Escuela Superior de Ingenieros

Ingeniero de Telecomunicación

CÁLCULO

Relación complementaria de problemas

Curso 2008-09

Matemática Aplicada II

Universidad de Sevilla

Índice general

Capítulo 1

Aplicaciones de la derivada

1.1. Problemas de optimización

P 1.1 *(Primer parcial 2000)* Se considera la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Determinar, de entre los triángulos isósceles inscritos en dicha elipse, con un vértice en el punto $(0, b)$ y base paralela al eje OX, el que tenga área máxima.

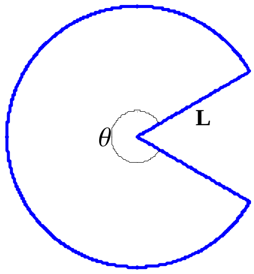
P 1.2 *(Julio 2000)* Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right), & si \;\; x \neq 0, \\ 0, & si \;\; x = 0. \end{cases}$$

(a) Obtener las funciones derivadas f' y f'', junto con sus respectivos dominios. (b) Encontrar las rectas tangentes a la gráfica de f, en $x = 0$ y $x = 1/2$. (c) Calcular los polinomios de Taylor de orden 2 de f, centrados en $x = 0$ y $x = 1/2$, cuando existan. Estudiar si f alcanza un extremo en $x = 1/2$ y, en ese caso, clasificarlo.

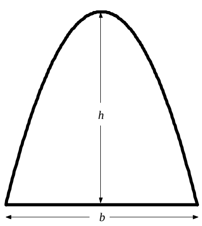
P 1.3 *(Septiembre 2000)* Se dispone de 20 metros de alambre para delimitar un triángulo equilátero, un cuadrado, o bien ambas figuras. Cuanta cantidad de alambre debe dedicarse a construir el triángulo y cuanta a construir el cuadrado si se pretende que la figura o figuras construidas encierren el área máxima posible.

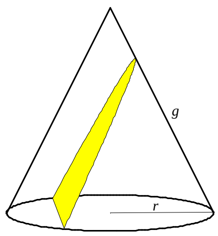
P 1.4 *(Primer parcial 01)* Al pegar los bordes rectos de un sector circular de radio L y ángulo central θ (veáse figura) se forma la superficie lateral de un cono. Encontrar el valor de θ para el cual el volumen de dicho cono resulta máximo.



P 1.5 *(Septiembre 02)* Un canal abierto cuya sección es un trapecio isósceles de bases horizontales, tiene sus paredes laterales formando un angulo agudo dado a con la base menor del fondo. Conociendo el área A de dicha sección, hallar la profundidad h del canal para la cual la suma de longitudes de la base y paredes laterales es mínima.

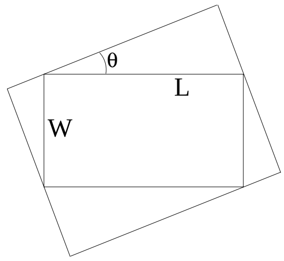
P 1.6 *(Primer parcial 03)* Deducir la fórmula del área de un segmento parabólico en función de su base y su altura. Se considera un cono circular recto con radio de la base r y generatrices de longitud g. Al cortarlo por un plano paralelo a una de dichas generatrices se obtiene como intersección un segmento parabólico. Calcular el área máxima de los segmentos parabólicos obtenidos por este procedimiento.



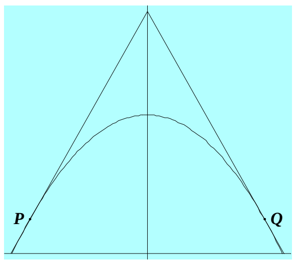


P 1.7 *(Julio 03)* Analizar la concavidad y convexidad, obtener los puntos de inflexión y esbozar la gráfica de $y = e^{-x^2}$. Encontrar las dimensiones del rectángulo de área máxima que tiene su base en el eje OX y dos vértices en la gráfica de $y = e^{-x^2}$.

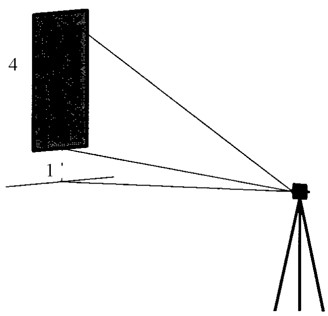
P 1.8 *(Primer parcial 04)* Calcular el área máxima del rectángulo que se puede circunscribir alrededor de un rectángulo dado de longitud L y anchura W.



P 1.9 *(Septiembre 04)* Calcular las coordenadas de los puntos P y Q de la parábola $y = 1 - x^2$, tales que el triángulo determinado por el eje x y las rectas tangentes a la parábola en P y Q sea equilátero.



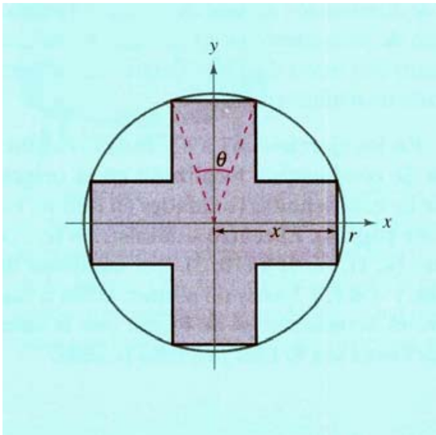
P 1.10 *(Primer parcial 05)* Se desea fotografiar un cuadro de 4 m. de altura colgado en una pared de una galería de arte. La lente de la cámara está situada 1 m. por debajo del extremo inferior del cuadro. ¿A qué distancia de la pared ha de colocarse la cámara para que el ángulo que subtiende (o abarca) el cuadro sea máximo?



P 1.11 *(Julio 05)* Encontrar el área mínima de la región del primer cuadrante del plano cuyas fronteras están contenidas en la recta que pasa por el punto $(3, 5)$ y las rectas $x = 0$, $y = 0$.

P 1.12 *(Septiembre 05)* Un espejo plano de dimensiones 80 cm y 90 cm, se rompe por una esquina según una recta. De los dos trozos que quedan, el menor es un triángulo de catetos 10 cm y 12 cm, correspondientes a las dimensiones menor y mayor del espejo respectivamente. Hallar el área máxima del espejo rectangular que se puede obtener con el trozo mayor.

P 1.13 *(Primer parcial 06)* Determinar el área máxima de una cruz simétrica inscrita en un círculo de radio r (ver la figura).



P 1.14 *(Julio 06)* Determinar el máximo absoluto de la función

$$f(x) = \frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|x-2|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

P 1.15 *(Septiembre 06)* A medianoche, el barco *Arrow* se encuentra situado a 100 kilómetros en dirección este del barco *Blue*. El barco *Arrow* navega hacia el oeste a 12 km/h, y el barco *Blue* lo hace hacia el sur a 10 km/h. ¿A qué hora se encontrarán a distancia mínima uno del otro? ¿Cúal es la distancia mínima?

P 1.16 *(Primer parcial 07)* Se consideran las rectas que pasan por el punto $(1, 8)$ y cortan a los semiejes positivos. Determinar la distancia mínima entre los puntos de corte y obtener la recta que verifica dicha propiedad.

P 1.17 *(Junio 07)* Determinar los puntos de máxima y mínima pendiente de la gráfica de la función

$$y = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.2. El método de Newton

P 1.18 *(Primer parcial 97)* Resolver la ecuación $x^3 - 2 = 0$. Es decir, hallar una aproximación de $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Para ello, comprobar que aplicando el método de Newton a la ecuación $x^3 - 2 = 0$ se obtiene la función de iteración

$$g(x) = \frac{2}{3}\left(x + \frac{1}{x^2}\right).$$

Representar esquemáticamente la función $g(x)$ en el intervalo $[1, +\infty)$.

P 1.19 *(Diciembre 98)* Consideremos la circunferencia C, intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $x = h$, con $0 < h < 1$. Construimos el cono circular recto cuyo eje es OX, se apoya en la circunferencia C y es tangente en ella a la esfera. Comprobar que el volumen $V(h)$ del trozo del cono entre su vértice y el plano $x = h$ es

$$V(h) = \frac{\pi(1 - h^2)^2}{3h}.$$

Probar que existe un único valor $h \in (0, 1)$ tal que $V(h)$ coincide con el volumen de la esfera. Calcular dicho valor con tres cifras decimales de precisión usando el método de Newton. Justificar la elección del punto inicial.

P 1.20 *(Primer parcial 99)* Se considera la función $f(x) = e^{-x} - x$. Demostrar que la función se anula en un único punto de la recta real y que éste pertenece al intervalo $[0, 1]$. Calcular para $f(x)$ el polinomio de Taylor en 0 de orden 2, $T_2(x)$, y resolver la ecuación $T_2(x) = 0$. Obtener el cero de $f(x)$ mediante el método de Newton, utilizando como valores iniciales las raíces de la ecuación del apartado anterior. Comparar las iteraciones y justificar los resultados obtenidos.

P 1.21 *(Julio 99)* Se desea resolver la ecuación $f(x) = e^x + x - 2 = 0$. Demostrar que la función $f(x)$ se anula en un único punto de la recta real y que éste pertenece al intervalo $[0, 1]$. Calcular para $f(x)$ el polinomio de Taylor en 0 de orden 2, $M_2(x)$ y resolver la ecuación $M_2(x) = 0$. Obtener el cero de $f(x)$ mediante el método de Newton, utilizando como valor inicial una de las raíces de la ecuación del apartado anterior.

P 1.22 *(Septiembre 99)* Se considera la función $f(x) = \operatorname{sh} x + x - 1$. Demostrar que la función $f(x)$ se anula en un solo punto de la recta real y que éste pertenece al intervalo $[0, 1]$. Calcular para $f(x)$ el polinomio de Taylor en 0 de orden 2, $M_2(x)$ y resolver la ecuación $M_2(x) = 0$. Aproximar el cero de $f(x)$ mediante tres iteraciones del método de Newton, utilizando los resultados del apartado anterior como valor inicial.

P 1.23 *(Primer parcial 2000)* Se desea calcular un punto crítico de la función $x \cos x$. Aplicar el método de Newton a la función adecuada para obtener, partiendo de $x_0 = 1$, dos cifras decimales del punto crítico buscado. Explicar todos los pasos realizados.

