CAPÍTULO

9

Ejercicios de Tarea

Conjuntos Numéricos
Operaciones y Propiedades

1. Establecer cuáles de las siguientes sentencias son verdaderas y cuáles son falsas. En las verdaderas señalar los pasos que así lo verifican señalando las propiedades usadas.

   - $\sqrt{a} - \sqrt{b} = -(\sqrt{b} - \sqrt{a})$
   - $0{,}999... = 1$
   - Si $a \cdot b = a \cdot c$, entonces $a = c$
   - Si $a^2 = 1$, entonces $a = 1$

2. Simplificar la siguiente expresión:

$$\left(\frac{\sqrt{x^{-2}}y^{-3/2}}{(x^5)^{-2}y^2} : \frac{x^{-3}y^3}{(xy)^{-2}}\right)^{-2}$$

3. **Un problema de razonamiento**

   En cierta comunidad mítica, los políticos siempre mienten y los no políticos siempre dicen la verdad. Un extranjero se encuentra con tres nativos y pregunta al *primero* de ellos si es un político. Este responde la pregunta. El *segundo* nativo informa, entonces, que el primer nativo negó ser un político. Pero el *tercer* nativo afirma que el primer nativo es realmente un político. **¿Cuántos de estos tres nativos eran políticos?**

Expresiones Algebraicas y Ecuaciones I

4. Determinar si las siguientes expresiones algebraicas son iguales:

$$\frac{3x^2(2x+5)^{\frac{1}{2}} - x^3(\frac{1}{2})(2x+5)^{-\frac{1}{2}}}{[(2x+5)^{\frac{1}{2}}]^2} \quad \text{y} \quad \frac{5x^2(x+3)}{(2x+5)^{\frac{3}{2}}}$$

5. Resolver los ejercicios 8, 9 y 10 de la página 10; el 1 de la página 17, de los "Apuntes de Matemática".

6. Los números naturales impares, como 1, 3, 5, 7, 9, ... se representan por la expresión $2n+1$. Escribir una expresión algebraica para:

   a) El número par que sigue de $2n+1$

   b) El número impar que antecede a $2n+1$

   c) 24 menos que el triple del número $2n+1$

7. Buscar un patrón en las ecuaciones de abajo:

Suma del **1**, primer, número impar	1	$=\mathbf{1}$
Suma de los **2** primeros números impares	$1+3$	$=\mathbf{4}$
Suma de los **3** primeros números impares	$1+3+5$	$=\mathbf{9}$
Suma de los **4** primeros números impares	$1+3+5+7$	$=\mathbf{16}$

   Escribir una expresión algebraica que represente la suma de los n primeros números naturales impares.

8. Resolver (en $\mathbf{R}$)las siguientes ecuaciones:

   a) $\dfrac{3x}{x-2} = 1 + \dfrac{6}{x+2}$

   b) $(3x+1)^2 - 9x^2 = 6x+1$

   c) $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x+7} + 2 = 0$

   d) $3 + \sqrt{3x+1} = x$

   e) $x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{3}} = 6$

   f) $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

9. Encontrar una ecuación en la siguiente lista que *no es equivalente* a la ecuación que la precede, explicar.

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= x^2 - 4 \\ (x+1)(x-2) &= (x+2)(x-2) \\ x+1 &= x+2 \\ 1 &= 2 \end{aligned}$$

10. Despejar la variable indicada en términos de las restantes:

    a) $S = \dfrac{a}{1-r}$ para r

    b) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para x_1

    c) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$ para R_2

    d) $s = \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + h^2}$ para r_2

    e) $2x^2 - xy = 3y^2 + 1$ para x y para y

Ecuaciones II

11. Resuelva las ecuaciones

    a) $2\sqrt{\frac{x}{3}} + 3\sqrt{\frac{3}{x}} = \frac{55}{3}$
    (*Pista:* Use la variable auxiliar $y = \sqrt{\frac{x}{3}}$)

    b) $\sqrt{\frac{1}{w}} - \sqrt{\frac{2}{5w-2}} = 0$

12. Si las raíces de la ecuación $ax^2 + 2bx + c = 0$ son α y β, y las de la ecuación $Ax^2 + 2Bx + c = 0$ son $\alpha + k$ y $\beta + k$, demostrar que

$$\frac{b^2 - ac}{a^2} = \frac{B^2 - AC}{A^2}$$

13. Demostrar que las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática son números racionales

$$(a + b - c)x^2 + 2cx + b + c - a = 0$$

14. Determine si alguna de las ecuaciones siguientes son equivalentes:

    a) $\frac{x+7}{2x+1} - \frac{6x+1}{2x} = 1$

    b) $\frac{3}{x^2-4} + \frac{2}{x^2+4x+4} = \frac{4}{x+2}$

    c) $2\sqrt{x-1} + \sqrt{x+6} = 7$

    d) $4x(x-5) = 18$

15. Resolver la ecuación $(x-5)(x+4)(x-7)(x+6) = 504$. (*Pista:* Multiplique los dos primeros factores entre sí y los dos últimos factores entre sí. Ahora use una variable auxiliar de la forma $y = x^2 - x$.)

Problemas con enunciado

16. A y B empiezan a jugar con cantidades iguales, y cuando B ha perdido 5 onceavos de lo que tenía cuando empezó, A ha ganado 6 pesos más de la mitad de lo que le queda a B; ¿Cánto tenían al principio?

17. El perímetro de un cuadrado excede al de otro en 100 metros, y el área del mayor excede tres veces el área del menor en 325 metros cuadrados. Hallar la longitud de los lados.

18. Una piscina puede llenarse por dos tuberías juntas en $22\frac{1}{2}$ minutos; la mayor la llenaría en 24 minutos menos que la menor. Hallar el tiempo que tardaría cada una.

19. Hay un número entre 10 y 100; si se multiplica por el dígito de la izquierda , el producto es 280; si la suma de los dígitos se multiplica por el mismo dígito, el producto es 55. ¿Cuál es el número?

20. De cierto número se toma, y el residuo se divide por 4; el cociente se aumenta entonces en 4 y se divide por 5 y el resultado es 2. Hallar el número.

21. ¿Cuál es el capital de una persona cuyo ingreso es de 430 pesos, cuando ha invertido dos tercios al por 4 ciento, un cuarto al 3 por ciento y el resto al 2 por ciento?

22. Un granjero habiendo vendido a 75 pesos por cabeza un rebaño de ovejas que le costaron x pesos por cabeza, ve que ha obtenido el x por ciento de utilidad sobre su costo original. Hallar x.

23. Un comerciante compró varios metros de tela a 150 pesos; se quedó con 5 metros y vendió el resto a tres pesos el metro más de lo que dió, y obtuvo 30 pesos más de lo que gastó originalmente; ¿Cántos metros compró?

24. Si A y B son dos estaciones que están a 300 kilómetros una de la otra. Dos trenes parten simultáneamente desde A y B, cada uno a la otra estación. El tren que sale de A llega a B en nueve horas, el tren que sale de B llega a A 4 horas después de que se encuentran; Hallase la velocidad de cada tren.

25. Dos granjeros A y B tienen 30 vacas entre los dos; las venden a distintos precios pero cada uno recibe la misma suma. Si A hubiese vendido las suyas al precio de B, hubiese recibido 9600 pesos, y si B las hubiera vendido al precio de A hubiese recibido 7350 pesos. ¿Cuántas tenía cada uno?

26. Si una recta de 6 centímetros de longitud se divide interiormente de modo que el rectángulo formado por toda ella y una parte es igual al cuadrado construído sobre la otra, hallar los segmentos de recta al milímetro más próximo.

