac{dC}{dx} &= 30 - 0,05x \\ dC &= (30 - 0,05x)dx \\ C &= 30x - 0,025x^2 + k \end{aligned}$$

   Como los costos fijos son de $2.000 por mes, se tiene que $C = 2000$ cuando $x = 0$ , luego

$$2000 = (30)(0) - (0,025)(0^2) + k$$

de donde $k = 2000$. Por consiguiente, la función de costo es

$$C(x) = 30x - 0,025x^2 + 2000$$

*b*) ¨Cuánto costará producir 150 unidades por mes?

**Solución:**

$$\begin{aligned} C(150) &= (30)(150) - (0,025)(150)^2 + 2000 \\ &= 5937,5 \end{aligned}$$

Luego, el costo de producir 150 unidades por mes es de \$5937,5

## 8.5. Ejercicios

1. Decidir si $F(x)$ es una primitiva o antiderivada o una integral de $f(x)$, en:

   a) $f(x) = x^5 + 1$ $\quad F(x) = \frac{1}{6}x^6 + x + 8$
   b) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ $\quad F(x) = \mathrm{e}^{2x}$
   c) $f(x) = 2x(x^2+1)^9$ $\quad F(x) = \frac{1}{10}(x^2+1)^{10}$
   d) $f(x) = \ln x$ $\quad F(x) = x\ln x - x$
   e) $f(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ $\quad F(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$

2. Encontrar la antiderivada o integral de las funciones siguientes con respecto a las variables independientes en cada caso

   a) $\sqrt{u}(u+1)(2u-1)$ b) $\frac{3z^3-2z^5+3z-5}{2\sqrt{z}}$ c) $\frac{\mathrm{e}^t}{\ln 2}$

   d)$3\theta^2 - 6\theta + \frac{9}{\theta} + 4\mathrm{e}^\theta$ e) $x\mathrm{e}^{-5} + \mathrm{e}x^{-5}$ f) $\frac{(y+2)(y+3)}{y^2}$

3. Encontrar la integral de cada una de las siguientes funciones y comprobar el resultado usando derivadas.

   (a) $q(x) = \cos 3x$ (b) $r(x) = 4x + x^{\frac{1}{2}}$

   (c) $s(x) = \sqrt{x-1}$ (d) $t(x) = 5\sin 5x$

4. Decidir si las siguientes integraciones son correctas:

   *a*) $\displaystyle\int \tan bx\,dx = \frac{1}{b}\ln\sec bx + C$

   *b*) $\displaystyle\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \tan ax) + C$

   *c*) $\displaystyle\int \csc^2 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cot 3x + C$

   *d*) $\displaystyle\int x^2\sec^2 x^3\,dx = \frac{1}{3}\tan x^3 + C$

*e)* $\int \frac{1}{\text{sen}^2 x}\,dx = -\cot x + C$

*f)* $\int (\tan\theta + \cot\theta)^2\,d\theta = \tan\theta - \cot\theta + C$

*g)* $\int (\sec\phi - \tan\phi)^2\,d\phi = 2(\tan\phi - \sec\phi) - \phi + C$

*h)* $\int \frac{1}{1+\cos t}\,dt = -\cot t + \csc t + C$

*i)* $\int \frac{1}{1+\text{sen} s}\,ds = \tan s + \sec s + C$

*j)* $\int \frac{ax dx}{x^4+b^4} = \frac{a}{2b^2}\arctan\frac{x^2}{b^2} + C$

*k)* $\int \frac{dt}{(t-2)^2+9} = \frac{1}{3}\arctan\frac{t-2}{3} + C$

*l)* $\int \frac{(1+2x)dx}{1+x^2} = \arctan x + \ln(1+x^2) + C$

*m)* $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2-1}} = 2\sqrt{x^2-1} + \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C$

*n)* $\int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} - \text{arcsen} x + C$

*ñ)* $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2+9} = \frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$

*o)* $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+2x+5} = \ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + C$

*p)* $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{4x-x^2}} = -\sqrt{4x-x^2} + 4\text{arcsen}\frac{x-2}{2} + C$

*q)* $\int \text{sen}^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C$

*r)* $\int \cos^2\phi\,\text{sen}\phi\,d\phi = -\frac{1}{3}\cos^3\phi + C$

5. Encontrar cada una de las siguientes integrales y comprobar el resultado usando derivadas.

(a) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-2x^2}}$ (b) $\int \frac{tdt}{3t^2+4}$ (c) $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx$

(d) $\int (y^2 - \frac{1}{y^2})dy$ (e) $\int \frac{\sin a\theta d\theta}{\cos a\theta + b}$ (f) $\int \frac{\csc^2 \phi d\phi}{\sqrt{2\cot\phi + 3}}$