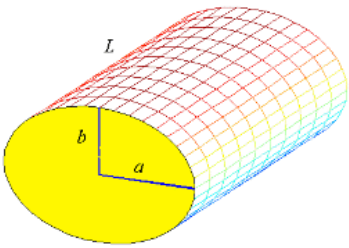
Capítulo 2

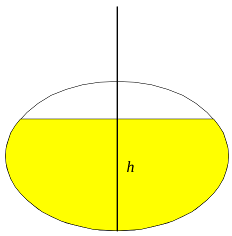
Aplicaciones de la integral

2.1. Integración

P 2.1 *(Septiembre 01)* Dadas las rectas $y = x$, $y = ax$, $y = 1 - ax$, con $a \geq 1$, se pide: Determinar, en función de a, el área de la región limitada por las tres rectas. Calcular los valores de $a \in [1, \infty)$ que hacen el área máxima o mínima. Sea $F : \left[0, \dfrac{1}{a+1}\right] \to \mathbb{R}$ la función que asigna a cada número $z \in \left[0, \dfrac{1}{a+1}\right]$ el área $F(z)$ del trozo de la región del apartado anterior comprendido entre las rectas $x = 0$ y $x = z$. Justificar la existencia de $F'(z)$ en el intervalo $\left[0, \dfrac{1}{a+1}\right]$. Calcular $F'(z)$. ¿Es derivable la función $F'(z)$ en todos los puntos de su dominio?

P 2.2 *(Junio 04)* Un depósito subterráneo de gasolina tiene forma de cilindro elíptico, con semieje horizontal a, semieje vertical b y anchura L. Para medir su contenido se sumerge una vara hasta la parte inferior del depósito y se mide la altura h del nivel de gasolina. Calcular el volumen de la gasolina que contiene el depósito en función de h.





2.2. Integración numérica

P 2.3 *(Septiembre 93)* Determinando previamente el número de subintervalos para que el error sea menor que 10^{-3}, calcular aproximadamente la integral

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen} x)\, dx,$$

con la regla compuesta del trapecio.

P 2.4 *(Primer parcial 94)* Aplicar la regla compuesta del trapecio, dividiendo el intervalo de integración en 4 y 8 partes iguales, para calcular valores aproximados de la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}}\right) dx.$$

En cada caso, dar una cota del error cometido.

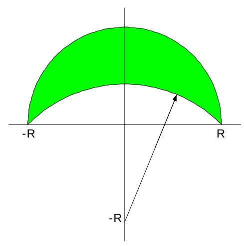
P 2.5 *(Julio 2000)* Calcular, con un error menor que 0,01, un valor aproximado de la integral

$$I = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \operatorname{sen} x^2\, dx,$$

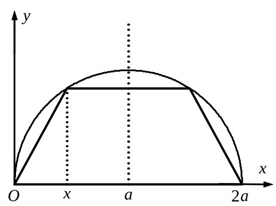
utilizando la regla de Simpson.

2.3. Volúmenes de revolución

P 2.6 *(Julio 99)* Hallar el área de la luna dada en la figura. Calcular el volumen del sólido resultante al girar la luna alrededor del eje OX.



P 2.7 *(Primer parcial 99)* Calcular las dimensiones del trapecio isósceles de área máxima inscrito en la semicircunferencia de la figura. Para dicho trapecio de área máxima, calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar el trapecio alrededor del eje vertical que pasa por O.



P 2.8 *(Primer parcial 01)* Sea un sólido generado haciendo girar la región acotada por la curva $y = x^2/2$, y la recta $y = 2$, alrededor del eje OY. Se desea perforar un orificio circular, centrado en el eje de revolución, de manera tal que dicho sólido pierda un cuarto de su volumen. Calcular el diámetro que debe tener dicho orificio.

P 2.9 *(Julio 02)* Se considera el recinto plano

$$R := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3,\;\; 0 \leq y \leq \frac{x^3}{3}\right\}.$$

Obtener los volúmenes de los sólidos de revolución V_1, obtenido al girar dicho recinto R alrededor del eje OX, y V_2, obtenido al girar R alrededor de la recta $x = a$, con $a > 3$.

P 2.10 *(Primer parcial 04)* Sea R la región del primer cuadrante limitada por las curvas $y = 2x - x^2$ y $y = x^3$. Calcular

1. el área de R,

2. el volumen que se obtiene al hacer girar R en torno al eje x,

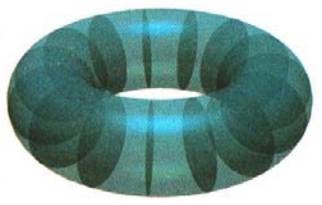
3. el volumen que se obtiene al hacer girar R en torno al eje y.

P 2.11 *(Primer parcial 05)* Calcular los volúmenes de los sólidos que se obtienen al hacer girar la región limitada por las curvas $y = x$ y $y = x^2$, en torno al eje x, al eje y, y a la recta $y = 2$.

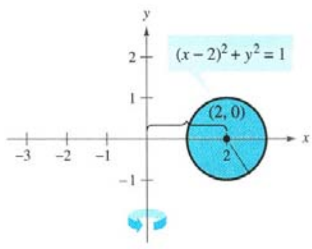
P 2.12 *(Primer parcial 07)* Un toro se forma al girar la región contenida en la circunferencia

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1,$$

alrededor del eje y. Calcular el volumen de este sólido de revolución, usando el método de las arandelas y el método de las capas.



Toro



P 2.13 *(Junio 07)* Sea R la región plana limitada por la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}, \quad x \geq 0,$$

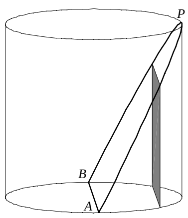
el eje OX y el eje OY. Consideramos los sólidos que se obtienen cuando la región R gira en torno al eje OX y al eje OY. Calcular el volumen de dichos sólidos.

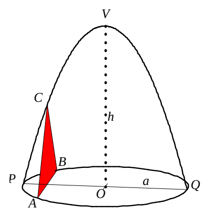
P 2.14 *(Septiembre 07)* La gráfica de la función $y = 4 - \dfrac{x^2}{4}$ en el intervalo $[0, 4]$ gira alrededor de la recta $y = b$, donde $b \in [0, 4]$. Calcular el volumen del sólido resultante en función de b. Hallar el valor de b que hace mínimo el volumen de dicho sólido.

2.4. Volúmenes por secciones

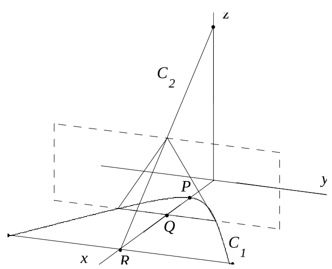
P 2.15 *(Julio 95)* En un círculo de radio a se toma un diámetro POQ; sobre la perpendicular al círculo en el punto O y a una altura h se encuentra el punto V. Consideremos la parábola con vértice en el punto V y que pasa por P y Q. Sea el triángulo de vértices A, B, C, donde A y B están sobre el círculo y C sobre la parábola, todos ellos en un plano perpendicular al diámetro POQ; el sólido se genera al mover el triángulo ABC desde P hasta Q. Calcular el volumen de dicho sólido.

P 2.16 *(Primer parcial 96)* Se considera un cilindro recto de base circular de radio R y altura h. Se corta dicho cilindro por un plano que pasa por un diámetro AB de la base y es tangente a la tapa superior en un punto P. Consideramos la porción de cilindro por debajo de dicho plano. Si cortamos por planos perpendiculares a la base y paralelos al diámetro AB se obtienen secciones rectangulares. Calcular el área máxima de dichas secciones. Calcular el volumen de dicho sólido.





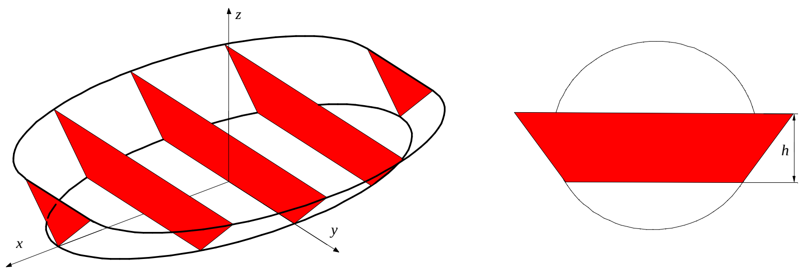
P 2.17 *(Primer parcial 97)* Consideremos, para $b > a > 0$, la rama superior de la hipérbola $C_1 \equiv \{x^2 - y^2 = a^2,\ z = 0,\ x > 0\}$ y el segmento de recta $C_2 \equiv \{x + z = b,\ y = 0\}$ con $x \geq 0$ y $z \geq 0$. Sea P el corte de C_1 con $y = 0$, y sea R la intersección de C_2 con $z = 0$. Para cada punto Q del segmento PR consideramos el plano paralelo a $x = 0$ que pasa por Q y construimos el triángulo cuyos vértices son las intersecciones de C_1 y C_2 con dicho plano (ver figura). Calcular los valores máximo y mínimo de las áreas de dichos triángulos. Hallar el volumen del cuerpo generado por los triángulos anteriores.



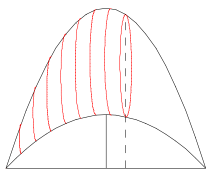
P 2.18 *(Julio 98)* Calcular el volumen total del sólido de la siguiente figura. La base está delimitada por una elipse, cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

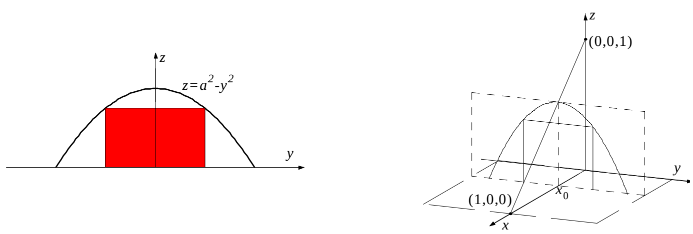
con $a>b>0$. Las secciones perpendiculares al eje OX consisten en trapecios invertidos de altura fija $h>0$, apoyados en la elipse y tal que los lados opuestos no paralelos forman un ángulo de 45° con cada uno de los otros dos.



P 2.19 *(Primer parcial 99)* Para cada punto de abscisa $x\in[-1,1]$ se toma el segmento vertical comprendido entre las parábolas de ecuaciones $y=1-x^2$, $y=3(1-x^2)$. Ahora usamos cada uno de esos segmentos como el diámetro de un círculo que es perpendicular al eje OX. Estos círculos engendran un cuerpo parecido a un boomerang o a un croissant (ver figura). Determinar su volumen.