Desigualdades

27. Diga si es **Verdadero o Falso**. Si es **verdadero** verificar, si es **falso** dar un contra-ejemplo.

    a) $a < 1 \Longrightarrow a^2 < a$
    b) $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a+b}{b} \leqslant \frac{c+d}{d}$
    c) $x^2 < 1 \Longrightarrow x < 1$
    d) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $ac < bd$
    e) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a - c < b - d$
    f) Si $a < b$ y $c < d$, entonces $a - d < b - c$

28. Descubrir y explicar el error en el siguiente razonamiento:

    Sean $m, n \in \mathbf{R}$ tal que $m > n > 0$

    Entonces:
$$\begin{array}{rcll} m \cdot n & > & n^2 & \Longrightarrow \\ m \cdot n - m^2 & > & n^2 - m^2 & \Longrightarrow \\ m \cdot (n - m) & > & (n + m) \cdot (n - m) & \Longrightarrow \\ m & > & n + m & \Longrightarrow \\ 0 & > & n & \Longrightarrow \end{array}$$

    Lo que es imposible por el supuesto inicial: $n > 0$

29. Comprobar la siguiente **desigualdad absoluta**: Sean a y b en $\mathbf{R}^+$, con $a \neq b$,

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

30. Resolver las siguientes inecuaciones:

    a) $x^2 \leqslant 10x$
    b) $\frac{x^2}{x^2-9} \leqslant \frac{10}{x^2-9}$
    c) $3 < \frac{3x-6}{x-3} < 6$
    (d) $3 < \dfrac{|3x - 6|}{x - 3} < 6$

(e) $3 < \frac{3x-6}{|x-3|} < 6$

(f) $3 < |\frac{3x-6}{x-3}| < 6$

31. Resolver las siguientes ecuaciones modulares:

    a) $|5 - |4 - x|| = 3$

    b) $|2 - x| - |1 + x| = 3$

32. La razón de circulante de una empresa es 3.8. Si sus activos circulantes son de M\$570.000, ¿cuánto valen sus pasivos circulantes?. Para obtener fondos adicionales, ¿cuál es la cantidad máxima que se puede obtener a crédito, a corto plazo, si se desea que su razón de circulante no sea inferior a 2.6?

    Nota: La *razón de circulante* en un negocio es el cuociente entre sus *activos circulantes* (como efectivo, inventario de mercancías y cuentas por cobrar) y sus *pasivos circulantes* (como préstamos a corto plazo e impuestos por pagar).

33. Un capital se deposita por un año a cierto interés compuesto semestralmente. ¿Cuál debe ser el interés si se requiere que por lo menos el capital se triplique en ese período?.

34. En un experimento de química, una solución de ácido clorhídrico se mantuvo entre 40^oC y 55^oC, es decir:

$$40 \leqslant C \leqslant 55$$

¿Cual es la variación de la temperatura en grados **Farenheit**?.

Desigualdades y Problemas relacionados

35. Determinar todos los valores enteros de x que satisfacen cada una de las siguientes inecuaciones:

a) $3x - \frac{1}{4} > 20 - \frac{2}{3}x$
b) $\frac{2}{5}x - 23 \leqslant 2x - 16$

36. Determinar el conjunto solución de cada una de las siguientes inecuaciones. Escribir la respuesta en notación de conjunto y usando intervalos:

a) $|x-1| < 3$
b) $|x-1| \geqslant x$
c) $|x-1| > |x+1|$
d) $|x-1| + |x+1| \leqslant \frac{x+1}{x-1}$ *
e) $|x-1| < -3$
f) $|x-1| \leqslant 0$
g) $|2x+4| \leqslant -|x+9| + |x-5|$
h) $2x^3 - 7x^2 \geqslant -3x$

37. La velocidad máxima en la carretera es de 100Km/h y la mínima es de 35Km/h. Plantear una desigualdad que describa la situación cuando un auto supera el límite de velocidad, y otra para cuando el auto circula con demasiada lentitud.

38. La diagonal de un cuadrado es 25cm. Determinar en cuántos cm se debe aumentar la longitud del lado para que el área del cuadrado sea al menos de 30cm^2 y que no sobrepase los 50cm^2.

39. Determinar cuándo un cubo de x unidades de lado tendrá un volumen mayor que su área superficial.

40. Una empresa ha de decidir cuál de dos modelos de máquina ha de comprar. Una máquina cuesta \$50 000 y se gasta \$4 000 por año para su mantención. Las cifras correspondientes para la otra son \$40 000 de costo inicial y \$5 500 en conservación. Determinar el número de años que ha de usarse la primera máquina antes de que resulte más económica que la segunda.

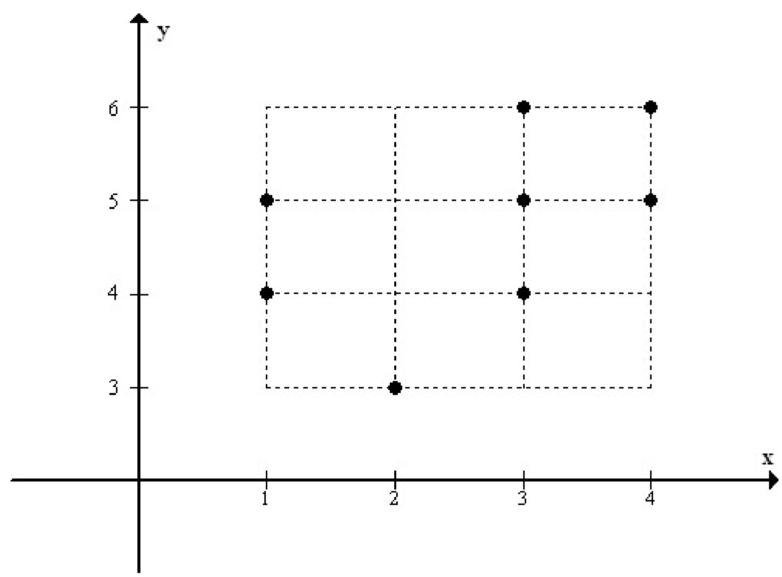
41. Una persona desea invertir por lo menos US\$10 000 y a lo más US\$20 000 en dos empresas, de modo que sus ingresos totales sean de al menos US\$1 440 al año. Una companía paga 6 % anual; la otra tiene un mayor riesgo y ofrece $7\frac{1}{2}$ % anual. Determinar la cantidad mínima que debe invertir en cada una de ellas.

42. Una empresa le ofrece un puesto en ventas, pudiendo elegir uno de dos planes para determinar su sueldo mensual. Según el plan 1, recibiría \$126 000, más un bono de 2 % de las ventas mensuales. Según el plan 2, recibiría una comisión directa de 8 % sobre las ventas. Determinar el nivel de ventas mensuales para que el plan 1 sea más conveniente para el que vende.

Relaciones

43. Sea $\mathcal{L} = \{$ rectas del plano $\}$. Considerar las siguientes relaciones en $\mathcal{L}$:
    $R_1 = \{(l, m) \in \mathcal{L} \times \mathcal{L} \,/\, l \perp m\}$
    $l\ R_2\ m \iff l \,\text{y}\, m$ son paralelas
    Establecer si R_1 y R_2 satisfacen los siguientes enunciados:
    a) $\forall a \in \mathcal{L}$: a R a
    b) Si a R b, entonces b R a
    c) Si a R b y b R c, entonces a R c

44. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ y $\mathcal{R}$ es una relación de A en B que tiene el siguiente gráfico:



Se pide determinar:

(a) Dom($\mathcal{R}$) y Cod($\mathcal{R}$) (b) $C = \{x \in B/(1, x) \in \mathcal{R}\}$

(c) $D = \{y \in A/(y, 6) \in \mathcal{R}\}$ (d) $\mathcal{R}^{-1}$

(e) El gráfico de $\mathcal{R}^{-1}$

45. Graficar las siguientes relaciones de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ y en caso que el gráfico corresponda a una curva, indicar su nombre:

(a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} / x^2 = y\}$
(b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} / x^2 < y\}$
(c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} / x^2 + y^2 = 9\}$
(d) $R_4 = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} / x^2 + 4y^2 = 9\}$
(e) $R_5 = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} / x^2 + 4y^2 \geqslant 9\}$
(f) $R_6 = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} / x^2 - 4y^2 = 9\}$
(g) $R_7 = R_2 \cap R_3$
(h) $R_8 = R_5 \cup R_6$

46. Considerar las relaciones $R = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x \geqslant 0,\ y \leqslant x,\ x + y \leqslant 1\}$ y $S = \{(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x^2 + y^2 = 1,\ x \geqslant 0\}$

a) Graficar ambas relaciones.
b) Determinar el dominio y recorrido de cada una
c) Determinar si alguna es función
d) Graficar R^{-1} y S^{-1}

47. Sea $f = \{(t, t+1) : t \in [-1, 5]\} \cup \{(t, t^2) : t \in \mathbf{R}_+\}$

a) Determinar todos los $y \in \mathbf{R}$ tales que $(2, y) \in f$
b) Determinar todos los $x \in \mathbf{R}$ tales que $(x, 9) \in f$
c) Determinar el dominio y recorrido de f
d) Graficar f
e) ¿Es f una función del Dom(f) en $\mathbf{R}$?

