

CAPÍTULO

10

Pruebas

Prueba N°1 - Tema: Capitulo 1 y 2

1. **1 punto.** Se espera que del total de alumnos inscritos en la asignatura, el 20% obtendrá una nota no menor a 6,0; el 65% obtendrá una nota no menor a 4,0 y menos que 6,0. Si x representa el número total de alumnos inscritos en la asignatura, escribir una expresión algebraica que represente al número de alumnos que obtendrán una calificación diferente (nota menor que 4,0).
2. **1 punto.** Si $S = \{x \in \mathbf{R} / |2x + 1| < 5\}$, y $T = \{y \in \mathbf{Z} / 2y^2 + y - 1 = 0\}$
Calcular $S^c \cup T$.
3. **1 punto.** Determinar todos los $x \in \mathbf{R}$ tales que

$$|x + 5| - 5 = |x|$$

4. **1 punto.** Resolver en \mathbf{R}

$$\frac{x + 1}{x + 3} + \frac{x + 5}{x - 2} \geq \frac{7(2x + 1)}{x^2 + x - 6}$$

5. **2 punto.** Una compañía fabricará un total de 10.000 jeringas desechables en sus dos plantas A y B .

En la planta A , los costos fijos de producción son de \$30.000 y el costo unitario de \$5.

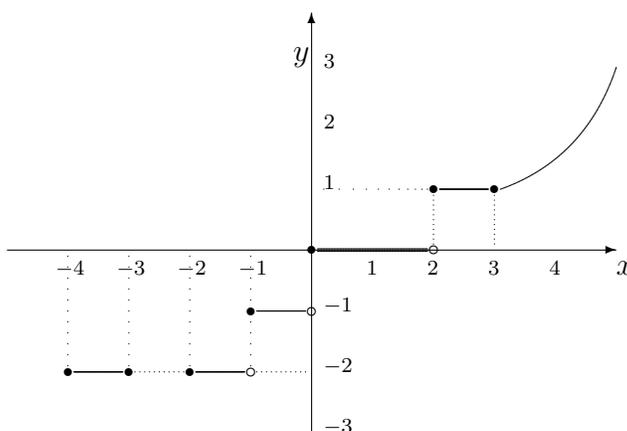
En la planta B , los costos fijos de producción son de \$35.000 y el costo unitario de \$5,5. La compañía ha decidido asignar, entre las dos plantas, no más de \$117.000 para los costos totales de producción.

- a)* ¿Cuál es el número mínimo de unidades que se deben fabricar en la planta A ?, justificar.
- b)* Si se fabrica este número de unidades en A , ¿cuáles son los costos totales de lo que se produce en la planta B ?

Prueba N°2 - Capítulo 3

1. **6 puntos.**

- Determinar el Dominio de f si f está definida por $y = f(x) = 3 - \ln(x - x^2)$
- Determinar el Recorrido de g si g está definida por $y = g(x) = x - x^2$
- Considerar $h(x) = 1 + 2\sin x$, con $x \in [0, 2\pi]$. Calcular el Recorrido de h
- Si $f(x) = x^2$, $g(x) = 1 - x$, $h(x) = \frac{1}{x-2}$. Calcular $[(f - g) \circ h](x)$

2. **6 puntos.** Considerar la función $y = f(x)$ cuya gráfica es la figura siguiente

- Determinar el Dominio y el Recorrido de f
 - Determinar si f es función 1-1, justificar.
 - Representar gráficamente f^{-1} , la relación inversa de f
 - Determinar el conjunto $A = \{x \in \mathbf{R} / f(x) = -2\}$
3. **6 puntos.** En un mercado de libre competencia el volumen de ventas de un determinado producto depende de la cantidad gastada en la publicidad del producto en cuestión. Si se gastan $\$x$ (dólares) al mes proporcionando un producto determinado se encuentra que el volumen de ventas al mes está dado por:

$$S = S(x) = 10000(1 - e^{-0,001x})$$

- Calcular el volumen de venta al mes cuando se gasta $\$500$ (dólares) en publicidad
- ¿Para qué cantidad gastada en publicidad el volumen de ventas será de $\$10.000$ (dólares) al mes?
- Calcular una fórmula explícita para $S^{-1}(x)$