(g) $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+5x+6}$ (h) $\int \frac{(2x+7)dx}{x+3}$ (i) $\int \frac{(x^2+2)dx}{x+2}$

(j) $\int \frac{(x^3+3x)dx}{x^2+1}$ (k) $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt[3]{1+3x+2x^2}}$ (l) $\int \frac{(e^t+2)dt}{e^t+2t}$

(m) $\int \frac{(e^x+\text{sen}x)dx}{\sqrt{e^x-\cos x}}$ (n) $\int \frac{(\sec 2\theta \tan 2\theta)d\theta}{3\sec 2\theta - 2}$ (o) $\int \frac{\sec^2 2tdt}{\sqrt{5+3\tan 2t}}$

6. Aplicar la fórmula de *integración por partes* para decidir si las siguientes integraciones son correctas:

   *a*) $\int x\text{sen}x\, dx = \text{sen}x - x\cos x + C$

   *b*) $\int \ln x\, dx = x(\ln x - 1) + C$

   *c*) $\int x\text{sen}\frac{x}{2}\, dx = 4\text{sen}\frac{x}{2} - 2x\cos\frac{x}{2} + C$

   *d*) $\int u\sec^2 u\, du = u\tan u + \ln\cos u + C$

   *e*) $\int xa^x\, dx = a^x(\frac{x}{\ln a} - \frac{1}{\ln^2 a}) + C$

   *f*) $\int \arcsin x\, dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

   *g*) $\int \arctan x\, dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$

   *h*) $\int \text{arc}\cos 2x\, dx = a\,\text{arc}\cos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$

   *i*) $\int x^2 e^{-x}\, dx = -e^{-x}(2+2x+x^2) + C$

   *j*) $\int e^\theta \cos\theta\, d\theta = \frac{e^\theta}{2}(\text{sen}\theta + \cos\theta) + C$

   *k*) $\int \frac{\ln x dx}{(x+1)^2} = \frac{x}{x+1}\ln x - \ln(x+1) + C$

7. Resolver por fracciones parciales.

(a) $\int \frac{5x^2-3}{x^3-x}dx$ (b) $\int \frac{x+10}{x^2-x-2}dx$

(c) $\int \frac{x^2+8}{x^3+4x}dx$ (d) $\int \frac{x^5}{(x^2+4)^2}dx$

8. Ejercicios diversos.

(a) $\int \frac{3x}{\sqrt{5-2x^2}}dx$ (b) $\int x\cos 2x\,dx$ (c) $\int \frac{(4x+3)dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$

(d) $\int \frac{(4x+3)dx}{x^2+4x+8}$ (e) $\int \frac{dx}{x^2-6x+9}$ (f) $\int \frac{(ae^\theta+b)d\theta}{ae^\theta-b}$

(g) $\int (e^{2x}+2e^{-x})^2\,dx$ (h) $\int \frac{dx}{e^x-4e^{-x}}$ (i) $\int \frac{4-x}{x^4-x^2}dx$

(j) $\int \frac{4xdx}{1-4x^4}$ (k) $\int \frac{x^3dx}{x-1}dx$ (l) $\int \frac{dx}{4^{2x}}$

(m) $\int e^{2t}\cos 3t\,dt$ (n) $\int (e^x+\mathrm{sen}x)^2\,dx$ (o) $\int \frac{-2x-4}{x^3+x^2+x}dx$

9. Hallar la ecuación de la curva cuya pendiente en un punto cualquiera es la expresión dada y que pasa por el punto indicado:

| | Pendiente | Punto |
|---|---|---|
| (a) | $x$ | $(0,1)$ |
| (b) | $-xy$ | $(0,2)$ |
| (c) | $\frac{y}{x^2}$ | $(1,1)$ |
| (d) | $\frac{xy}{x^2+y}$ | $(1,2)$ |

10. El costo marginal de los Productos MM es $3-0,001x$ y el costo de fabricar 100 unidades es de \$995. ¿Cuál es el costo de producir 200 unidades? . ¿Cuál es el costo fijo de producción?

11. Determinar si existe una función $f$ que satisfaga las condiciones que se indican

*a*) $f'(x)=2x(x^2+1)^3$ , $f(2)=-7$
*b*) $f'(x)=(\sqrt{2}y+1)^2$ , $f(0)=0$
*c*) $f'(x)=\frac{1}{3}x^2+2x+5$ , $f(1)=\frac{1}{9}$

12. Un objeto se está moviendo de tal manera que su velocidad dentro de $t$ minutos será de $3+2t+6t^2$ pies por minuto. ¿Qué distancia recorre el objeto durante el primer minuto?, y ¿Durante el segundo minuto?