48. Sea $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leqslant 2 \\ -(x-3)^2 + 4, & 3 < x \leqslant 5 \\ -(x-7)^2 + 4, & 5 < x \leqslant 7 \end{cases}$

a) Determinar el dominio de f
b) Calcular $f(4)$
c) Calcular $(f\, o\, f)(4{,}5)$
d) Encontrar todos los x tales que:
(i) $f(x) = 4$, (ii) $f(x) = 1$, (iii) $f(x) = -1$

Funciones I

49. Para la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$, encontrar una función $g(x)$ tal que $(g \circ f)(x) = x$

50. El costo C para producir x unidades por <u>mes</u> de un producto está dado por :

$$C = f(x) = 19200 + 160x$$

Si la demanda <u>mensual</u> x a un precio de venta $\$p$ por unidad está dado por

$$x = g(p) = 200 - \frac{p}{4}$$

Encontrar $(f \circ g)(p)$ e interpretar el resultado.

51. Dada $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

a) Es $f(x) = f(-x)$

b) Es $f(x) = -f(-x)$

c) Determinar $A \subset \mathbf{R}$, $B \subseteq \mathbf{R}$ tal que $f : A \longrightarrow B$ sea función biyectiva. Justifique.

d) Hallar $f^{-1}(x)$

52. Si $f(x) = x^2 - 1$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$

Graficar y encontrar el Recorrido y el Dominio de

a) $f(x+2)$	b) $f(x-2)$	c) $f(x)+2$	d) $f(x)-2$
e) $f(2x)$	f) $f(\frac{x}{2})$	g) $f(-x)$	h) $-f(x)$

53. Si $f(x) = x^2 - 1$, $x \geqslant 0$ encontrar:

a) Dominio y Rango de f, f^{-1}

b) $f^{-1}(x)$

c) $f^{-1}(3)$

d) $(f^{-1} \circ f)(4)$

e) $(f^{-1} \circ f)(x)$

Funciones II

54. Sea $y = f(x) = ax + b$ una función lineal.

    a) ¿Cuándo f tiene inversa?

    b) Sea f^{-1} la inversa de f. Calcular $f \circ f^{-1}$ y $f^{-1} \circ f$

55. Sea $k \in \mathbf{R}$ y L la recta $kx + (k^2 - 2)y + 3 = 0$

    a) Graficar L si $k = 1$

    b) Determinar k para que $L \,||$ Eje Y

    c) Determinar k para que $\perp$ Eje Y

    d) Determinar k para que $\perp$ a la recta $3x + 7y + 3 = 0$

    e) Sean A y B los puntos donde L corta los ejes X e Y respectivamente. Determinar k de modo que el triángulo OAB tenga área igual a $0,5$.

56. Sean a y b números reales. Considerar las rectas L_1 y L_2 dadas por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} L_1 &: \quad ax + (2 - b)y - 23 = 0 \\ L_2 &: \quad (a - 1)x + by + 15 = 0 \end{aligned}$$

    ¿Qué relación debe existir entre a y b para que...?

    a) L_1 pase por el punto (3,2)

    b) L_2 sea perpendicular al eje X

    c) L_1 sea paralela a la recta $x + y = 1$ y L_2 sea $\perp$ a la recta $2x - y = 2$

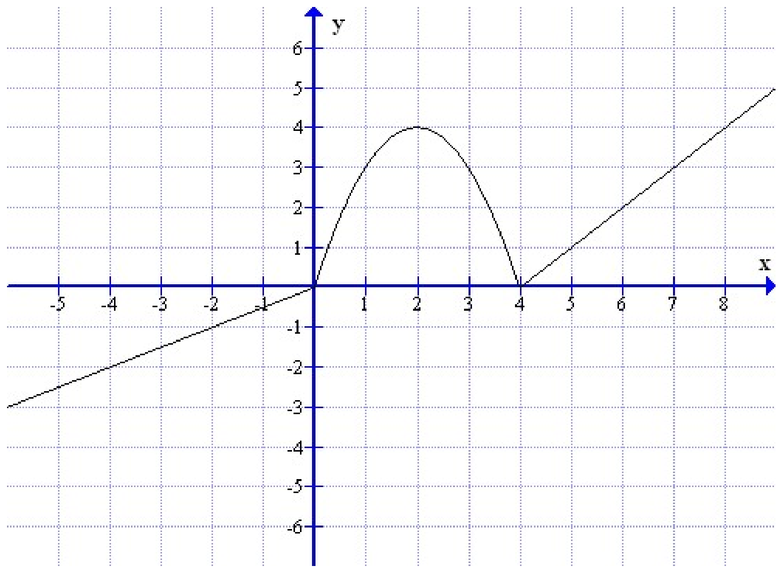
    d) L_1 y L_2 pasen por el punto $(2, -3)$

57. En cierto experimento de aprendizaje que implica repetición y memoria, se estimó que la proporción p de elementos recordados tenía una relación lineal con el tiempo efectivo de estudio t (en segundos) en donde t se encuentra entre 5 y 9. Para un tiempo efectivo de estudio de 5 segundos la proporción de elementos recordados es de $0,32$. Por cada aumento en un segundo en el tiempo de estudio la proporción recordada aumentó en $0,059$

    a) Obtener una ecuación que exprese p en función de t.

b) ¿Qué proporción de elementos fueron recordados con 9 segundos de tiempo efectivo de estudio?

58. Una función $y = f(x)$ tiene el siguiente gráfico.



Determinar explícitamente la fórmula que define $f(x)$. Observar que la $f(x)$ debe venir definida por tramos.

59. Para cada una de las siguientes funciones se pide su gráfico, intersecciones con los ejes coordenados, vértice y su recorrido.

   a) $s = h(t) = t^2 + 2t + 1$
   b) $y = g(x) = 1 - x - x^2$
   c) $t = f(s) = s^2 - 8s + 13$
   d) $y = k(x) = 6x - x^2 - 15$

60. Supóngase que la ecuación de demanda para el producto de un monopolista es $p = 400 - 2q$ y que la función de costo promedio es $c = 0,2q + 4 + \dfrac{400}{q}$, en donde q es el número de unidades, y tanto p como c están expresadas en pesos por unidad.

   a) Determinar el nivel de producción en donde se maximizan las utilidades.
   b) Determinar el precio al cual ocurren las utilidades máximas.
   c) Determinar las utilidades máximas.

d) Si como dispositivo regulador el gobierno marca un impuesto de \$22 por unidad al monopolista, ¿cuál es el nuevo precio para la maximización de las utilidades?

Funciones III

61. Considerar las funciones f y g definidas sólo para reales positivos, respectivamente, por

$$f(x) = 410 - x \qquad ; \qquad g(x) = 3x + x^2 - 70$$

a) Determinar el dominio y el recorrido de cada una de las funciones.

b) Determinar todos los valores reales de x tales que $f(x) = g(x)$

c) Graficar en un mismo sistema rectangular ambas funciones.

d) si existiere, determinar un número real M tal que $g(x) \geqslant M$ para todo x en el dominio de g.

62. Suponga que los siguientes datos corresponden a un plan de impuestos sobre las rentas de 1995 para ciertos contribuyentes:

Ingreso gravable imponible x	**Impuesto $f(x)$ sobre la renta**
$\$0 < x \leqslant 19450$	15 % del exceso sobre \$0
$\$19450 < x \leqslant \$47050$	\$2917.5+28 % del exceso sobre %19450
$\$47050 < x \leqslant \$97650$	\$10645.5+33 % del exceso sobre \$47750

a) Expresar el impuesto sobre la renta de un individuo como una función del ingreso gravable imponible x, para $0 < x < 97620$

b) Trazar la gráfica de la función de la parte **(a)**

c) La gráfica de la parte **(a)** consta de tres segmentos de rectas. Calcular las pendientes de cada una de ellos. ¿Qué le sucede a las pendientes a medida que se incrementa el ingreso gravable imponible? Explique el comportamiento de las pendientes en términos prácticos.