P 2.20 *(Julio 2000)* Entre todos los rectángulos del plano YOZ, inscritos en la parábola $z=a^2-y^2$ (siendo $a>0$) y con base en el eje OY, calcular el que tiene área máxima. Justificar la respuesta. Para cada valor $x_0\in[0,1]$, consideremos la parábola del tipo anterior contenida en el plano $x=x_0$ y cuyo vértice está en el segmento que une los puntos $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$. Construimos el sólido cuya sección con cada plano $x=x_0$ es el rectángulo de área máxima inscrito en la parábola considerada en dicho plano. Calcular el volumen de dicho sólido.



2.5. Longitud de arco y área de una superficie de revolución

P 2.21 *(Septiembre 99)* Sea R la región plana acotada limitada por la curva C de ecuación $3y = x^3$ y las rectas $y = 0$, $x = 3$. Calcular el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor del eje OX y el volumen del sólido obtenido al girar R alrededor de $x = a$, donde $a \geq 3$. Calcular el área de la superficie de revolución S, obtenida al girar C alrededor del eje OX.

P 2.22 *(Primer parcial 2000)* Se perfora una esfera de radio r con un agujero cilíndrico de modo que el anillo esférico resultante tiene altura h. Probar que el volumen del anillo es $V = \pi h^3/6$. Calcular la superficie total del anillo.

P 2.23 *(Primer parcial 01)* Sean A y B los puntos donde se cortan las curvas $y^2 = 2x^3$, $x^2+y^2 = 20$. Calcular la longitud de la curva cerrada $OABO$ formada con los correspondientes trozos de las curvas anteriores, siendo O el origen de coordenadas.

P 2.24 *(Julio 01)* Un sólido se genera haciendo girar la región acotada por $y = 0$ e $y = \sqrt{9 - x^2}$ alrededor del eje y. Se perfora un orificio cilíndrico circular de radio r, centrado en el eje de revolución.

1. Obtener el volumen del sólido resultante.
2. Obtener el área lateral total A de dicho sólido (se consideran las superficies laterales interior y exterior, pero no la base). Determinar los valores de r en los que A alcanza sus valores extremos.

P 2.25 *(Primer parcial 03)* La curva $y = x^k$, $0 \leq x \leq 1$, donde $k > 0$, divide el cuadrado formado por los ejes coordenados y las rectas $x = 1$, $y = 1$, en dos regiones R_1 (la superior) y R_2 (la inferior). Obtener por el método de los discos, el volumen V_1 del sólido generado al girar la región R_1 en torno al eje y. Obtener por el método de las capas (o de los tubos), el volumen V_2 del sólido generado al girar la región R_2 en torno al eje y. En el caso $k = 2$, obtener el área de la superficie generada al girar la curva dada en torno al eje y y la longitud de dicha curva.

P 2.26 *(Septiembre 03)* Una vasija que tiene la forma de un paraboloide de revolución de eje vertical obtenido al girar la curva $y = px^2$ en torno al eje OY, se encuentra parcialmente llena de agua. Calcular el cociente entre el área de la superficie mojada de la vasija y el volumen de líquido cuando la superficie superior del agua es un círculo de radio R.

P 2.27 *(Primer parcial 06)* Una esfera de radio r se corta por un plano formando un casquete esférico de altura h. Calcular el volumen y la superficie (incluyendo la base) de este sólido de revolución.

2.6. Integrales impropias

P 2.28 *(Julio 96)* Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x \operatorname{sen} x}.$$

Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^1 \left(\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^{\alpha} \frac{1}{x^2}\,dx,$$

según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

P 2.29 *(Septiembre 96)* Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\operatorname{sen} x}{x^{\alpha}}\,dx,$$

para valores no negativos de α.

P 2.30 *(Primer parcial 97)* Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(x+1)}$$

es convergente y calcular la integral para $\alpha = 1/3$.

P 2.31 *(Febrero 98)* Enunciar el criterio de comparación por paso al límite para integrales impropias. Calcular

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\log\left(\frac{1}{x}-x\right)$$

y estudiar la convergencia de la integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{x}-x\right)\,dx.$$

P 2.32 *(Julio 99)* Para la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}+x+x^{1/2}+1}$$

demostrar, sin calcular la integral, que es convergente y, posteriormente, calcular su valor.

P 2.33 *(Primer parcial 99)* Sean m y $n-1$ enteros positivos. Definimos la integral impropia

$$I_{m,n} = \int_0^{\infty} \frac{x^m}{(1+x)^{m+n}}\,dx.$$

¿Es convergente $I_{m,n}$? Probar que, en ese caso, $(m+n-1)I_{m,n} = mI_{m-1,n}$. Deducir que

$$I_{m,n} = \frac{m!(n-2)!}{(m+n-1)!}.$$

P 2.34 *(Primer parcial 99)* Calcular la integral

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{1/2}+x^{3/2}}.$$

Determinar los valores del parámetro $p < 3/2$ para los que es convergente la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p + x^{3/2}}.$$

Determinar los valores de p y q, siendo $p < q$, para los que es convergente la integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^p + x^q}.$$

P 2.35 *(Primer parcial 2000)* Enunciar el criterio de comparación por paso al límite para integrales impropias. Estudiar la convergencia de la integral

$$I = \int_0^\infty x^k \frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}\, dx$$

según los valores de $k \in \mathbb{R}$.

P 2.36 *(Septiembre 2000)* Estudiar la convergencia de

$$I_n = \int_0^\infty \frac{x^{2n-1}}{(x^2+1)^{n+3}} dx, \quad n \geq 1.$$

Probar que $I_n = \left(\dfrac{n-1}{n+2}\right) I_{n-1}$, para $n \geq 2$. Calcular I_1, I_2 y I_3.

P 2.37 *(Primer parcial 02)* Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{|x|}{e^{|x-1|}}.$$

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de dicha función.

2. Determinar sus extremos absolutos.

3. Calcular la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$ si es convergente.

P 2.38 *(Julio 02)* Calcular la integral

$$\int_b^\infty \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x-b}}$$

para los valores de a y b con $a + b > 0$, que la hagan convergente.

P 2.39 *(Septiembre 02)* Estudiar la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \frac{7x+3}{x^a(1+x^3)}\, dx,$$

según los valores de $a \in \mathbb{R}$.

P 2.40 *(Septiembre 04)* Calcular el valor de la integral impropia

$$I_n = \int_0^1 (\ln x)^n\, dx,$$

donde n es un entero positivo.

P 2.41 *(Julio 05)*

(a) Aproximar el valor de la integral

$$\int_1^2 \frac{x}{x - \operatorname{sen} x}\, dx,$$

mediante la regla de Simpson dividiendo el intervalo en cuatro partes iguales.

(b) Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{x - \operatorname{sen} x}\, dx,$$

según los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

P 2.42 *(Julio 06)*

(a) Estudiar la convergencia de la integral impropia

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{1 + x^2}\, dx.$$

(b) Calcular el valor de la integral impropia I usando la sustitución $u = 1/x$.

Capítulo 3

Series

3.1. Series numéricas

P 3.1 Estudiar el carácter de las siguientes series:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{2^n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n!}$$

P 3.2 *(Julio 95)* Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(1+n)^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, estudiar para qué valores de α converge absolutamente, converge pero no absolutamente o diverge.

P 3.3 *(Segundo parcial 96)* Estudiar, en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$, la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+an}{a+n}\right)^{n^2}$.

P 3.4 *(Diciembre 98)* Enunciar el criterio integral de convergencia de series. Determinar, según los valores de $p \in \mathbb{R}$, la convergencia de la integral

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(\log x)^p}.$$

Determinar, según los valores de $p \in \mathbb{R}$, la convergencia de la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n(\log n)^p}.$$

P 3.5 *(Septiembre 05)* Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x}\operatorname{sen} x$.

(a) Dibujar un esquema de la gráfica de f y obtener la sucesión $(x_k)_{k\geq 0}$ de ceros de f en $[0,\infty)$.

(b) Calcular el área A_k de la región comprendida entre la gráfica de f en el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ y el eje x.

(c) Probar que la sucesión $(A_k)_{k\geq 0}$ es una progresión geométrica cuya razón es menor que 1.

(d) Hallar la suma de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$.

P 3.6 *(Primer parcial 06)* Supongamos que las dos series de términos positivos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n),$$

son convergentes. Estudiar el carácter de las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n},$$

razonando las respuestas.

P 3.7 *(Septiembre 06)* Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,3^n}.$$

P 3.8 *(Septiembre 07)* Dada la serie numérica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,2^{2n+1}},$$

estudiar su carácter y calcular su suma usando una función conocida.

3.2. Series de potencias

P 3.9 *(Septiembre 96)* Dada la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(2x+3)^n$, encontrar los valores de x para los cuales la serie converge. Para dichos valores de x, hallar la suma de la serie.

P 3.10 *(Septiembre 98)* Dada la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) x^n$, obtener el radio de convergencia y estudiar el comportamiento en los extremos del intervalo de convergencia. Calcular la suma para $x = 1$, escribiendo la serie numérica resultante como una serie telescópica.

P 3.11 *(Diciembre 99)* Probar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!}(x+1)^n = e^{x+1}(2+x),$$

determinando previamente para qué valores de x converge la serie de potencias.

P 3.12 *(Julio 2000)* Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{n+1} - n\right) x^n.$$

Calcular su radio de convergencia, su dominio de convergencia y su suma en dicho dominio.

P 3.13 *(Septiembre 2000)* Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n\,,$$

determinar su radio de convergencia. Estudiar la convergencia en los extremos. Hallar su suma.

P 3.14 *(Septiembre 01)* Se considera la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{(n+1)\,2^n}-\frac{n}{3^n}\right)x^n.$$

Obtener su dominio de convergencia y su suma en dicho dominio.

P 3.15 *(Primer parcial 02)* Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\,(x-2)^n}{n}.$$

Determinar su radio de convergencia, su dominio de convergencia y su función suma.

P 3.16 *(Final 02)* Se considera la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\,(n+2)}.$$

Obtener su intervalo de convergencia, analizando el comportamiento en los extremos. Calcular su función suma en el interior de dicho dominio.
Indicación: Para determinar la suma, descomponer en fracciones simples el coeficiente del término general.

P 3.17 *(Julio 03)* Se consideran las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^p}(x-2)^n\,,\quad p\geq 0.$$

1. Determinar su radio y dominio de convergencia según los valores de p.
2. Para el caso $p=1$, obtener la suma de la serie en el interior del intervalo de convergencia.

P 3.18 *(Junio 04)* Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3x^n,$$

calcular su radio de convergencia, su dominio de convergencia y su suma en dicho dominio.

P 3.19 *(Primer parcial 06)* Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)},$$

calcular su radio de convergencia, el carácter de la serie en los extremos del intervalo de convergencia y su suma.