13. La función ingreso marginal de cierta empresa es $20 - 0,02x - 0,03x^2$. Determinar la función ingreso, y ¿Cuánto ingreso se obtendrá por la venta de 100 unidades del producto de la empresa?

14. En cada punto de cierta curva es $y'' = x$. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto $(3, 0)$ y que en ese punto su pendiente es igual a $7/2$.

15. En cada punto de cierta curva es $y'' = \frac{12}{x^3}$. Hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto $(1, 0)$ y es tangente en ese punto a la recta $6x + y = 6$.

16. Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales observados en ratas a las que se alimentó con una dieta que contenía el 10 % de proteínas. La proteína estaba formada por yema de huevo y harina de maíz. Durante cierto tiempo el grupo descubrió que la razón de cambio en el aumento promedio en peso $G$ (en gramos)de una rata con respecto al porcentaje $P$ de yema que contenía la mezcla de proteínas era:

$$-\frac{P}{25} + 2, \quad \text{con} \quad 0 \leqslant P \leqslant 100$$

Si $G = 38$ cuando $P = 10$, encontrar $G$.

17. En la fabricación de un producto los costos fijos por semana son \$4.000. Si la función de costos marginales es

$$\frac{dc}{dq} = 0,000001(0,002q^2 - 25q) + 0,2$$

en donde $c$ es el costo total (en pesos) de fabricar $q$ kilos del producto por semana. Calcular el costo de fabricar 10.000 kilos en una semana.

18. El ingreso marginal de una empresa para su producto es

$$R'(x) = 10(20 - x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{20}}$$

Determinar la función de ingreso.

19. Después que una persona ha estado trabajando por $t$ horas con una máquina en particular, habrá rendido $x$ unidades, en donde la tasa de rendimiento (n£mero de unidades por hora) está dada por:

$$\frac{dx}{dt} = 10(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{50}})$$

   *a*) ¨Cuántas unidades de rendimiento alcanzará la persona en sus primeras 50 horas?

*b*) ¨Cuánto rendirá durante las segundas 50 horas?

20. Para un grupo urbano específico algunos sociólogos estudiaron los ingresos anuales promedios, $y$, (en miles de pesos) que una persona puede esperar recibir con $x$ años de educación antes de buscar empleo regular.

    Se estimó que la razón a la cual el ingreso cambia con respecto a los años de educación está dada por:
$$10x^{\frac{3}{2}} \text{ con } 4 \leqslant x \leqslant 16$$
    Si $y = 5872$ cuando $x = 9$, determinar $y$.

21. Un árbol ha sido trasplantado y después de $t$ años está creciendo a una razón de $1 + \frac{1}{(t+1)^2}$ pies por año. En dos años ha alcanzado una altura de 7 pies. ¿Qué altura tenía cuando fue trasplantado?

22. Se calcula que dentro de $x$ meses la tasa de crecimiento de cierta población será de $2 + 6\sqrt{x}$ personas por mes. La población actual es de 5.000 personas. ¿Cuál será la población dentro de 9 meses?

## 8.6. Respuesta a los ejercicios de número impar

- 1) (a) Si (c) Si (e) Si.
- 3) (a) $\frac{1}{3}\text{sen}\, 3x + C$ (c) $\frac{2}{3}(x-1)^{3/2} + C$

- 5)
  (a) $-\frac{1}{2}\sqrt{1-2x^2}+C$ (c) $\frac{2}{3}x^{3/2}-2x^{1/2}+C$

  (e) $-\frac{1}{a}\ln(\cos ax+b)+C$ (g) $\ln(x^2+5x+6)+C$

  (i) $\frac{1}{2}x^2-2x+6\ln(x+2)+C$ (k) $\frac{3}{2}(1+3x+2x^2)^{2/3}+C$

  (m) $2\sqrt{\mathrm{e}^x-\cos x}+C$ (o) $\frac{1}{3}\sqrt{5+3\operatorname{tg}2t}+C$
- 7) (a) $\ln cx^3(x^2-1)$ (c) $\ln\frac{cx^2}{\sqrt{x^2+4}}$
- 9) (a) $2y=x^2+2$ (c) $y=\mathrm{e}^{(x-1)/x}$
- 11) (a) $f(x)=\frac{1}{4}(x^2+1)^4-\frac{653}{4}$ (c) $f(x)=\frac{1}{9}x^3+x^2+5x-6$
- 13) Función de ingreso $R(x)=20x-0,01x^2-0,01x^3$. Cuando $x=100$ , $R=-8100$.
- 15) $xy+6x=6$
- 17) \$ 5416,67
- 19) (a) 184 (b) 384
- 21) $\frac{13}{3}$ pies.