63. Se tiene una plancha metálica de ancho 12 pulgadas (de cualquier largo) con la que se construirá un canalón para recepcionar aguas lluvias, doblando igual longitud en los bordes. Determinar la longitud del doblez de modo que la capacidad del canalón sea máxima.

64. Los puntajes medios de la P.A.A. de los nuevos estudiantes de la UTAL (PMI) aumentan a una tasa constante en los últimos años. En 1989, el PMI era 545, mientras que en 1991 era 575.

a) Expresar el PMI como función del tiempo.

b) Si la tendencia continúa, ¿cuál será el PMI de los nuevos estudiantes en 1977?

c) Si la tendencia continúa, ¿cuándo será 527 el PMI?

65. Graficar las funciones f ; g ; h ; y r definidas, respectivamente por:

$$f(x) = 3^x \, ; \, g(x) = (\tfrac{1}{3})^x \, ; \, h(x) = 3^x - 1 \, ; \, r(x) = 3^{x-1}$$

Comparar sus dominios y recorridos. Determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una. Graficar.

66. Para tener una idea de lo que sucede con la expresión $(1 + \frac{1}{x})^x$ a medida que x crece, utilice una calculadora para completar la tabla siguiente (aproxime la respuesta a cuatro cifras decimales).

x	1	2	5	10	100	1000	10000	100000
$(1+\frac{1}{x})^x$								

Graficar $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$, especificar su recorrido para $x > 0$

67. Considerar la función f, definida por $f(x) = 2 - e^{-x}$

a) Calcular, si existieren, los puntos de intersección entre la gráfica de f y cada uno de los ejes coordenados.

b) Haciendo uso de una tabla adecuada de valores, determinar a que valor se aproxima $f(x)$ cuando x crece sin límite, y a que valor se aproxima $f(x)$ cuando x decrece sin límite.

c) Usando la información obtenida en **(a)**, **(b)** y **(c)**, trazar la gráfica de f.

68. Repetir el ejercicio anterior para la función definida por $f(x) = \frac{4}{1+2e^x}$

Funciones IV

69. Crecimiento poblacional. Los datos contenidos en este problema fueron extraídos del .Atlas de Chile y el Mundo”(ed. Plaza & Janes, 1989).

    a) Graficar (en una escala adecuada) los siguientes datos (en millones) de la población mundial desde 1600 hasta el año 1985.

Año	1600	1700	1800	1850	1900	1930	1940	1950	1960	1970	1985
Pob.	480	572	910	1170	1610	2070	2295	2500	2990	3715	4841

    b) La tasa de crecimiento anual de la población mundial entre 1980 y 1986 fue de 1,75 %. Suponiendo que esta misma tasa se mantiene en el futuro y usando como dato inicial la población mundial de 1985, efectuar las siguientes predicciones.

    1) Población mundial a mediados de 1996.
    2) Determinar cuando la población mundial será el doble de la que había en 1985 (y el triple).
    3) Según algunos demógrafos, es imposible sustentar a más de 50.000 millones de personas. Determinar en que año se alcanzará este número.

70. Resuelva las siguientes ecuaciones

    a) $\log_3(2x+3) = 4 - \log_3(x+6)$

    b) $\log_8(x-15) - \log_2(x-4)$

    c) $\frac{4(10)^{x/2}}{5} = 3$

71. Considere las funciones $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

    a) Demuestre que $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = \mathbf{R}$

    b) Demuestre que $f(g(x)) = x$ y que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in \mathbf{R}$.

72. Considerar las funciones exponenciales del tipo $y = Ce^{kx}$. Encontrar la función de este tipo cuyo gráfico pasa por los puntos

    a) $(0, \frac{1}{2})$ y $(5, 5)$

    b) $(3, \frac{1}{2})$ y $(4, 5)$

    c) $(0, 4)$ y $(5, \frac{1}{2})$

73. Considerar las funciones logarítmicas del tipo $y = r\ln(x) + d$. Encontrar la función de este tipo cuyo gráfico pasa por los puntos

    a) $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(5, 5)$

    b) $(\frac{1}{2}, 3)$ y $(5, 4)$

    c) $(4, 0)$ y $(\frac{1}{2}, 5)$

74. En un análisis de penetración de mercado, los investigadores Hurter y Rubinstein hacen referencia a la función:
$$F(t) = \frac{q - pe^{-(t+C)(p+q)}}{q\left[1 + e^{-(t+C)(p+q)}\right]}$$
Los autores afirman que si $F(0) = 0$ entonces:
$$C = -\frac{1}{p+q}\ln\frac{q}{p}$$
Pruebe que esta afirmación es correcta.

75. Usando la definición de las funciones trigonométricas y el círculo unitario, demostrar lo siguiente:

    a) $\text{sen}(x + \pi) = -\text{sen}x$

    b) $\cos(x - \pi/2) = \text{sen}x$

    c) $\cos(x + \pi) = -\cos x$

Funciones VI

76. El carbono 14 radiactivo tiene una vida media de 5730 años (vida media es el tiempo en que el material se reduce a la mitad).

    La función que modela esta situación es:

$$P = P(t) = P_0 e^{-kt}$$

donde P es la cantidad de carbono en el instante t
$t =$ tiempo (en años)
$P_0 =$ Cantidad inicial de carbono
$k =$ constante de dacaimiento

    a) Encontrar la constante de decaimiento.
    b) ¿En cuánto tiempo la cantidad de carbono es un 30 % de la cantidad inicial?
    c) Graficar la función P.
    d) ¿Qué pasa cuando t crece "indefinidamente¿

77. Resolver $\log_4 |2x+2| - \log_4 |3x+1| = \dfrac{1}{2}$

78. Demostrar:

    a) $\left(\log \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}\right) = 2\log(x+\sqrt{x^2-1})$
    b) $\dfrac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \ln\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

79. Sea $g(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}}$ y $h(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

    a) Hallar Dominio y Recorrido de g y h.
    b) Resolver $g(x) = -2$; $h(x) = 0$
    c) Calcular $(h \circ g)(x)$

80. Si $\sin\theta = \frac{13}{85}$ $\theta \in$ I, determinar el valor de :

a) $\cos\theta(\frac{\sin\theta\sec\theta+\tan\theta}{\sec\theta\tan\theta})$

b) $\sin\theta+\frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{\sec\theta-1}}\cdot\frac{\sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{\sec\theta+1}}$

c) $(\cos\theta-\sin\theta)\left(\frac{\sqrt{\csc\theta+1}}{\sqrt{1-\sin\theta}}\cdot\frac{\sqrt{csc\theta-1}}{\sqrt{1+\sin\theta}}\right)$

81. Demostrar que:

a) $\frac{\sin^2\theta+2\cos\theta-1}{2+\cos\theta-\cos^{\theta}}\equiv\frac{1}{1+\sec\theta}$

b) $\frac{2\tan\theta\sec\theta+\sec\theta}{3+\tan\theta-2\sec^2\theta}\equiv\frac{1}{\cos\theta-\sin\theta}$

c) $\frac{cos\theta-\sin\theta}{\cos^3\theta-\sin^3\theta}\equiv\frac{1}{\tan\theta\cos^2\theta+1}$

82. Resolver para $x\in[0,2\pi]$

a) $2\cos^2x-5\cos x+2=0$

b) $2\sin x\cos x+\cos x=0$

c) $4\sin x=12\sin^2x-1$

d) $\sec^2x+\tan^2x=3\tan x$

Problemas de Trigonometría

83. Un árbol proyecta una sombra de 17.0m. de longitud. Desde el punto del terreno donde termina la sombra, el **ángulo de elevación** (formado por la horizontal y la visual dirigida a un objeto, cuando éste está sobre la horizontal) del extremo superior del árbol es de $52°0'$. ¿cuál es la altura del árbol ?

84. Desde la azotea de un edificio cuya altura es de 46.0m, el **ángulo de depresión** (formado por la horizontal y la visual dirigida a un objeto, cuando éste está bajo la horizontal) de un objeto situado en la calle es de $74°0'$. ¿Cuál es la distancia del observador al objeto ?