P 3.20 *(Primer parcial 07)* Para cada número natural $n \geq 2$, sea r_n la recta determinada por los puntos $(1, 2)$ y $(n, 0)$. Consideremos la región plana R_n comprendida entre las rectas r_{2n}, r_{2n+1} y las rectas de ecuación $x = 1$ y $x = 2$.

a) Calcular el área a_n de la región R_n, para cada $n \geq 1$.

b) Calcular el radio y el dominio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

3.3. Teorema de Taylor. Series de Taylor

P 3.21 *(Febrero 98)* Enunciar y demostrar el criterio de Leibniz para series alternadas. ¿Cuantos sumandos de la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \log(1+x)$ se deben tomar para obtener una aproximación de $\log 2$ con un error menor que 10^{-3}, evaluando la serie en $x = 1$?

P 3.22 *(Febrero 98)* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua que verifica $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$ si $x \neq 0$. ¿ Cuánto vale $f(0)$? Justificar la respuesta. Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 4 de f. Hallar la serie de Maclaurin de la función $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$G(x) = x - \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t^2}\, dt.$$

¿Cuál es su radio de convergencia?

P 3.23 *(Julio 98)* Estudiar la convergencia de

$$\int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} dx.$$

Hacer el cambio de variable $t = 1 - e^{-x}$ en la integral anterior. Usar la serie de McLaurin de $\log(1 - t)$ para escribir la integral resultante como una serie numérica. Enunciar alguno de los teoremas que se utilicen.

P 3.24 *(Primer parcial 2000)* Enunciar el teorema de Taylor. Determinar el grado del polinomio de Taylor en $\pi/3$ que es necesario para calcular $\cos 61°$ con un error menor que 10^{-3} y obtener dicho valor.

P 3.25 *(Primer parcial 2000)* Obtener el desarrollo en serie de Taylor en 0 de

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 5x + 6},$$

indicando el dominio de convergencia. (Utilizar descomposición en fracciones simples).

P 3.26 *(Julio 01)* Se considera la función definida por la determinación principal del arco tangente, es decir $f(x) = \arctan(x)$, tal que $-\pi/2 < f(x) < \pi/2$.

1. Obtener el polinomio de Taylor de grado 2 de f en $x_0 = 1$, $P_2(x)$, y el correspondiente resto $R_2(x)$.
2. Aproximar el valor de $\arctan(1{,}1)$ mediante $P_2(1{,}1)$, obteniendo una cota del error cometido.
3. Obtener la serie de MacLaurin (serie de Taylor en $x_0 = 0$) de f y encontrar su radio de convergencia. Explicar si puede utilizarse dicha serie para calcular un valor aproximado de $\arctan(1{,}1)$.
4. Obtener una aproximación de $\arctan(1{,}1)$ resolviendo la ecuación $\tan(t) = 1{,}1$ por el método de Newton, realizando las iteraciones necesarias para que se repitan las tres primeras cifras decimales.

P 3.27 *(Septiembre 02)* Se considera la función $f(x) = \log(4 + x^2)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$. Obtener la serie de MacLaurin de f, especificando su dominio de convergencia.

P 3.28 *(Primer parcial 03)* Se considera la función $f(x) = \ln(1 + x)$ definida en el intervalo $(-1, \infty)$. Obtener la serie de Taylor en cero de f, su radio y su dominio de convergencia. Estudiar el carácter de la integral

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^p \operatorname{sen} x}\, dx.$$

Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n},$$

y obtener su suma en caso de que sea convergente.

P 3.29 *(Septiembre 03)*

1. Dentro de un círculo de radio R se inscribe un cuadrado y dentro de éste un nuevo círculo. El proceso se repite indefinidamente. Determinar la suma de las áreas de todos los círculos resultantes.
2. A partir de la serie geométrica, obtener el desarrollo en serie de potencias en el origen de la función

$$f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

P 3.30 *(Primer parcial 04)* Dada la función

$$f(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1.$$

1. Obtener la serie de Maclaurin de f y su dominio de convergencia.
2. Probar que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$$

   es convergente y calcular su suma integrando f en el intervalo $[0,1]$.

P 3.31 *(Primer parcial 05)* Definir el polinomio de Taylor y el resto de Lagrange de grado n de una función f en un punto a. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función continua definida por

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}, \quad x \neq 0.$$

(a) Calcular $f(0)$.

(b) Obtener el polinomio de Maclaurin de f de grado 4.

(c) Aproximar $f(1)$ utilizando el polinomio obtenido en el apartado anterior y estimar el error cometido.

Capítulo 4

Curvas

P 4.1 Encontrar una parametrización de la cisoide. Esta curva plana se genera del siguiente modo: Un rayo arbitrario OB intersecta la línea recta $x = a$ en B. Sea C la proyección de B sobre el eje OY y M la proyección de C sobre OB. El punto M es el que describe la cisoide.

P 4.2 Comprobar que el ángulo que forma la tangente a la hélice en un punto con la generatriz del cilindro que pasa por ese punto es constante.

P 4.3 Demostrar que las rectas son las únicas curvas cuyo vector tangente unitario es constante en todos sus puntos.

P 4.4 La cicloide es la trayectoria que sigue un punto de una circunferencia cuando ésta rueda a lo largo de una línea recta sin deslizamiento. Probar que la cicloide viene parametrizada por $r(t) = a(t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ para $t \in [0, 2\pi]$, siendo a el radio de la circunferencia.

P 4.5 Hallar las rectas tangentes a las siguientes curvas en el punto P que se indica:

1. $r(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$ y $P = (1, 0, 0)$.
2. $r(t) = \left(t^2, t^3\right)$ y $P = (1, 1)$.

P 4.6 Calcular las longitudes de las siguientes curvas o arcos de curvas (suponemos que todas constantes que aparecen son positivas):

1. La hélice circular, dada por $r(t) = (a \cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ con $t \in [0, c]$.
2. La curva parametrizada por $r(t) = (e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, e^t)$ con $t \in [0, a]$.
3. La catenaria $y = a^{-1} \cosh(ax)$ entre $x = -1$ y $x = 1$.
4. El arco de la curva $y = a \ln\left(a^2 - x^2\right)$ $(a > 1)$ situado por encima del eje OX.
5. El perímetro de la luna formada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 2ax$ y $x^2 + y^2 = 2by$, siendo $a > b > 0$.
6. La astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

7. La poligonal $r(t) = (|t|, |t-2|)$ para $t \in [-1, 4]$.

P 4.7 Calcular las longitudes de las siguientes curvas dadas en coordenadas polares:

1. El arco de la espiral logarítmica $r(\theta) = e^{a\theta}$, con $a > 0$, que se encuentra dentro de la circunferencia unidad ¿Qué ocurre si $a < 0$?
2. La cardioide dada por $r(\theta) = 1 - \cos\theta$, con $\theta \in [0, 2\pi]$.

P 4.8 Hallar la parametrización con respecto a la longitud de arco y utilizarla para calcular los vectores unitarios tangente y normal y la curvatura de

1. la circunferencia de radio a,
2. la hélice circular $r(t) = (a\cos t, a \operatorname{sen} t, bt)$ con $t \in [0, c]$, siendo a, b y c constantes.

P 4.9 Demostrar que si una curva plana viene dada por $y = y(x)$ entonces su curvatura es

$$\kappa = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}.$$

Aplicar esta fórmula para hallar la curvatura de una parábola y de una elipse de semiejes a y b.

P 4.10 La lemniscata es el lugar geométrico de aquellos puntos del plano tal que el producto de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante e igual al cuadrado de la semidistancia entre los focos. Comprobar que su ecuación en coordenadas polares es $r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$. Calcular el área encerrada por esta lemniscata.

P 4.11 Calcular el área del recinto exterior a $x^2 + y^2 = a^2$ e interior a la lemniscata

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$$

P 4.12 *(Segundo parcial 05)* Demostrar que la curvatura K de la curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$ es

$$K = \frac{\left|2\,(r')^2 - r\,r'' + r^2\right|}{\left[(r')^2 + r^2\right]^{3/2}}.$$

Calcular la curvatura de la curva $r = a \operatorname{sen}\theta$.

Capítulo 5

Funciones de varias variables

5.1. Cambio de variables

P 5.1 Demostrar que el cambio de variables

$$u = \frac{y^2 - x^2}{2}, \;\; v = \frac{y^2 + x^2}{2},$$

transforma la ecuación $y^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - x^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, en la ecuación

$$2(u^2 - v^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = v\frac{\partial F}{\partial u} - u\frac{\partial F}{\partial v},$$

suponiendo que las derivadas cruzadas son iguales.

P 5.2 Dada la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

y el cambio de variables $u = ax + y, \;\; v = 2x$, calcular $a \in \mathbb{R}$ para que la única derivada parcial de segundo orden que aparezca en la ecuación transformada sea $\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$.

P 5.3 *(Julio 96)* Transformar la ecuación en derivadas parciales

$$z_{xx} + xz_{xy} + \left(\frac{x^2}{2} - y\right) z_{yy} = 0,$$

mediante el cambio de variables $x = u + v, \; y = uv$.

P 5.4 *(Segundo parcial 97)* Dado el cambio de variables definido por las ecuaciones $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, calcular su jacobiano y el de su inverso. Transformar mediante dicho cambio la expresión

$$xz_x + yz_y + z_{xx} + z_{yy}.$$

P 5.5 *(Segundo parcial 99)* Sea $z(x,y)$ una función cuyas derivadas parciales segundas existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$. Transformar la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

mediante el cambio de variables $u = x-y$, $v = x+ay$, donde a es una constante. Calcular el valor del parámetro a para el que la ecuación del apartado anterior se transforma en la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

P 5.6 *(Julio 99)* En la expresión

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

donde $u = u(x,y)$, efectuar el cambio de variables independientes

$$x = e^r \cos\theta, \quad y = e^r \operatorname{sen}\theta.$$

P 5.7 *(Julio 2000)* Obtener la ecuación en que se transforma la ecuación de Laplace $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, donde $u = u(x,y)$, al efectuar el cambio a coordenadas polares, $x = r\cos t,\ y = r \operatorname{sen} t$.

P 5.8 *(Segundo parcial 01)* Obtener la expresión en que se transforma

$$z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy},$$

al cambiar las variables independientes (x,y) por (u,v) y la función z por w, considerando que unas y otras están relacionadas por

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}, \quad z = \frac{u^2-v^2}{4} - w.$$

P 5.9 *(Julio 02)* Se considera la ecuación de ondas $w_{tt} = c^2 w_{xx}$, donde c es una constante real y la función incógnita es $w = w(x,t)$. Transformarla mediante el cambio de variables $u = x+ct$, $v = x-ct$. Integrar la ecuación que resulta para $w(u,v)$ y probar que

$$w(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct),$$

donde f y g son funciones arbitrarias.

