

Tecnología y enseñanza de la matemática: un ejemplo concreto

Juana Contreras S.⁴
Claudio del Pino O.⁵

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca



La incorporación de la tecnología, como apoyo a la enseñanza de la matemática, es una línea que cada día es más frecuente en todos los niveles de enseñanza de la matemática. Esta situación se explica por diversas razones: disponibilidad de buenos e interactivos software comerciales o gratis de propósitos matemáticos, por ejemplo, en los primeros *DERIVE* y *Cabri*, y en los segundos *Winplot* y *Graphmatica* (graficadores) y *Regla y Compás* (de geometría), implementación de laboratorios computacionales en colegios y universidades, junto a múltiples informes de experiencias exitosas en la incorporación de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Sin embargo, esta incorporación no ha logrado los niveles de impacto esperado, debido fundamentalmente a que los profesores de matemática no han sido capacitados adecuadamente en el uso y manejo de las nuevas tecnologías.

Una manera sencilla y a la mano, de iniciar la incorporación de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática, es utilizar el software *Excel* que se encuentra disponible en todos los computadores que operan bajo el sistema operativo Windows.

En la primera parte de este trabajo se muestra, con razonable detalle, cómo utilizar este software para generar una planilla excel para trabajar en el tema de sistema de ecuaciones lineales. Con este fin se diseñará en este programa, una hoja de trabajo en la cual se muestre: el sistema de ecuaciones que se desea resolver, la solución de dicho sistema, las tablas de valores de ambas ecuaciones y el gráfico de las rectas correspondientes a las ecuaciones del sistema. En la segunda parte de este trabajo, se proponen algunas actividades en el tema de sistemas de ecuaciones lineales, que pueden ser trabajadas con la planilla excel construida.

Construyendo la hoja de trabajo en Excel.

- *Ingreso de las ecuaciones:* El sistema de ecuaciones a resolver lo incorporaremos en el sector rectangular con esquinas las casillas B7 y H8. Para ingresar la ecuación se sugiere incorporar, en las celdas señaladas, el contenido indicado:

⁴ e-mail: jcontres@utalca.cl

⁵ e-mail: cdelpino@utalca.cl

Primera ecuación		Segunda ecuación	
Celda	Ingresar	Celda	Ingresar
B7	Coefficiente de x de la primera ecuación, es decir, un número	B8	Coefficiente de x de la segunda ecuación, es decir, un número
C7	x (variable)	C8	x (variable)
D7	+ (símbolo de adición)	D8	+ (símbolo de adición)
E7	Coefficiente de y de la primera ecuación, es decir, un número	E8	Coefficiente de y de la segunda ecuación, es decir, un número
F7	y (variable)	F8	y (variable)
G7	= (símbolo de igualdad)	G8	= (símbolo de igualdad)
H7	Término constante de la primera ecuación, es decir, un número	H8	Término constante de la segunda ecuación, es decir, un número

Después de incorporar lo indicado, la hoja que se está preparando se vería así (nótese que se han asignado los números 1, 2 y 5 en la primera ecuación, y 1, -2 y -4 en la segunda ecuación):

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7	Ecuación 1:	1,00	x +	2,00	y =	5,00		
8	Ecuación 2:	1,00	x +	-2,00	y =	-4,00		

- *Ingreso de la solución del sistema.* Los valores de x e y de la solución del sistema se ingresarán en las celdas M7 y O7, respectivamente. Para ello, en dichas celdas se ingresan las siguientes fórmulas:

Celda	Fórmula a ingresar
M7	$+(E8 * H7 - E7 * H8) / (B7 * E8 - B8 * E7)$
O7	$+(B7 * H8 - B8 * H7) / (B7 * E8 - B8 * E7)$

Con el fin de mejorar la presentación, ingresar lo indicado en la siguientes celdas:

Celda	Ingresar
L7	(

Celda	Ingresar
N7	,

Celda	Ingresar
P7)

Al ingresar las fórmulas indicadas, en las celdas aparecerán los números correspondientes a la solución del sistema. Para simplificar la hoja de trabajo que se está preparando, no se considerarán los casos en que el sistema no tenga o tenga infinitas soluciones. Ingresando un título, la hoja de trabajo se verá ahora así:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															

Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Ecuación 1: $1,00 x + 2,00 y = 5,00$

Ecuación 2: $1,00 x + -2,00 y = -4,00$

Solución del sistema

(**0,50 , 2,25**)

- *Ingreso de la tabla de valores.* Las tablas de valores de las ecuaciones se ingresarán en el sector rectangular con esquinas en las celdas B10 y H21. En la columna B10..B21 se ubicarán los valores de x, en las columnas E10..E21 y H10..H21, los valores correspondientes a y de la primera y segunda ecuación, respectivamente.

Ingreso de los valores de x: con el objetivo de flexibilizar el rango de valores asignados a x, en la celda B11 se ingresará, a elección, el primer valor de x, es decir un número cualquiera. En la siguiente celda (B12) se ingresará la fórmula +(B11 + B23), donde la celda B23 contendrá un número positivo que indicará el incremento de los valores de la tabla (no olvidar ingresarlo). Finalmente, se copia la celda B12 en las celdas que van desde B13 a B21.

Ingreso de los valores de y: ingresar las fórmulas indicadas en las celdas señaladas:

Celda	Ingresar
E11	=(H\$7- \$B\$7*B11)/\$E\$7

Celda	Ingresar
H11	=(H\$8-\$B\$8*B11)/\$E\$8

Luego copiar la celda E11 en las celdas que van desde E12 a E21 y la celda H11 en las celdas que van desde H12 a H21.

La planilla de cálculo se verá ahora así: (Observar que en este caso se ha asignado a x el -5 como primer valor y 1 al incremento)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1															
2															
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															
21															
22															
23															

Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Ecuación 1: $1,00 x + 2,00 y = 5,00$

Ecuación 2: $1,00 x + -2,00 y = -4,00$

Solución del sistema

(**0,50 , 2,25**)

	x	Tabla Ecuación 1	Tabla Ecuación 2
Valor inicial	-5,0	5,00	-0,50
	-4,0	4,50	0,00
	-3,0	4,00	0,50
	-2,0	3,50	1,00
	-1,0	3,00	1,50
	0,0	2,50	2,00
	1,0	2,00	2,50
	2,0	1,50	3,00
	3,0	1,00	3,50
	4,0	0,50	4,00
	5,0	0,00	4,50