85. En la azotea de un edificio hay una antena de televisión. Desde un punto del suelo situado a 16.0m. del edificio se observa que los ángulos de elevación de las partes superior e inferior de la antena son de $51°0'$ y $42°0'$, respectivamente. ¿Cuál es la altura de la antena?

86. El hilo que sujeta a un volantín (suponiéndolo perfectamente extendido) tiene 170m. Si el ángulo de elevación del volantín es de $64{,}0°$, ¿a qué altura se encuentra ?

87. Un ferrocarril se eleva 40m por cada 730m de vía. Hallar el ángulo de inclinación de la vía.

88. Un avión a chorro, que viaja a 950 Km/h, asciende con un ángulo de $15°30'$. ¿Cuál es su incremento de altura en 2min ?

89. Un astronauta que gira en torno a la Luna a una altura de 161 km observa que el ángulo de depresión del horizonte es de $23{,}8°$. ¿Cuál es el radio de la Luna ?

90. Un topógrafo desea determinar la anchura de un río. Desde un punto C observa a un punto B situado en el lado opuesto del río. Luego mide 150m desde C hasta A, de modo que C sea un ángulo recto. Después de esto encuentra que $\angle A = 56°40'$. ¿Cuál es el ancho del río?

91. Un topógrafo observa dos puntos que tiene al frente. Ambos están en una elevación que es 18.5m más baja que la del punto desde el cual se los observa. ¿Cuál es la distancia entre estos puntos si los ángulos de depresión son $13{,}5°$ y $21{,}3°$, respectivamente?

92. Se tiene un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Desde el extremo superior del plano inclinado se ve un objeto situado en la horizontal según un ángulo de depresión α; desde la mitad del plano inclinado se observa el mismo objeto con un ángulo de depresión β. Verificar que

$$ctg\theta = 2ctg\alpha - ctg\beta$$

93. Resolver los siguientes triángulos:

    a) $\alpha = 65{,}3°$, $\beta = 40{,}5°$ y $a = 50{,}1cm$
    b) $\alpha = 30^\alpha$, $a = 3$ y $b = 4$
    c) $\alpha = 30^\alpha$, $a = 3$ y $b = 7$
    d) $a = 17{,}6cm$, $b = 13{,}6cm$ y $c = 15{,}8cm$
    e) $b = 0{,}804$, $\beta = 52{,}3°$ y $\gamma = 101{,}7$

94. Si la fachada de un edificio se ve bajo un ángulo de $70°$ cuando el ojo del observador está a $5m$ de uno de los extremos y a $8m$ del otro, ¿cuál es la longitud de la fachada del edificio?.

95. *a*) Comprobar que el área de un triángulo es igual al semiproducto de las longitudes de dos de sus lados por el *seno* del ángulo que ellos forman.
    b) Calcular el área del triángulo ABC si se sabe que:
        1) $b = 8{,}5cm$, $c = 5{,}7cm$ y $\alpha = 60°$
        2) $a = 40{,}57$, $b = 32{,}56$ y $\gamma = 63{,}25°$
        3) $\alpha = 50{,}57°$, $\beta = 75{,}87°$ y $c = 60{,}8$

96. Una carretera y un arroyo, ambos rectilíneos, se cortan formando un ángulo de $72°$. Desde un punto del arroyo, cien metros más abajo del cruce con la carretera, se tiende una cerca también rectilínea, que encuentra a la carretera a $150m$ del cruce de ésta con el arroyo.

    a) ¿Cuál será la extensión del terreno (área) que limita la cerca, el río y la carretera?
    b) ¿Cuál será la longitud de la cerca, si ésta es la más corta posible?

97. Desde dos puntos que están a $6km$ distantes uno de otro, en el plano de la base de una colina, los ángulos de elevación de la cima miden $19°10'$ y $20°30'$. Si los puntos están en lados opuestos de la colina, pero en mismo plano vertical que la cima, ¿cuál es la altura de la colina?

Polinomios

98. Se sabe que 1 y -2 son raíces de $p(x) = x^5 + ax^4 - 3x^3 + bx^2 + 2x$

    a) Determinar a y b. Calcular las raíces restantes.

    b) Factorizar completamente $p(x)$ sobre el conjunto de los números reales.

    c) Factorizar completamente $p(x)$ sobre el conjunto de los números racionales.

99. Considerar el polinomio $p(x) = x^6 - 8x^4 - 19x^2 - 10$

    a) Mostrar, sin calcular las raíces, que $p(x)$ tiene dos raíces reales y cuatro complejas.

    b) Mostrar, sin calcular las raíces, que $p(x)$ no tiene raíces racionales.

    c) Determinar, sin calcular las raíces, entre que enteros consecutivos se encuentran las raíces reales de $p(x)$

    d) Mostrar que $x^4 + 2x^2 + 1$ es un factor de $p(x)$

    e) Resolver $p(x) = 0$

100. Encontrar un polinomio en x de tercer grado que se anule para $x = 1$ y para $x = -2$ y que tenga los valores 4 y 28 para $x = -1$ y $x = 2$ respectivamente.

101. Calcular todas las raíces del polinomio $x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 27x - 36$ sabiendo que una de sus raíces es de la forma bi, donde b es un número real no nulo e i satisface $i^2 = -1$

102. Si $x + a$ es un factor común de $x^2 + px + q$ y de $x^2 + rx + s$ probar que $a(p - r) = q - s$

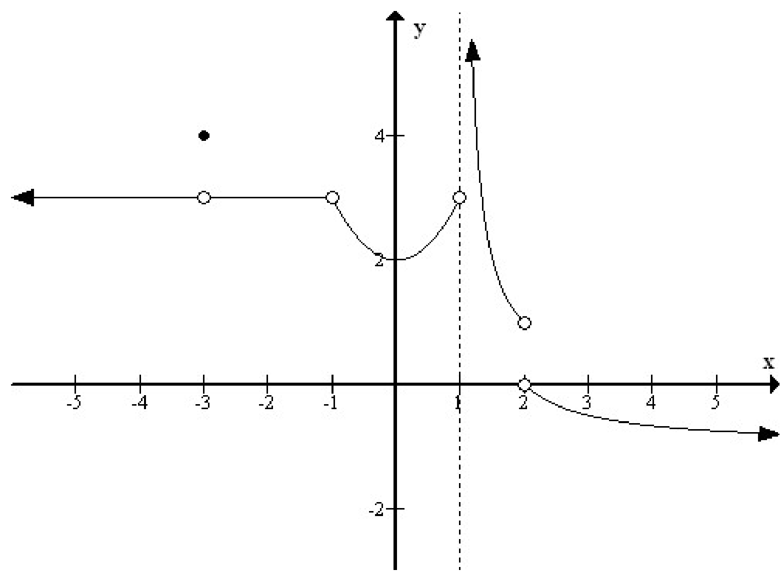
103. Determinar el(los) valor(es) de x de tal modo que el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden $(x - 1)$cm, $(x + 1)$cm sea igual a su perímetro.

Límite de funciones I

104. Haciendo una tabla de valores estimar los siguientes límites:

a)	$\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+4x-2}{3x^2+8x+4}$	b)	$\lim\limits_{x\to -\frac{2}{3}} \dfrac{2x^2+4x-2}{3x^2+8x+4}$	
c)	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$	d)	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$	si $f(x)=e^x$
e)	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$	f)	$\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{\dfrac{a+x}{a-x}}$	$a>0$

105. Considerar la función cuya gráfica es la siguiente:



Calcular:

$\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$
$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$
$\lim\limits_{x\to -3} f(x)$	$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$	$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

106. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 + 3 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{3}{x} + 1 & \text{si} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

Se pide

a) Calcular:

i)	$\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$	ii)	$\lim\limits_{x \to 0-} f(x)$	iii)	$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$
iv)	$\lim\limits_{x \to 1-} f(x)$	v)	$\lim\limits_{x \to 1+} f(x)$	vi)	$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$
vii)	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$	viii)	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	xi)	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$

b) Graficar f y confirmar *gráficamente* sus respuestas precedentes.