5.2. Derivación implícita

P 5.10 *(Septiembre 95)* La ecuación $x^2 + y^3 + xy + x^3 + ay = 0$, define a y como función implícita de x, es decir $y = f(x)$, en un entorno de $(0,0)$, si $a \neq 0$.

1. Calcular el polinomio de Taylor de tercer grado, $P_3(x)$, de f en $x=0$ para $a \neq 0$.
2. Para $a = -1$, demostrar que $P_3(x)$ tiene un único corte con $y = 1$ en el intervalo $[0,+\infty)$. hallar dicho punto de corte mediante el método de Newton con un error menor que 10^{-5}.

P 5.11 *(Diciembre 95)* Demostrar que la curva

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + z^2 &= 1, \\ xy + xz &= 2, \end{aligned}$$

es tangente a la superficie de ecuación implícita $xyz - x^2 - 6y + 6 = 0$, en el punto $(1, 1, 1)$.

P 5.12 *(Segundo parcial 99)* La ecuación

$$F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

define a z como función implícita de x e y, es decir $z = f(x, y)$. Determinar las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ en función de las parciales D_1F y D_2F.

5.3. Extremos libres

P 5.13 *(Segundo parcial 99)* Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el campo escalar definido por $f(x, y) = y\left(x^2 - (y - 1)^2\right)$. Determinar sus puntos críticos y clasificarlos.

P 5.14 *(Segundo parcial 99)* La ecuación

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3x - 3y + 3z = 0,$$

define a z como función de x e y, $z = h(x, y)$, en un entorno de (x_0, y_0) para todo punto (x_0, y_0, z_0) que satisface la ecuación. Calcular los puntos (x_0, y_0, z_0) para los que la función $z = h(x, y)$ tiene puntos críticos y determinar su carácter de extremo relativo.

P 5.15 *(Julio 99)* La ecuación $z^3 - 2xz + y = 0$, define z como función implícita de (x, y) en un entorno de $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Obtener las derivadas parciales de segundo orden de $z = z(x, y)$ en el punto $(x, y) = (1, 1)$. Si $z = z(x, y)$ es la función del apartado anterior, comprobar que $(x, y) = (1, 1)$ es un punto crítico de la función $g(x, y) = z(x, y) - 2(x - 1) + y - 1$, y estudiar su carácter.

P 5.16 *(Febrero 02)* Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{8y}{1 + x^2 + y^2}$$

1. Obtener sus puntos críticos, clasificarlos y determinar los valores extremos de f.
2. Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de f en el origen.

5.4. Multiplicadores de Lagrange

P 5.17 *(Segundo parcial 95)* Calcular el punto más lejano y más cercano del conjunto $S = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x + z \geq a\right\}$ al punto $(0, a, 0)$.

P 5.18 *(Segundo parcial 2000)* Hallar los extremos absolutos de la función $f(x,y,z) = x + y + z$, en el conjunto

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\right\}.$$

P 5.19 *(Julio 2000)* Hallar la distancia mínima entre la elipse $x^2 + 2y^2 = 6$ y la recta $x + y = 5$.

P 5.20 *(Febrero 01)* Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = xy^2$, en el conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \ \ y \geq 0, \ \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

P 5.21 *(Julio 02)* Obtener los extremos absolutos de la función $f(x,y) = xy$ en el recinto $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

P 5.22 *(Septiembre 02)* Calcular los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = 4x^2 + 9y^2 - x^2y^2,$$

en el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

P 5.23 *(Segundo parcial 04)* Hallar los extremos absolutos de

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{xy}$$

en el conjunto $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

P 5.24 *(Junio 04)* Hallar los extremos absolutos de $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4x - 3y$, sobre el conjunto

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, \ 4x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

P 5.25 *(Septiembre 04)* Hallar el máximo y el mínimo absolutos de la función

$$f(x,y) = \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) - \int_0^x \frac{2t}{1+t^4}\, dt,$$

en el conjunto $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

P 5.26 *(Segundo parcial 05)* Hallar los puntos de la elipse

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 - 4 &= 0, \\ x + y + z &= 0, \end{aligned}$$

más cercanos y más lejanos al eje OY.

P 5.27 *(Julio 05)* Obtener los extremos absolutos de la función

$$f(x,y) = y^3 + x^2y + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 8,$$

en el conjunto $M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

P 5.28 *(Septiembre 05)* Calcular las distancias mínima y máxima del plano

$$x + y + 2z = 0$$

a los puntos de la elipse

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 = 12, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$$

P 5.29 *(Segundo parcial 06)* Hallar los extremos absolutos de

$$f(x, y, z) = x - y - z,$$

sobre el conjunto

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 - 1 = 0, \quad 3x - 4z = 0 \right\}.$$

P 5.30 *(Septiembre 06)* Calcular el valor máximo de la función

$$f(x, y, z) = x + 2y - z,$$

en el recinto

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \;\; x + y + z \geq 0 \right\}.$$

P 5.31 *(Segundo parcial 07)* Hallar el punto más alto de la curva dada por la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 36, \quad 2x + y - z = 2.$$

P 5.32 *(Junio 07)* Sea $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$ la temperatura en cada punto de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 50$. Hallar las temperaturas máxima y mínima en la curva formada por la intersección de la superficie esférica y el plano $x - z = 0$.

P 5.33 *(Septiembre 07)* Hallar el punto más bajo de la curva intersección del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ y el plano $x + 2z = 4$.

Capítulo 6

Integración múltiple

6.1. Integrales dobles

P 6.1 Sea V el sólido definido en $\mathbb{R}^3$ por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4, \;\; x^2+y^2 \leq 1, \;\; z \geq |y|\}$$

(se parece a la punta de un destornillador). Calcular el volumen de V.

P 6.2 Sea S la porción acotada del primer cuadrante situada entre las curvas de ecuaciones $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$. Dibujarla y calcular la integral

$$\iint\limits_S x^2y^2 dxdy.$$

P 6.3 Calcular el volumen de la región del espacio definida por las desigualdades

$$x^2+y^2 \leq 1, \;\; x+y \geq 1, \;\; z \geq 0, \;\; z^2 \leq \frac{1}{(x^2+y^2)^3}.$$

P 6.4 *(Febrero 01)* Calcular $\iint_S x^3y^3\, dxdy$, siendo S la región contenida en el cuadrante positivo y limitada por las curvas

$$x^2+y^2 = 2, \;\; x^2+y^2 = 4, \;\; x^2-y^2 = 1, \;\; x^2-y^2 = 2.$$

P 6.5 *(Julio 06)* Sea R la región acotada por las curvas

$$y = \sqrt{x}, \quad y = \sqrt{2x}, \quad y = \frac{x^2}{3}, \quad y = \frac{x^2}{4}.$$

Utilizar el cambio de variables $x = u^{1/3}v^{2/3}$, $y = u^{2/3}v^{1/3}$ para hallar el área de la región R.

P 6.6 *(Segundo parcial 07)*
(a) Calcular el área de la región plana encerrada por la lemniscata de ecuación $\left(x^2+y^2\right)^2 = 9\left(x^2-y^2\right)$.
(b) Obtener el volumen del sólido interior al cilindro de ecuación

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 9\left(x^2-y^2\right)$$

y al hemisferio de ecuación $z = \sqrt{9-x^2-y^2}$.

6.2. Integrales triples

P 6.7 Calcular $\iiint_V \exp\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\, dxdydz$, donde V es el conjunto de los puntos $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tales que $x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0$.

P 6.8 *(Julio 94)* Calcular la integral triple $\iiint_V y^2\, dxdydz$, donde V es el sólido

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\le 0,\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\right\}\cup \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le \frac{1}{x^2+y^2},\ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}.$$

P 6.9 Calcular la integral $\iiint_G z^2\, dxdydz$, siendo G el recinto sólido definido por $G=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1,\ 0\le y\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$.

P 6.10 Sea Ω el recinto comprendido entre el interior de un paraboloide $z+3\ge x^2+4y^2$ y el interior de un elipsoide $x^2+4y^2+z^2\le 9$. Calcular $\iiint_\Omega z\, dxdydz$.

P 6.11 *(Septiembre 97)* Consideremos el recinto del primer octante de $\mathbb{R}^3$,

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\le xy\le b,\ \ a\le y^2-x^2\le b,\ \ z\le x^2+y^2\right\},$$

con $0<a<b$. Calcular el volumen de Ω y hallar $\iiint_\Omega \left(xy^3-x^3y\right)\, dx\, dy\, dz$.

P 6.12 Calcular el volumen del sólido definido por las desigualdades

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &\le 4a^2,\\ z &\ge a, \end{aligned}$$

$(a>0)$ mediante coordenadas esféricas y mediante coordenadas cilíndricas.

P 6.13 *(Segundo parcial 98)* Sea V el sólido limitado, inferiormente por la parte superior del cono $4x^2+4y^2=z^2$, y superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2=2z$. Calcular la integral $\iiint_V (1+x)\, dx\, dy\, dz$.

P 6.14 Calcular el plano Π tangente a la superficie de ecuación $xz^3+3zx-x-y=0$ en el punto $(1,3,1)$. Sean A, B y C los puntos en los que el plano Π corta a los ejes coordenados. Calcular mediante una integral triple el volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen y los puntos A, B y C.

P 6.15 Calcular, usando coordenadas esféricas,

$$\iiint_V \frac{xyz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}\, dV,$$

siendo V el recinto limitado en el primer octante por la esfera $x^2+y^2+z^2=4$.

P 6.16 Calcular el volumen de

$$A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x^2+y^2\le \frac{1}{4},\ \ (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\le z\le (1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

usando coordenadas esféricas y cilíndricas.

P 6.17 Siendo $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 \leq 36\right\}$, calcular, usando un cambio de variables adecuado, la integral

$$\iiint_V (2x + 3y + 6z)^2 \, dxdydz.$$

P 6.18 *(Septiembre 05)* Hallar el volumen del sólido situado en el exterior del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que lo limita, en el semiplano $z \geq 0$ y en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$.

6.3. Aplicaciones

P 6.19 *(Julio 99)* A una esfera maciza de radio unidad se le hace un taladro cilíndrico siguiendo un eje diametral de la esfera. Suponiendo que el cilindro es circular de radio a, con $0 < a < 1$, y que el eje que se usa para taladrar la esfera es el OZ, el sólido resultante queda definido por

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1 - z^2\right\}.$$

Calcular su volumen. Calcular el área total de la superficie exterior de V (incluyendo la parte cilíndrica) ¿Para qué valor de a se hace máxima el área calculada en el apartado anterior? ¿Cuál es el valor de dicha área máxima?