Prueba N°3 - Tema: Capítulo 4

1. **14 puntos.** Considerar los siguientes polinomios reales:

$$P(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x$$

$$Q(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$

- a) Sin calcular raíces, explicar por qué el número de raíces reales de $P(x)$ entre -2 y $-1/2$ debe ser un número par.
- b) Calcular cociente y resto de la división de $P(x)$ por $Q(x)$.
- c) Calculando cotas para las raíces reales y haciendo análisis de la naturaleza de las raíces (Regla de los signos de Descartes), determinar *todas* las raíces de $Q(x)$.
- d) Usando (c) factorizar completamente $Q(x)$ en los números reales.
- e) Descomponer en fracciones parciales

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

2. **4 puntos.** Se tiene una caja (paralelepípedo rectangular) de dimensiones 2cm, 3cm y 4cm. Se forma una segunda caja incrementando cada una de estas dimensiones en una misma cantidad x . Luego, se construye un cubo de arista igual a x . Determinar el valor de x de modo que el volumen de la segunda caja obtenida sea 15 veces el volumen del cubo.

Prueba N°4 - Tema:Capítulo 5

1. **6 puntos.** Considerar los puntos $A = (-1, 4)$; $B = (14, 5)$; $O = (0, 0)$
 - a) Determinar ecuación de la recta L que pasa por A y por B
 - b) Determinar ecuación de la recta M que pasa por B y es perpendicular a L
 - c) Calcular el área del triángulo ABP , donde P es el punto de intersección de L y M

2. **3 puntos.**
 - a) Determinar vértice, foco de la parábola $x^2 - 8y = 0$ y dibujarla
 - b) Representar gráficamente en el plano cartesiano

$$\begin{aligned}x^2 &< 8y \\ y &\neq 2\end{aligned}$$

3. **3 puntos.** Determinar si la ecuación dada representa algún lugar geométrico real. Identificarlo cuando corresponda.
 - a) $4x^2 + 16x - 4y + 4y^2 + 17 = 0$
 - b) $y^2 - 2y = -4 - x^2$
 - c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

4. **6 puntos.** (Considerar $\Pi = 3$) Un trozo de alambre se divide en dos partes de longitud x e y , respectivamente. Con el trozo de largo x se hace un cuadrado, con el otro una circunferencia. Se sabe que la suma de las áreas de las figuras hechas es $\frac{1}{2}$. Determinar la ecuación que relaciona a x e y . Identificar la curva encontrada y calcular vértice, centro (si los tuviere).

Prueba N°5 - Tema: Capítulo 6 y 7 primera parte

1. **6 puntos.** Calcular lo que se indica en cada caso:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + (\sqrt{4+x} - 2)}{3x}$

b) $\frac{dy}{dx}$ sabiendo que $y = x^2 \ln 2x$

c) y' si y es una función de x definida implícitamente por $y^2 = (x - y)(x^2 + y)$

2. **6 puntos.** Considerar la función, f , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Determinar, **usando la definición**, si f es continua en $x = -1$

b) Determinar, **usando la definición**, si f es derivable en $x = 0$

3. **6 puntos.** Considerar $y = f(x) = 5 - 4e^{3x} + x^2$

a) Encontrar una ecuación de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = 0$

b) Evaluar y simplificar la expresión $y'' - 3y'$.

4. **6 puntos.** Suponer que la efectividad E de un calmante a las t horas de su entrada al torrente sanguíneo está dada por

$$E = \frac{1}{27}(9t + 3t^2 - t^3), \quad \text{para } 0 \leq t \leq 9/2$$

a) Determinar la razón o tasa de cambio de la efectividad del calmante entre los 60 y 90 primeros minutos de su entrada al torrente sanguíneo.