107. Trazar *una* gráfica de una función que tenga (**todas**) las siguientes características:

a) $Dom(f) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$

b) La gráfica no tiene *interrupciones* para $x \in [0, 1[$ y $x \in]1, +\infty[$

c) El punto más alto de la gráfica de f en $]-1, 1[$ es $(0, 0)$

d) El punto más bajo de la gráfica de f en $]1, +\infty[$ es $(5, 1)$

e) $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) = -\infty$

f) $\lim\limits_{x \to 1+} f(x) = 5 \neq f(1) = 3$

g) La curva es simétrica respecto al eje Y, excepto para $x = 1$

Determinar: $\lim\limits_{x \to -1+} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Límite de funciones II

108. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 7x}{5x^3 + 1} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ \\ \dfrac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 - 7x} & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$$

determinar si existe el límite cuando x tiende a 1 : $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

109. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Hallar los límites: $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

110. Usando teoremas y propiedades calcular:

(a) $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{x^4 + \sqrt{8x}}{\sqrt{x}}$

(b) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{x^2 + 2\sqrt{2}\,x - 6}{x^2 - 2}$

(c) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - \sqrt{3x}}{27 - x^3}$

(d) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 5x - 24}{x^3 + 6x^2 - 19x - 24}$

(e) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x + 1}{x - 1} \right)^x$

(f) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt[5x]{1 + 3x}$

(g) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n^3 - 5n}{4n^2 + 7} - \dfrac{n^2 - 2}{2n + 1} \right)$

(h) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3 - 4n}{2 - 4n} \right)^{n+2}$

(i) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{6n^4 + 5n^3 - 2}{6n^2 + 3n} - (n^2 + 3n) \right)$

(j) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4 - 16x + 16x^2}{\cos(2x - 1) - 1}$

(k) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$

(l) $\lim\limits_{x \to -8} \dfrac{\sqrt{1 - x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$

(m) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x - 3)^{20}(3x + 2)^{30}}{(2x + 1)^{50}}$

(n) $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$

(o) $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \dfrac{1}{x}$

(p) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$

111. La población de un cultivo de bacterias viene descrito por la función:

$$f(t) = \frac{850}{1 + e^{-0{,}2t}}$$

donde $f(t)$ es el número de bacterias, t es el tiempo.

a) Hallar $\lim_{t \to \infty} f(t)$

b) Graficar la función.

112. La producción para un bosque viene dada por:

$$V = V(t) = 6{,}7e^{-\frac{48}{t}}$$

a) Hallar V para $t = 20$, $t = 50$

b) Hallar $\lim_{t \to +\infty} V$

c) Graficar la función.

113. En una academia de mecanografía el número medio N de palabras escritas después de t semanas de lecciones viene dado por

$$N = N(t) = \frac{157}{1 + 5{,}4e^{-0{,}12t}}$$

a) Calcular N para $t = 10$, $t = 20$

b) Calcular N cuando t tiende a infinito.

c) Graficar esta función.

114. Dada la función:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}$$

determinar en que puntos $f(x)$ es discontinua, y que tipo de discontinuidad presenta.

Hacer el mismo análisis para $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2-1)(x+3)}$

Derivadas I

115. Use la definición de derivada para encontrar

a) $f'(5)$, si $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ Resp: $-1/49$

b) $f'(3)$, si $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ Resp: -3

c) $f'(4)$, si

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+2, & x < 4 \\ \dfrac{x+12}{4}, & x \geqslant 4 \end{cases}$$

Resp: $1/4$

d) $f'(x)$, si $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ Resp: $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

e) $f'(x)$, si $f(x) = \dfrac{x^2-3x}{x-1}$ Resp: $\dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$

f) $f'(x)$, si $f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$ Resp: $\dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$

116. Determinar donde NO es derivable la función dada:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 0 \\ x+1, & x \geqslant 0 \end{cases}$

Resp: $x = 0$

b) $f(x) = (x-3)^{2/3}$ Resp: $x = 3$

c) $f(x) = (x+1)^{4/3}$ Resp: Derivable en todos los puntos.

d) $f(x) = \begin{cases} x^3-3x^2+3x, & x \leqslant 1 \\ x^2-2x+2, & x > 1 \end{cases}$

Resp: Derivable en todos los puntos.

e) $f(x) = \begin{cases} x^2-4x+5, & x \leqslant 2 \\ 4x-2-x^2, & x > 2 \end{cases}$

Resp: $x = 2$

117. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado:

a) $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 1}$, $(-2, 2)$ Resp: $y - 2 = 11/9(x + 2)$

b) $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $(-2\sqrt{2}, 3)$ Resp: $y - 3 = -2\sqrt{2}/3(x + 2\sqrt{2})$

c) $y = \left|\dfrac{x^2 - 9}{x + 1}\right|$, $(4, 7/5)$ Resp: $y - 7/5 = 33/25(x - 4)$

118. La recta normal a una curva en un punto dado es la recta perpendicular a la tangente en ese punto. Para cada uno de los ejercicios anteriores, determine la recta normal en el punto dado.

119. Probar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Hallar los puntos de tangencia. ¿Vuelve a cortar la curva esta tangente? Resp: $x = 3$. Sí, en $x = 0$

120. Hallar los valores de las constantes a, b, c para los cuales los gráficos de los polinomios $p(x) = ax^2 + bx + c$ y $q(x) = x^3 - c$ se corten en $(1, 2)$ y tengan la misma tangente en dicho punto. Resp: $a = 0,\ b = 3,\ c = -1$

121. Hay dos rectas tangentes al gráfico de $y = 4x - x^2$ que pasan por el punto $(2, 5)$. Hallar sus ecuaciones. (Grafique la situación primero.) Resp: $y = 2x + 1$ e $y = -2x + 9$

122. Hallar la ecuación de una recta que sea tangente al gráfico de $y = 1/\sqrt{x}$ y sea paralela a la recta $x + 2y - 6 = 0$. Resp: $x + 2y = 3$

123. Determine todos los puntos de la curva $y = 1/3x^3 - x^2$ donde la recta tangente es horizontal. Resp: $0,\ 2$

Derivadas II

124. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$

   a) Calcular usando la definición de derivada, $f'(-2)$.

   b) Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva C, correspondiente al gráfico de esta función, en el punto de abscisa $x = -2$. Llamar T a esta recta.

   c) Determinar si esta recta tangente corta a la curva en otro(s) punto(s).

   d) Usando la definición de derivada encontrar $f'(x)$.

   e) ¿Existen puntos de de la curva C donde la recta tangente sea paralela al eje X?. ¿y paralela al eje Y?, ¿y perpendicular a la recta $2x - y = 1{,}342$.

   f) Determinar si existen otros puntos de la gráfica de f donde su tangente sea paralela a T.

   Resp. a) $-\dfrac{8}{9}$ **b)** $8x + 9y + 4 = 0$ **c)** No **d)** $f'(x) = \dfrac{x(2-x)}{(x-1)^2}$ **e)** Paralela al eje X: $(0,0)$ y $(2,-4)$, Paralela al eje Y: No hay, Perpendicular a la recta dada: en sus puntos de abscisa $x = 1 \pm \sqrt{2}$ **f)** Si, en el punto $(4, -\frac{16}{3})$

125. Considerar la función $y = g(x) = sin(x)$

   a) Usando la definición de derivada, calcular $g'(0)$.

   b) Usando la identidad trigonométrica $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$ y la definición de derivada determinar $g'(x)$.

   c) Calcular la ecuación de la recta tangente T a la curva correspondiente al gráfico de la función $y = \sin(x)$ en su punto de abscisa $x = \frac{\pi}{3}$.

   d) ¿Qué ángulo forma T con el eje X?, ¿y con el eje Y?

   e) Determinar el área que forma la recta T con los ejes coordenados.

126. Considerar la función $y = h(x) = e^x \sin(x)$

   a) Calcular usando definición de derivada $h'(2)$. En caso que el límite a trabajar se complique mucho, usar tablas de valores para encontrarlo, al menos, aproximadamente.

   b) En base a este cálculo, encontrar la ecuación de la recta tangente al gráfico de h en su punto de abscisa $x = 2$.