P 6.20 Hallar el volumen de la parte del cilindro $x^2 + y^2 - 2ax = 0$, $a > 0$, que es interceptada por el cilindro parabólico $z^2 = 2ax$.

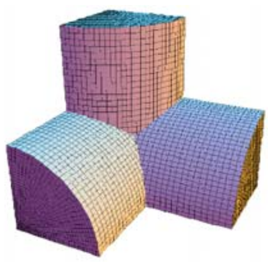
P 6.21 *(Julio 03)* Calcular el volumen del sólido interior al cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 2ax$, que está comprendido entre el plano $z = 0$ y la parte superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$.

P 6.22 *(Segundo parcial 06)*

(a) Evaluar las integrales $\displaystyle\iint_{D_1} \sqrt{1 - x^2}\, dx\, dy$, $\displaystyle\iint_{D_2} \sqrt{1 - y^2}\, dx\, dy$, donde

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\right\}, \\ D_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq x \leq y\right\}. \end{aligned}$$

(b) Calcular el volumen del sólido dado por la intersección de los tres cilindros sólidos $x^2 + y^2 \leq 1$, $x^2 + z^2 \leq 1$, $y^2 + z^2 \leq 1$, situado en el octante positivo $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. *Indicación: aplicar los resultados obtenidos en (a).*



Capítulo 7

Análisis vectorial

7.1. Integrales de línea de campos escalares y vectoriales

P 7.1 En cada uno de los siguientes casos, determinar si F es o no el gradiente de un campo escalar. En caso afirmativo, calcular una función potencial.

1. $F(x, y) = \big(2xy, x^2 + 1\big)$.
2. $F(x, y) = (x, y)$.
3. $F(x, y) = \big(3x^2y, x^3\big)$.
4. $F(x, y) = (\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x + x, \cos(x) + x\cos(y) + y)$.
5. $F(x, y) = \big(x + y^2, 2xy\big)$.
6. $F(x, y) = \big(x^2 + y^2, 0\big)$.
7. $F(x, y, z) = \big(2xyz + z^2 - 2y^2 + 1, x^2z - 4xy, x^2y + 2xz - 2\big)$.
8. $F(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$.

P 7.2 Calcular la integral $\int_C x^2y\,ds$, sobre las siguientes curvas:

1. La semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, con $y \geqslant 0$.
2. La semicircunferencia $x^2 + y^2 = 1$, con $x \leqslant 0$.

P 7.3 En los siguientes casos, calcular $\int_C (xy + z - 1)\,ds$:

1. $r_1(t) = (-t, -t, -t)$ con $-1 \leqslant t \leqslant 0$.
2. $r_2(t) = \big(t^2, t^2, t^2\big)$, para $t \in [-1, 0]$.
3. $r_3(t) = \big(t^2, t^2, 1\big)$ si $t \in [-1, 0]$, y $r_3(t) = \big(0, 0, 1 - t^2\big)$ para $t \in [0, 1]$.

P 7.4 Calcular la integral $\int_C z\,ds$, siendo C la hélice cónica parametrizada por $r(t) = (t\cos t, t \operatorname{sen} t, t)$, para $t \in [0, 6\pi]$.

P 7.5 Si O es el origen y $P = (1, 1, 1)$, calcular la integral de línea

$$\int_C y\,dx - (x - y)\,dy + x\,dz,$$

a lo largo de las curvas que tienen O como punto inicial y P como punto final dadas a continuación (siendo $A = (1, 0, 0)$ y $B = (1, 1, 0)$).

1. La diagonal OP.
2. Las aristas del cubo $OABP$.
3. La poligonal OBP.

P 7.6 Calcular la integral $\int_C (-y, x) \cdot dr$ para las siguientes curvas:

1. La semicircunferencia unidad orientada de $(1, 0)$ a $(-1, 0)$.
2. Los segmentos de recta que unen los puntos $(0, 0)$, $(-1, 1)$ y $(0, 2)$, orientados en este sentido.

P 7.7 Calcular $\oint_C (2xy - x^2, x + y^2) \cdot dr$ sobre las siguientes curvas cerradas:

1. El rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ y $(0, 2)$.
2. La curva cerrada formada por las parábolas $y = x^2$, $y^2 = x$.
3. El triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 2)$.

P 7.8 Calcular $\int_C (x^2 - y^2)\,dx - x\,dy$, desde $A = (0, 2)$ hasta $B = (2, 0)$, a lo largo de las siguientes curvas:

1. La recta AB.
2. El cuadrante de circunferencia de centro O y radio 2.
3. La poligonal que une A y B pasando por $D = (2, 2)$.

P 7.9 Dada la curva $r(t) = (1 + t, 1 - t, t^2)$, con $t \in [0, 1]$, calcular $\int_C F \cdot dr$ para los siguientes campos vectoriales:

1. $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$.
2. $F(x, y, z) = (xyz, 0, 0)$.
3. $F(x, y, z) = (0, 0, xyz)$.

P 7.10 Calcular las siguientes integrales sobre las curvas en $\mathbb{R}^3$ que se indican:

1. $\int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, con $r(t) = (1 + t, -1 + t, 1 + 2t)$ para $t \in [0, 1]$.
2. $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, donde C es la curva intersección del plano $x + y - 2 = 0$ con la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, orientada en el sentido del reloj si se mira la curva desde el origen.

3. $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, donde C es la curva intersección de las superficies $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$ orientada en el sentido del reloj si se mira la curva desde un punto muy alto del eje OZ.

4. $\oint_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, siendo C el triángulo de vértices $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$ recorrido en este sentido.

5. $\int_C (x, y, xz - y) \cdot dr$, siendo C el segmento que une los puntos $(0,0,0)$ y $(1,2,4)$.

6. $\int_C (x, zy, y - x^2) \cdot dr$, donde C es la hélice $r(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, bt)$ con $t \in [0, 4\pi]$.

P 7.11 *(Septiembre 07)* Calcular la integral de línea

$$\oint_C (8x + z)\ dx + 2xz^2\,dy - 4y^2\,dz,$$

siendo C la curva definida por las ecuaciones

$$\begin{cases} z = 9 - 2x^2 - 4y^2, \\ z = 1, \end{cases}$$

que tiene orientación positiva si se observa desde un punto alto del eje OZ.

7.2. El teorema de Green

P 7.12 *(Segundo parcial 99)* Se considera la curva cuya ecuación en coordenadas polares es $r(\theta) = \sqrt{2} + \mathrm{sen}\,\theta + \cos\theta$. Dibujar su gráfica e indicar de qué curva se trata. Para el arco C de la curva anterior que va de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$, calcular la integral de línea

$$\int_C (x^3 - y + e^y)\,dx + (y^2 + xe^y)\,dy.$$

P 7.13 Verificar el teorema de Green con $F(x,y) = (2xy - x^2, x + y^2)$ en las siguientes regiones.

1. El rectángulo de vértices $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,2)$ y $(1,0)$.

2. El triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,2)$ y $(1,0)$.

3. La zona encerrada por las parábolas $y = x^2$, $y^2 = x$.

P 7.14 *(Julio 99)* Sea C el arco de la lemniscata $r^2 = \cos 2\theta$, contenido en el primer cuadrante y recorrido desde el punto $(1,0)$ hasta el origen de coordenadas. Usar el teorema de Green para calcular

$$\int_C \left(e^x \cos y + xy^2\right) dx - \left(e^x\,\mathrm{sen}\,y + x^2 y\right) dy.$$

P 7.15 Usando el teorema de Green, calcular el área de las siguientes regiones mediante una integral de línea adecuada.

1. La región encerrada por la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
2. La zona encerrada por un arco de cicloide y el eje OX.
3. El área encerrada por un lazo de la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

P 7.16 Sea F el campo vectorial en $\mathbb{R}^2$ definido por $F(x, y) = (y, x)$. Probar que

$$\int_C F \cdot dr = 0,$$

a lo largo de cualquier curva cerrada C.

P 7.17 Usando el teorema de Green, evaluar la integral de línea

$$\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy,$$

a lo largo de las siguientes curvas:

1. El arco de parábola $y^2 = 2(x + 2)$ con la cuerda $x = 2$.
2. La circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

P 7.18 Evaluar la integral

$$\oint_C -\log(x^2 + y^2)\, dx + \log(x^2 + y^2)\, dy,$$

siendo C cada uno de los arcos de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ con la cuerda $x = a/2$. (Observar que el integrando no es continuo en el círculo de radio a).

P 7.19 Sean A y B dos puntos sobre el eje OX del plano y sea C una curva simple y suave a trozos que une los puntos A y B. Supongamos que C está contenida en el exterior de la circunferencia unidad y en el semiplano superior. Sea F el campo vectorial $F(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}(x, y)$, $(x, y) \neq (0, 0)$; y sea n la normal unitaria a C. Demostrar que

$$\int_C F \cdot n\, dr \in \{-\pi, 0, \pi\}.$$

P 7.20 *(Segundo parcial 2000)* Sea R la región en el plano $\mathbb{R}^2$ limitada por las curvas

$$x^2 - y^2 = 1, \;\; x^2 - y^2 = 9, \;\; x + y = 4, \;\; x + y = 6.$$

Mediante el cambio de variables

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u & = & x + y \\ v & = & x - y \end{array} \right.$$

se transforma la región dada en otra T. Se pide:

1. Representar gráficamente las regiones R y T.
2. Calcular el área de la región R utilizando T.

3. Siendo C la frontera de la región R recorrida en sentido positivo, obtener el valor de la integral de línea

$$\oint_C (x^2 - y^2)\, dx + (x^2 - 4)\, dy.$$

P 7.21 *(Julio 2000)* Sea C una curva cerrada simple que encierra una región D. Demostrar, usando el teorema de Green, que el área de la región es

$$\text{área}\,(D) = \oint_C x\, dy = \oint_C -y\, dx = \frac{1}{2}\oint_C x\, dy - y\, dx.$$

Usando una de las anteriores integrales de línea, calcular el área del interior de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

P 7.22 *(Septiembre 2000)* Sea C la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 = 4$ orientada positivamente. Usar el Teorema de Green para calcular

$$\oint_C \left(x^2 + 2y^3\right)\, dy.$$

P 7.23 *(Julio 01)* Calcular directamente y usando el teorema de Green

$$\oint_C 2\left(x^2 + y^2\right)\, dx + (x+y)^2\, dy,$$

donde C es el contorno del triángulo con vértices en los puntos $(1,1)$, $(2,2)$ y $(1,3)$ recorrido en sentido positivo.

P 7.24 *(Segundo parcial 01)* Calcular el área encerrada en el lazo de la lemniscata

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right)$$

contenido en el semiplano $x \geq 0$, usando integrales dobles en coordenadas polares y aplicando el teorema de Green.