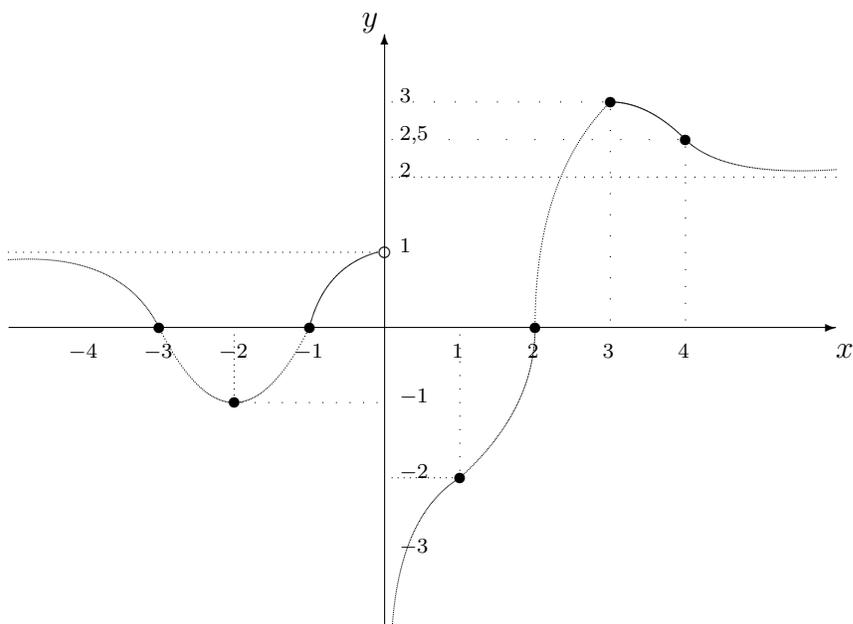
b) Determinar la razón o tasa de cambio de la efectividad del calmante a las dos horas y media de su entrada al torrente sanguíneo.

=====

<i>Límites especiales</i>	<i>Fórmulas derivadas</i>
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$	$\frac{d}{dx}(\log_b u) = \frac{1}{u} \log_b e \frac{du}{dx}$
$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$	$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u (\ln a) \frac{du}{dx}$
$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$	$\frac{d}{dx}(\sin u) = u' \cos u$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	$\frac{d}{dx}(\cos u) = -u' \sin u$

Prueba N°6 - Tema: Capítulo 7 y 8

1. **6 puntos.** Considerar $f : \mathbf{R}/\{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ función cuya gráfica es la siguiente:



- a) Si existieren, escribir ecuación de todas las asíntotas horizontales y verticales. Además, justificar por qué lo son.
- b) Especificar intervalos donde la *derivada* de f es positiva y donde es negativa, justificar.
- c) Si existieren, indicar todos los valores críticos de f (justificar) y los puntos de inflexión, justificar.
- d) Indicar extremos locales y absolutos en $\text{Dom } f$, justificar.
- e) Indicar extremos locales y absolutos en $[1, 4]$, justificar.
2. **6 puntos.** Una función $y = f(x)$ es tal que $f'(x) = 0,5x - 10$ y además se sabe que tiene un mínimo igual a 700. Calcular $f(0)$.
3. **6 puntos.** Se desea construir una caja sin tapa, con área total de 300m^2 y de base cuadrada. Hallar las dimensiones de la caja para que el volumen sea máximo y cuál es este máximo.
4. **6 puntos.** Calcular:

$$(a) \int x\sqrt{x-1} dx \quad (b) \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} \quad (c) \int \frac{x^3 + 4x - 2}{(x^4 + 8x^2 - 8x - 5)^2} dx$$

Examen

1. **10 puntos.** Considerar las siguientes funciones polinómicas:

$$p(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3 \quad q(x) = x^2 - 4x - 5$$

- Factorizar el polinomio $p(x)$ completamente sobre los números reales.
- Resolver la inecuación $p(x) > q(x)$
- Calcular $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{p(x)}{q(x)}$
- Determinar todos los puntos de discontinuidad e indicar el tipo de discontinuidad de la función:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

2. **4 puntos.** Cierta curva de ecuación $y = f(x)$ satisface:

$$dy = \frac{4x}{y} dx$$

- Encontrar la ecuación de la curva e identificarla (recta, parábola, etc.)
 - Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(2, 1)$
3. **4 puntos.** Se ha decidido construir una estructura metálica, con forma de paralelepípedo rectangular (como una caja de fósforo), sin piso y sin una cara lateral. Se desea con una capacidad para 486m^3 . Si el material vale \$2 (en miles) el metro cuadrado, determinar las dimensiones de la estructura que minimizan el costo del material y determinar este costo mínimo.