127. En este ejercicio se insiste en los posibles *aspectos* que puede tener el gráfico de una función en los puntos donde ella no es derivable.

   a) Usando definición de derivada, encontrar la derivada de la función indicada en $x = 3$

      1) Caso 1: $y = f_1(x) = |x-3| + 2$
      2) Caso 2: $y = f_2(x) = (x-3)^{\frac{1}{3}} + 2$
      3) Caso 3: $y = f_3(x) = (x-3)^{\frac{2}{3}} + 2$
      4) Caso 4: $y = f_4(x) = (x-3)\sin\left(\frac{1}{x-3}\right) + 2$

   b) Graficar cada una de las funciones precedentes y discutir su comportamiento en su punto de abscisa $x = 1$. ¿En cada uno de los casos precedentes, qué puede decir con respecto a las tangentes en este punto?:

128. Las parábolas $y = x^2 + 2$ e $y = 4x - x^2$ son tangentes entre sí. Hallar la ecuación de la tangente a dichas curvas en el punto de tangencia. R. $2x - y + 1 = 0$

129. Hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = x^4 - 8x$, sabiendo que es paralela a la recta $2y + 8x + 11 = 0$. R. $4x + y + 3 = 0$.

130. Calcular (si es que existen) $f'(0),\ f'(1),\ f'(2),\ \text{y}\ \ f'(-1)$. con:

$$f(x) = \begin{cases} 12 & \text{si } x < 0. \\ 2 - x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2. \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

131. Comprobar cada una de las siguientes derivadas.

   (a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}$
   (b) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}} - a^3\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$
   (c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$.
   (d) $\frac{d}{dt}\left(2 - 3t^2\right)^3 = -18t\left(2 - 3t^2\right)^2$.
   (e) $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{4 - 9x} = -\frac{3}{(4-9x)^{\frac{2}{3}}}$.
   (f) $\frac{d}{dt}\left(t\sqrt{a^2 + t^2}\right) = \frac{a^2+2t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}$.
   (g) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right) = \frac{4a^2x}{(a^2-x^2)^2}$.
   (h) $\frac{d}{d\theta}\left(\theta^2\sqrt{3 - 4\theta}\right) = \frac{6\theta-10\theta^2}{\sqrt{3-4\theta}}$.
   (i) $\frac{d}{dx}\left(\ln(ax^2 + b)\right) = \frac{2ax}{ax^2+b}$.
   (j) $\frac{d}{dx}\left(\ln(ax + b)^2\right) = \frac{2a}{ax+b}$.
   (k) $\frac{d}{dx}\left(\ln x^3\right) = \frac{3}{x}$.
   (l) $\frac{d}{dx}\left(\ln^3 x\right) = \frac{3\ln^2 x}{x}$.
   (m) $\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \frac{2}{x(1+x^2)}$.
   (n) $\frac{d}{dx}\left(x^2\ln x^2\right) = 2x(1 + 2\ln x)$.
   (o) $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right) = 2xe^{x^2}$.
   (p) $\frac{d}{dy}\left(b^{2y}\right) = 2b^{2y}\ln b$.
   (q) $\frac{d}{dx}\ln\left(x^2e^x\right) = \frac{2}{x} + 1$.
   (r) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.
   (s) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\ln t^2}{t^2}\right) = \frac{2-4\ln t}{t^3}$.
   (t) $\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{x^{\sqrt{x}}(2+lnx)}{2\sqrt{x}}$.

Derivadas III

132. Derivando en forma implícita, hallar $\dfrac{dy}{dx}$ en cada una de las siguientes funciones definidas implícitamente.

(a) $e^{y/x} = 3xy^2$ (b) $\ln(\dfrac{x}{y}) = x^2y^3$ (c) $x^y = y^x$

133. Usando el método de *derivación logarítmica*, hallar $f'(x)$ para

a) $f(x) = \sqrt{(x^2+1)(x^2+x+2)}$

b) $f(x) = \dfrac{e^{-3x}\sqrt{1-2x}}{(x^2+2x-3)^3}$

c) $f(x) = (\ln\sqrt{x})^x$, para $x > 0$

134. Calcular $f''(x)$ para

a) $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$

b) $f(x) = \cos^3 2x \sin 3x \sin x$

135. Calcular y'' si

a) $x^3 + y^3 = 1$

b) $y = x + \ln y$

136. Determinar los valores de a, b y c de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, si se debe cumplir que $f'(x) = 2$ y $f''(x) = 0$ en el punto $(-1, 1)$.

137. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de las siguientes funciones.

a) $f(x) = xe^{-2x}$

b) $g(x) = e^x - e^{-x}$

c) $h(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

d) $k(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

Derivadas IV
Máximos y mínimos

138. Establecer si las siguientes aseveraciones son verdaderas o falsas. Justificar su respuesta.

a) Si $f'(a) = 0$, entonces f tiene un extremo (máximo o mínimo) en $x = a$.

b) Si la derivada de una función en un punto no existe, entonces ella no puede tener un extremo en ese punto.

c) Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, entonces en dicho intervalo la función es creciente.

d) Si una función es creciente en un intervalo, entonces ella tiene derivada positiva en todo ese intervalo.

e) Si una función tiene un extremo en $x = a$, entonces $f'(a) = 0$.

f) Si una función derivable tiene derivada no nula en $x = a$, entonces ella no puede tener un extremo en dicho punto.

g) Si $f''(a) = 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en $x = a$.

139. Usando el *criterio de la primera derivada* estudiar los extremos de las siguientes funciones.

(a) $a(x) = (x-2)^2(x+1)^4$ (b) $b(x) = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$ (c) $c(x) = x^2e^{-x}$

(d) $d(x) = x + sin(x)$ (e) $e(x) = xln^2x$ (f) $f(x) = (x^2)^x$

Respuesta: (b) máximo $-\sqrt{3}$ en $x = -2\sqrt{3}$, mínimo $\sqrt{3}$ en $x = 2\sqrt{3}$. (c) mínimo 0 en $x = 0$, máximo $4e^{-2}$ en $x = 2$. (e) máximo $4e^{-2}$ en $x = e^{-2}$, mínimo 0 en $x = 1$

140. Usando el *método de la segunda derivada* para analizar extremos de una función, determinar máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones en los conjuntos indicados.

(a) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ en $\mathbf{R}$ (b) $y = \sqrt{10x - x^2}$ en $\mathbf{R}$

(c) $y = x^3$ en $[-1, 3]$ (d) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ en (i) $[-1, 5]$ y (ii) $[-10, 12]$

Respuesta: (a) Mínimo absoluto = m = $-0{,}5$ en $x = -1$, Máximo absoluto = M = 0,5 en $x = 1$. (b) m = 0 en $x = 0$ y $x = 10$, M = 5 en $x = 5$. (c) m = -1 en $x = -1$, M = 27 en $x = 3$. (d) (i) m = -6 en $x = 1$, M = 226 en $x = 5$; (ii) m = -1579 en $x = -10$, M = 3745 en $x = 12$.

Derivadas V

Problemas de máximos y mínimos

141. Hallar dos números positivos cuya suma sea 110 y cuyo producto sea máximo. *Resp:* 55 y 55

142. Hallar dos números positivos cuyo producto sea 192 y cuya suma sea mínima. *Resp:* $8\sqrt{3}$ y $8\sqrt{3}$

143. Encontrar el punto de la recta $y = -2x + 2$ que está más cerca del punto $(0, 1)$. *Resp:* $(2/5, 6/5)$

144. Hallar los puntos en el gráfico de $y = 4 - x^2$ que están más cerca del punto $(0, 2)$. *Resp:* $(\sqrt{3/2}, 5/2)$ y $(-\sqrt{3/2}, 5/2)$

145. Se va a fabricar una caja abierta recortando cuatro cuadrados iguales en cada una de las esquinas de una hoja cuadrada de cartón de 12 pulgadas de lado y luego doblando los lados para formar la caja. Hallar el volumen máximo que puede lograrse con una caja así. ¿Cuál es la respuesta si la caja tiene s pulgadas de lado? *Resp:* 128 y $2s^3/27$

146. Una empresa preocupada del medio ambiente y de sus finanzas va a diseñar un envase de aluminio para bebidas gaseosas que tenga superficie total mínima (con lo que logrará minimizar la cantidad de aluminio que debe utilizar). La lata debe tener un volumen de 355cm^3. Encontrar las dimensiones de la lata (radio y altura) con superficie mínima. ¿Cuál es aproximadamente la forma del *perfil* de la lata? *Resp:* $h = 7{,}67$ y $r = 3{,}83$; cuadrado