P 7.25 *(Segundo parcial 03)* (Cuadratura de la luna) Consideremos la región R del plano que es exterior a la circunferencia con centro en $(0,0)$ que pasa por el punto (a,a) e interior a la circunferencia con centro en $(0,a)$ y radio a. Usando el teorema de Green, demostrar que el área de dicha región coincide con el área de un cuadrado de lado a.

P 7.26 *(Segundo parcial 04)* Sea C la cardioide de ecuación $r = a\,(1+\cos\theta)$ orientada positivamente.

1. Calcular la integral de línea

$$\oint_C \left[\left(x^2 + y^2 - ax\right)^2 - a^2\left(x^2 + y^2 - 1\right)\right]\, ds,$$

usando el resultado para obtener la longitud de C.

2. Calcular la integral de línea

$$\oint_C y\, dx - x\, dy,$$

y utilizarla para deducir el área de la región encerrada por C.

7.3. Integrales de superficie

P 7.27 En los siguientes casos, describir las superficies —mediante una ecuación si es posible— y determinar el producto vectorial fundamental:

1. El plano $r(u,v) = (a_1 + b_1 u + c_1 v, a_2 + b_2 u + c_2 v, a_3 + b_3 u + c_3 v)$.
2. El paraboloide $r(u,v) = \big(au\cos v, bu\operatorname{sen} v, u^2\big)$.
3. La superficie de revolución $r(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, f(u))$, siendo f una función real.
4. El cilindro elíptico $r(u,v) = (u, a\operatorname{sen} v, b\cos v)$.
5. El toro $r(u,v) = ((a + b\cos u)\operatorname{sen} v, (a + b\cos u)\cos v, b\operatorname{sen} u)\,,\ 0 < b < a$.
6. El hiperboloide de una hoja $r(u,v) = (a\cosh u\cos v, b\cosh u\operatorname{sen} v, c\operatorname{senh} u)\,.$
7. El hiperboloide de dos hojas $r(u,v) = (a\operatorname{senh} u\cos v, b\operatorname{senh} u\operatorname{sen} v, c\cosh u)$.
8. El elipsoide $r(u,v) = (a\operatorname{sen} u\cos v, b\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v, c\cos u)$.
9. El cono $r(u,v) = (av\cos u, bv\operatorname{sen} u, v)$.
10. El paraboloide hiperbólico $r(u,v) = \big(u, v, u^2 - v^2\big)$.
11. El cilindro hiperbólico $r(u,v) = (a\cosh v, b\operatorname{senh} v, u)$.
12. El cilindro parabólico $r(u,v) = \big(u, -cu^2, v\big)$.

P 7.28 Determinar la ecuación del plano tangente y de la recta normal a cada una de las siguientes superficies en el punto dado:

1. La copa parabólica $r(u,v) = \big(u, v, u^2 + v^2\big)\,,\ u^2 + v^2 \leqslant 10$ en el punto $(1,2,5)$.
2. La semiesfera unidad en $(1/3, 2/3, 2/3)$.
3. La hoja triangular $x + y + z = 1,\ x, y, z \geqslant 0$ en $(1/2, 1/4, 1/4)$.
4. El cono $r(u,v) = (u\cos v, u\operatorname{sen} v, u)$ en el punto $(1,0,1)$.
5. La superficie $r(u,v) = \big(u, v, u^2 - v^2\big)$ en el punto $(1,1,0)$.

P 7.29 Calcular el área de las siguientes superficies:

1. La porción del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que es interior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.
2. El trozo interceptado en $z^2 = 2xy$ por la esfera unidad.
3. La parte del cilindro parabólico $y^2 = ax$ interceptado por el paraboloide de ecuación $y^2 + z^2 = 4ax$ y el plano $x = 3a$.
4. En el caso anterior, la porción del paraboloide interceptado por el cilindro.
5. La región que determina el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ en el plano $x + y + z = a$.

6. La porción del plano $2x + y + 2z = 16$, delimitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.
7. La porción de la esfera $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$, encerrada en el paraboloide $z = x^2 + y^2$.
8. El trozo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, que está en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = ax$.
9. La porción del cono $x^2 + y^2 = z^2$ comprendida en el interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2ay$, con $a > 0$.

P 7.30 Una esfera está inscrita en un cilindro circular recto. La esfera es cortada por dos planos paralelos perpendiculares al eje del cilindro. Comprobar que las áreas de las porciones de esfera y de cilindro comprendidas entre esos planos coinciden.

P 7.31 Calcular las integrales de superficie $\iint_S f\, dS$ de las siguientes funciones f en las superficies S que se indican:

1. $f(x, y, z) = x + y + z$ y S es la esfera de radio unidad y centro el origen.
2. $f(x, y, z) = x^2 z^2$ y S es la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$ con $|z| \leqslant 1$.
3. $f(x, y, z) = x^4 - y^4 + y^2 z^2 - z^2 x^2 + 1$ y S es la porción que el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ recorta en la hoja superior del cono $x^2 + y^2 = z^2$.
4. $f(x, y, z)$ es el inverso de la distancia desde el origen al plano tangente al elipsoide S de ecuación $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4a^2$ en el punto (x, y, z).
5. $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 + z^2$ y S es el octante positivo de la superficie esférica unidad.

P 7.32 Sea $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcular $\iint_S F \cdot n\, dS$, siendo n el vector normal unitario exterior a la superficie, en los siguientes casos:

1. S es el cilindro $x^2 + y^2 = k^2$ con $0 \leqslant z \leqslant h$.
2. S es el cono circular de altura $h > 0$ de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$.
3. S es el paraboloide $z = 2 - (x^2 + y^2)$ con $z \geqslant 0$.
4. S es la parte del plano $2x + y + 2z = 16$ cortada por $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 1$.

P 7.33 Calcular las siguientes integrales:

1. $\iint_S z\, dxdy$, siendo S la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con vector normal interior.
2. $\iint_S xz\, dydz + yz\, dzdx + z^2\, dxdy$, siendo S el octante positivo de la esfera unidad con vector normal exterior.
3. $\displaystyle\iint_S \frac{x\, dydz + y\, dzdx + z\, dxdy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, siendo S la esfera unidad con vector normal exterior.

P 7.34 *(Segundo parcial 01)* Sea S el trozo del cono $x^2 = y^2 + z^2$, interior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y situado en el octante positivo $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. Calcular el área de S.

P 7.35 *(Septiembre 02)* Sea S_1 la porción de $x^2 + y^2 = 2y$ comprendida entre $y + z = 2$ y $z = 0$. Obtener su área.

7.4. Los teoremas de Stokes y de Gauss

P 7.36 *(Segundo parcial 2000)* Sea S el trozo de la superficie del paraboloide $z = x^2 + (y-1)^2$ interior al cilindro $x^2 + (y-2)^2 = 3$. Sea $F(x, y, z) = (y, x, xz)$ un campo vectorial. Calcular la integral $\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n\, dS$, con la normal exterior al paraboloide, directamente, usando el teorema de Stokes y usando el teorema de Gauss.

P 7.37 *(Julio 2000)* Utilizando la definición, calcular el flujo del campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la porción del cilindro parabólico $z = x^2$ limitada por los planos $z = a^2$, $y = 0$, $y = b$ (donde $a, b > 0$), orientada dicha superficie de forma que la componente z de la normal sea negativa. Comprobar el resultado utilizando, en forma conveniente, el teorema de la divergencia.

P 7.38 *(Septiembre 2000)* Sea S la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ situada en el primer octante y limitada por el plano $z = 1$. Sea

$$F(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y).$$

Calcular $\iint_S F \cdot n\, dS$, siendo n la normal interior al paraboloide. Calcular directamente la integral $\oint_C F \cdot dr$, donde C es la curva frontera de S. Comprobar el cálculo anterior usando el teorema de Stokes.

P 7.39 *(Segundo parcial 01)* Sea S el trozo del cono $x^2 = y^2 + z^2$, interior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y situado en el octante positivo $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$. Calcular el área de S. Sea $F(x, y, z) = \left(x^2, xy, xz\right)$. Calcular la integral

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n\, dS,$$

con la normal exterior al cono, directamente y usando el teorema de Stokes.

P 7.40 *(Julio 01)* Calcular el flujo de salida del campo vectorial

$$F(x, y, z) = \left((x-1)^3, (y+1)^3, (z-1)^3\right),$$

a través de la superficie cerrada

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 0\right\}.$$

P 7.41 *(Septiembre 01)* Se considera el sólido V limitado en el primer octante por la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 5$. Calcular el flujo de salida del campo vectorial $F(x, y, z) = (2y, zy, 3z)$ a través de la frontera S del sólido V, directamente y usando el teorema de Gauss.

P 7.42 *(Febrero 02)* Dada la superficie

$$S(u,v) = \left(u, v-u, \frac{1-v^2}{2\sqrt{2}}\right), \quad 0 \le u \le 1, \quad -1 \le v \le 1,$$

1. Calcular el área de S.

2. Calcular el flujo del campo vectorial $F(x,y,z) = (x+y, x-y, z)$ a través de la superficie S orientada con la normal exterior.

3. Usando el teorema de Stokes, calcular la integral de línea del campo F a lo largo de la curva C que forma la frontera de S.

4. Sea V el sólido limitado por S y por los planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$. Calcular la integral triple de la divergencia de F en V directamente y usando el teorema de Gauss.

P 7.43 *(Segundo parcial 02)* Sea Ω el sólido comprendido en el interior de la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

que es exterior al cono $(z-1)^2 = x^2 + y^2$. Sea S_1 la parte de la frontera de Ω correspondiente a la esfera y S_2 la parte de la frontera de Ω correspondiente al cono. Obtener el área de la superficie $S = S_1 \cup S_2$, frontera de Ω, parametrizando S_1 y S_2. Calcular el flujo de salida del campo $F(x,y,z) = (x-z, y-z, z)$ a través de la frontera S del sólido Ω, directamente y utilizando el teorema de Gauss.

P 7.44 *(Julio 02)* Sea S la superficie formada por las cinco caras superiores del cubo $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$. Sea $F(x,y) = \left(xy, 0, -z^2\right)$. Hallar

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot n \, dS$$

donde n es el vector normal exterior al cubo.

P 7.45 *(Septiembre 02)* Se considera el sólido V limitado por la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 2y$ y los planos $z = 0$, $y + z = 2$. Calcular el flujo de salida del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \left(x^2 + \operatorname{sen} z, xy + \cos z, e^y\right)$$

a través de la frontera S de V.

P 7.46 *(Segundo parcial 03)* Sea S la porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que se encuentra en el semiespacio $2y + z \le 3$. Calcular el flujo de salida del campo $F(x,y,z) = (y+z, x+z, z)$ directamente y mediante el teorema de Gauss. *Indicación:* Utilizar las coordenadas $x = r\cos\theta$, $y = -1 + r\operatorname{sen}\theta$, $z = z$, para parametrizar S.

P 7.47 *(Julio 03)* Sea C la curva intersección del plano $y + \sqrt{2}z = 0$ con el elipsoide $x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 = 1$, orientada positivamente cuando se la mira desde un punto situado muy arriba en el eje OZ. Calcular

$$\int_C \left(-y + \cos e^x\right) dx + y\,dy + z\,dz$$

aplicando el teorema de Stokes sobre una superficie plana adecuada.

P 7.48 *(Septiembre 03)* Sea Ω el recinto comprendido entre el exterior de un paraboloide y el interior de un elipsoide definido por

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z + 3 \leq x^2 + 4y^2, \;\; x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 9 \right\}.$$

Sea S la superficie que limita a Ω y sea $F(x, y, z) = (xz, \operatorname{sen} z, e^y)$. Calcular $\iint_S F \cdot n \, dS$ usando el teorema de Gauss.

P 7.49 *(Segundo parcial 04)* Consideremos el sólido

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \;\; 0 \leq z \leq y, \;\; x^2 + y^2 \leq 4 \right\},$$

y sea S la superficie cerrada que limita a V.

1. Calcular el área de la parte cilíndrica S_1 de la superficie S.

2. Calcular directamente el flujo de salida del campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x, y, z)$$

a través de la superficie cerrada S.

3. Calcular el flujo citado aplicando el teorema de la divergencia.

P 7.50 *(Junio 04)* Sea S el octante positivo de la superficie esférica unidad.

1. Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-1)^2}} \, dS.$$

2. Calcular directamente y usando el teorema de Stokes la integral de línea $\oint_C F \cdot dr$, donde C es la curva frontera de S orientada por la normal exterior y

$$F(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x, y, z).$$

P 7.51 *(Septiembre 04)* Sea V el sólido definido por

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \;\; y \geq 0, \;\; z \geq 0, \;\; y + z \leq 4, \;\; x \leq 6 \right\},$$

y sea S la superficie cerrada que limita a V. Calcular, directamente y mediante el teorema de Gauss, el flujo de salida a través de S del campo vectorial

$$F(x, y, z) = (xe^z, ye^z, e^z).$$

P 7.52 *(Segundo parcial 05)* Consideremos la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$, orientada según la normal exterior a la esfera y el campo vectorial $F(x, y, z) = \left(-y, yz^2, x^2 z \right)$. Calcular la integral de superficie

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot N \, dS,$$

directamente, aplicando el teorema de Stokes y usando el teorema de Gauss.

P 7.53 *(Julio 05)* Calcular directamente y usando el teorema de Stokes la integral de línea

$$\oint_C x\,dx + yz^2\,dy + xz\,dz,$$

donde C es la curva dada por la intersección de las superficies

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, & z \geq 0, \\ x^2+y^2=y. \end{cases}$$

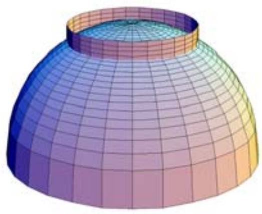
P 7.54 *(Segundo parcial 06)* Sea S la porción de la semiesfera

$$x^2+y^2+z^2=4, \;\; z \geq 0,$$

que se encuentra en el interior del cilindro $x^2+y^2=1$. Dado el campo vectorial

$$F(x,y,z) = (xy, yz, zx),$$

calcular el flujo exterior del campo $\operatorname{rot}(F)$ a través de S, directamente, usando el teorema de Stokes y aplicando el teorema de Gauss.



P 7.55 *(Julio 06)* Calcular el flujo exterior del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z),$$

sobre la superficie dada por los puntos del paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ tales que $z \geq 1$.

P 7.56 *(Septiembre 06)* Hallar el flujo exterior del campo vectorial

$$F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z),$$

sobre la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.

P 7.57 *(Segundo parcial 07)* Sea S la superficie definida por

$$z = 1 - x^2 - y^2, \;\; x + z \geq 1$$

y sea F el campo vectorial definido por

$$F(x,y,z) = (yz, xz, xy).$$

Calcular el flujo exterior del campo F a través de S, directamente y aplicando el teorema de la divergencia de Gauss.

P 7.58 *(Junio 07)* Sea R la región plana interior a la curva

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

a) Utilizar el cambio de variables $u = x/2$, $v = y/\sqrt{2}$ para calcular la integral doble

$$\iint_R (8 - 2x^2 - 4y^2)\, dx\, dy.$$

b) Calcular el volumen del sólido

$$Q = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq z \leq 9 - 2x^2 - 4y^2\right\}.$$

c) Calcular el flujo exterior del campo vectorial

$$F(x, y, z) = \left(8x + z, 2xz^2, -4y^2\right)$$

a través de la frontera S del sólido Q.

Capítulo 8

Exámenes del curso 2007-08

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Primer Examen Parcial. 21 de Enero de 2008

Ejercicio 1. Sea $P = \left(a, a^2\right)$ con $a > 0$ un punto cualquiera de la gráfica de la parábola $y = x^2$ situado en el semiplano $x > 0$.

(i) Demostrar que la intersección de la parábola con su recta normal en P es el punto

$$Q = \left(-a - \frac{1}{2a}, \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2\right).$$

(ii) Encontrar el valor de a que minimiza la distancia entre P y Q, razonando la respuesta.

Ejercicio 2. Sea D la región acotada por la parábola $y = x - x^2$ y el eje x.

(i) Encontrar la pendiente de la recta $y = mx$ que divide la región D en dos regiones de igual área.

(ii) Calcular el volumen del sólido generado por la región acotada por la parábola y la recta obtenida en (i), al girar alrededor del eje y.

Ejercicio 3. (i) Usar la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ para calcular la serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \frac{x}{(1-x)^2},$$

así como su dominio de convergencia.

(ii) Dada la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{9}{10}\right)^n,$$

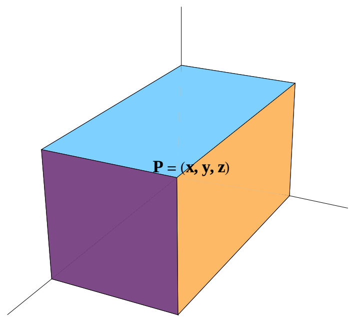
estudiar su carácter y calcular su suma.

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Segundo Examen Parcial. 5 de Junio de 2008

Ejercicio 1.
Consideremos la región plana $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 2x, \;\; x^2+y^2 \geq 2\right\}$.

1. Calcular el área de R.
2. Sea C la curva frontera de R orientada positivamente. Calcular la integral de línea
$$\oint_C \left(2xy - y^2\right)\, dx + \left(x^2+y\right)\, dy.$$
3. Calcular la longitud de C.

Ejercicio 2.
Una caja rectangular se coloca en el primer octante con un vértice en el origen y las tres caras adyacentes en los planos coordenados como muestra la figura. Además, el vértice $P = (x,y,z)$ con coordenadas $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, pertenece al paraboloide de ecuación $2x^2 + y^2 + z = 1$. Hallar el punto P que maximiza el volumen de la caja.



Ejercicio 3.
Sea S la porción del paraboloide $z + 1 = x^2 + y^2$, situada debajo del plano $z = 1$, y sea $\mathbf{F}(x,y,z) = (0, x - 2yz, x^2)$. Hallar $\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS$, donde $\mathbf{N}$ es la normal exterior al paraboloide, haciéndolo directamente, mediante el teorema de Stokes, y mediante el teorema de Gauss.

CÁLCULO

Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación

Examen Final. 26 de Junio de 2008

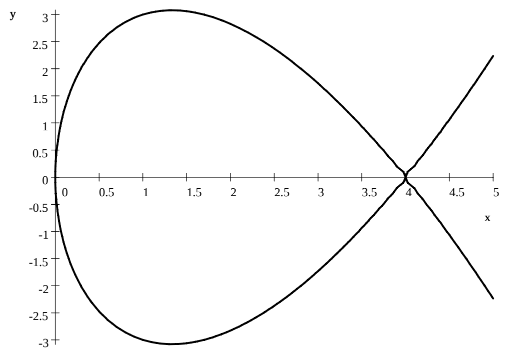
PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Consideremos los rectángulos de lados paralelos a los ejes que pueden inscribirse en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0.$$

Calcular las dimensiones y el área del rectángulo que tiene área máxima.

Ejercicio 2. Sea R la región plana limitada por el lazo de la curva definida por la ecuación $y^2 = x\,(4-x)^2$. Calcular los volúmenes de los sólidos que se obtienen cuando la región R gira alrededor del eje x, del eje y, y de la recta $x = 4$.



SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3.

(a) Dada la función $f(x,y) = x^2+4y^2-3x-4y$, calcular sus extremos absolutos sobre la región cerrada y acotada

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \;\; x^2 + 4y^2 \leq 4\right\}.$$

(b) Sea C la curva frontera de la región D, con orientación positiva. Calcular la integral de línea

$$\oint_C xy\,dx + x^2\,dy.$$

Ejercicio 4.

Hallar el flujo del campo vectorial $F\,(x,y,z) = \left(4x, -2y^2, z^2\right)$ a través de la superficie exterior del sólido

$$x^2 + y^2 \leq x, \quad 0 \leq z \leq 3,$$

directamente y usando el teorema de Gauss.

CÁLCULO
Primer curso de Ingeniero de Telecomunicación
Examen de 8 de Septiembre de 2008
PRIMERA PARTE

Ejercicio 1. Calcular el volumen del sólido obtenido al girar, alrededor del eje x, la región acotada por dicho eje y la función $f : [0, e] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & 0 < x \leq e, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 2. Dada la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{5(n+1)} \right)^n x^n,$$

determinar su radio de convergencia, estudiar la convergencia en los extremos y aproximar su suma en $x = -1$ con un error menor que $1/500$.

SEGUNDA PARTE

Ejercicio 3. Hallar los extremos absolutos de la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y - z^2,$$

sobre el conjunto $D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, \ \ x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$.

Ejercicio 4. Sea S_1 la superficie de ecuación $z = x^2 + 2y^2$ y sea S_2 la superficie de ecuación $z = 4 - x^2$.

(a) Calcular el volumen del sólido Q acotado por las dos superficies.

(b) Calcular el flujo de salida del campo vectorial $F(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de la frontera de Q.

(c) Calcular la integral de línea $\oint_C F \cdot dr$, siendo C la curva intersección de las superficies S_1 y S_2.