147. Un agricultor necesita cercar un terreno, al mínimo costo, con reja que cuesta \$500 el metro lineal.

    a) Suponga que se dispone de \$20.000 para el proyecto. ¿Cuánta área se puede cercar? *Resp:* $100m^2$

    b) Suponga ahora que se deben cercar $100m^2$. ¿Cuál es el costo mínimo? *Resp:* \$20.000

148. Se dispone de cuatro metros de alambre que se debe cortar para formar, con uno de los trozos un círculo, y con el otro un cuadrado. ¿Cómo debe cortarse este alambre (*i.e.*, cuál debe ser la longitud de cada trozo)? *Resp:* 4 y 0

149. Un agricultor dispone de 200 metros de cerca para delimitar dos corrales adyacentes rectangulares. ¿Qué dimensiones debe elegir para que el área cercada sea máxima? *Resp:* 100/3 e 50

150. Un fabricante de interruptores de calidad tiene costos fijos de \$600.000. El material cuesta \$100 por unidad. Si se fabrican menos de 4500 interruptores al mes, el costo por trabajo es de \$40 por unidad; por cada unidad sobre las 4500, el fabricante debe pagar \$60 por unidad por concepto de trabajo. A \$700 pesos por unidad, el fabricante puede vender 4000 unidades al mes. Se espera que las ventas mensuales suban en 100 unidades por cada \$10 que se reduzca el precio. ¿Cuántos interruptores se deben fabricar cada mes para maximizar las ganancias? *Resp:* 4500

151. Los economistas suelen describir el comportamiento de una función de demanda por un término llamado **elasticidad de precio de la demanda.** Este término describe la sensibilidad relativa de los consumidores ante un cambio en el precio de un artículo. Si $p = f(x)$ es una función de demanda derivable, la elasticidad de precio de la demanda viene dada por
$$\eta = \frac{p/x}{dp/dx}$$
Para un precio dado, si $|\eta| < 1$, la demanda es **inelástica.** Si $|\eta| > 1$, la demanda es **elástica.**

    a) Probar que la función de demanda dada por $p = 50x^{-1/2}$ es elástica.

    b) Probar que para una función de demanda derivable, el ingreso marginal es positivo cuando la demanda es elástica y negativo cuando la demanda es inelástica. (Supóngase que la cantidad demandada crece al descender el precio, de modo que $\frac{dp}{dx}$ es negativa.)

152. Una central productora de energía está al lado de un río de medio kilómetro de ancho y una fábrica está a 6 kilómetros río abajo al otro lado del río. El tendido de línea energética cuesta \$6 dólares el metro en tierra y \$8 dólares en el agua. Hallar el trazado del tendido más económico desde la central hasta la fábrica. ¿Qué pasa si el río tiene ancho a? ¿Qué pasa si el costo en la tierra es de \$7 dólares? *Resp. (sólo a la primera parte):* En línea recta desde la central a la fábrica.

Derivadas VI

Otras aplicaciones de la derivada

153. Se ha de construir un tanque de acero para almacenar gas propano. Su forma debe ser la de un cilindro circular recto de 10 pie de altura con una semiesfera unida en cada extremo.

    a) Determinar la razón de cambio del volumen del tanque si el radio aumenta de 5 a 10 pie.

    b) Determinar la tasa de cambio del volumen del tanque si el radio es de 10 pie.

154. Dos barcos parten de un puerto a la misma hora, uno viaja hacia el oeste con una velocidad de 17 millas/hora y el otro hacia el sur a 12 millas/hora.

    a) Determinar la tasa de cambio de la distancia D entre los barcos entre los 45 y 60 minutos de la partida.

    b) ¿Cuál es la tasa instantánea de cambio de la distancia D entre los barcos, a la hora y media de la partida? ¿y a las t horas?

155. En un sencillo juego de video, unos aviones vuelan de izquierda a derecha siguiendo la curva $y = 1 + \dfrac{1}{x}$, y pueden disparar balas en la dirección de las tangentes a la curva contra objetivos colocados sobre el eje X en $x = 1 , 2 , 3 , 4 , 5$

    a) Calcular la tasa de cambio promedio de la trayectoria del avión cuando este pasa de la posición $\mathbf{P}(1{,}2)$ a la $\mathbf{Q}(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$.

    b) Calcular la tasa de cambio instantánea de la trayectoria del avión cuando éste está en la posición $\mathbf{P}(1{,}2)$.

    c) Si un jugador dispara cuando el avión está en $\mathbf{P}$ ¿le pegará a algún blanco? ¿cuál? ¿y si está en $\mathbf{Q}$?

    d) En que punto de la gráfica de la trayectoria debe estár el avión para dar en el blanco.

156. Usando Regla de L'Hopital-Bernoulli, calcular los siguientes límites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cot x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^5}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^x$ h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{5x^2 - 4x - 1}{3x^2 + 4x - 7}$

Integrales I

157. Hallar la antiderivada más general de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2$

b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{3}{x^2}$

158. Resuelva las ecuaciones diferenciales sujetas a las restricciones dadas:

a) $f'(x) = 12x^2 - 6x + 1\,, \qquad f(1) = 5$

b) $f''(x) = 4x - 1\,, \qquad f'(2) = -2\,,\ f(1) = 3$

c) $f'''(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}}\ ,\ f(1) = 4\,,\ f'(1) = 2\,,\ f''(1) = 8$

159. *a*) Un fabricante de ropa deportiva sabe que el costo marginal de producir x prendas es de $20 - 0{,}015x$ y el costo de producir una prenda es de 25 dólares. Encuentre la función de costo y el costo de producir 50 unidades.

b) El volumen V de un globo cambia con respecto al tiempo con una rapidez dada $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 3\sqrt{t} + \dfrac{1}{4}t$ (pie^3/seg) . Al tiempo t =4 el volumen es de 20 pie^3. Exprese V como función de t.

c) Si C y F denotan las temperaturas en grados celcius y fahrenheit, respectivamente, entonces la tasa de variación de F con respecto a C está dada por $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}C} = \dfrac{9}{5}$. Si $F^\circ = 32$ cuando $\mathrm{C}^\circ = 0$, use antiderivadas para obtener una fórmula general para F en términos de C.

160. Evalué las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int (4x^3 - \sin x + \sqrt{x})\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{2x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^3 - x^2 + 3x - 5}{x}\, dx$

d) $\displaystyle\int (e^x + 5)^5 e^x\, dx$

e) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{7 - 6x^2}\, dx$

f) $\displaystyle\int \sqrt[3]{t^4 - t^2}(10t^3 - 5t)\, dt$

g) $\displaystyle\int \frac{6\, dx}{\sqrt{4 - 5x}}$

Integrales II

Integración por partes y fracciones parciales

161. Usando integración por partes calcular:

   a) $\int e^{2x} \sin x \, dx$ (dos veces)

   b) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \, dx$

   c) $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 \, dx$

   d) $\int x 3^x \, dx$

   e) $\int \ln(x + \sqrt{1 + x * 2} \, dx$

162. Usando integración por fracciones parciales, evaluar:

   a) $\int \frac{dx}{(x-3)(x+4)}$

   b) $\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$

   c) $\int \frac{2x^2 - 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} \, dx$

   d) $\int \frac{dx}{x^4 - 1}$

   e) $\int \frac{5x - 13}{(x^2 - 5x + 6)^2} \, dx$

163. Usando los métodos conocidos (cambio de variable, integración por partes o fracciones parciales), encontrar:

   a) $\int \sin \sqrt{x} \, dx$

   b) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} \, dx$

c) $\int \frac{e^{1/t}}{t^2}\,dx$

d) $\int \ln(1+x^2)\,dx$

164. Integrar usando el método indicado.

a) $\int 2x\sqrt{2x-3}\,dx$

1) Por partes, haciendo $dv = \sqrt{2x-3}\,dx$
2) Por sustitución, haciendo $u = \sqrt{2x-3}$

b) $\int x\sqrt{4+x}\,dx$

1) Por partes, haciendo $dv = \sqrt{4+x}\,dx$
2) Por sustitución, haciendo $u = \sqrt{4+x}$

c) $\int \frac{x^3}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$

1) Por partes, haciendo $dv = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$
2) Por sustitución, haciendo $u = \sqrt{4+x^2}$