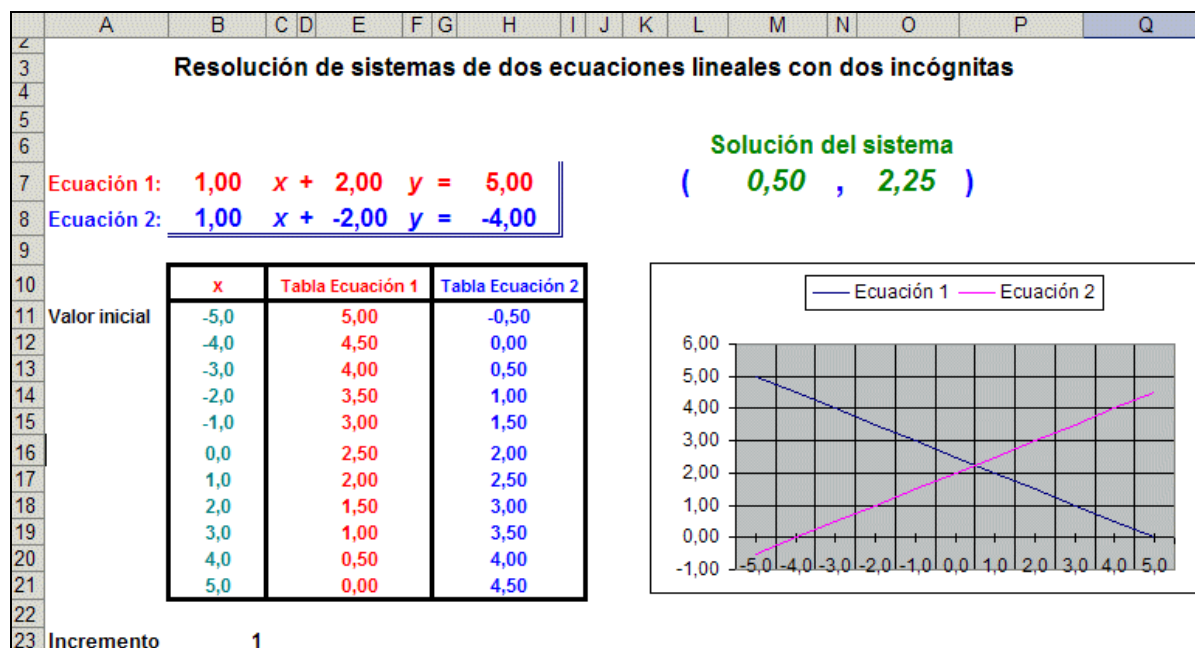
Incremento 1

- *Gráfico de las rectas correspondientes a las ecuaciones.* Eligiendo el asistente de gráficos de Excel, seguir los siguientes pasos:

- Elegir en *Tipo de gráfico*, Líneas; en *subtipo de gráfico*, el primero.
- Luego clicar en *siguiente*.
- Elegir opción *Series*.
- Elegir opción *Agregar*.
- En *Serie 1*, poner como *nombre* Ecuación 1; en valores los correspondientes a las celdas E11..E21.
- Elegir opción *Agregar*.
- En *Serie 2*, poner como *nombre* Ecuación 2; en valores los correspondientes a las celdas H11..H21.
- En *Rótulos del eje de categorías (X)*, ingresar los valores correspondientes a las celdas B11..B21.
- Elegir opción *Siguiente*.
- En opción *Leyenda*, elegir opción *Arriba*.
- Elegir opción *Siguiente*.
- Elegir opción *Terminar*

Luego de seguir estas indicaciones, debería tener en el área de trabajo de Excel, el gráfico de las rectas correspondientes a las dos ecuaciones del sistema.

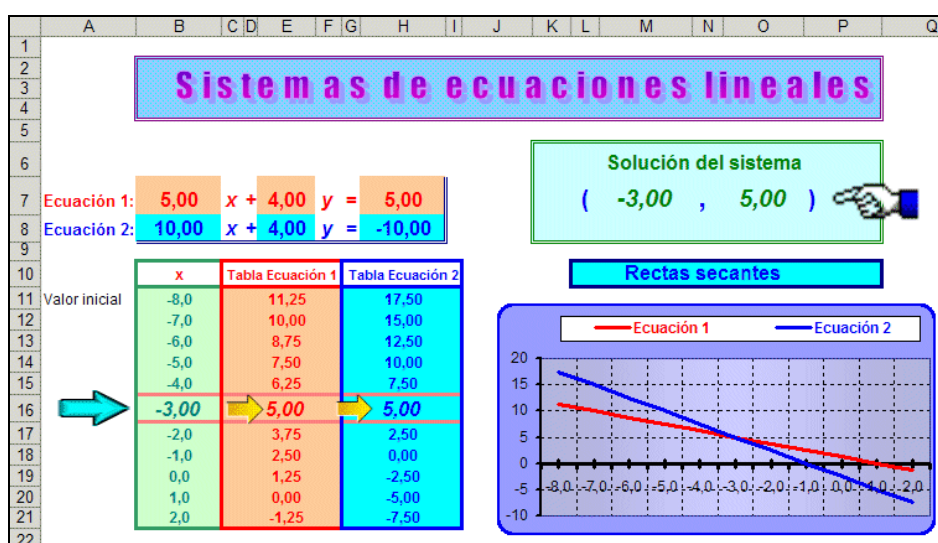
Finalmente, luego de poner un título y colores opcionales, el área de trabajo quedaría aproximadamente así:



Observaciones:

- La *gracia* de la hoja de cálculo preparada es que, si se cambia un coeficiente de alguna de las ecuaciones, ¡instantáneamente se actualizan la solución del sistema, las tablas de valores y el gráfico!. Además, si se cambia el valor inicial de x y/o el incremento, ¡se actualizan la tabla de valores y el gráfico!. ¡Verificarlo!.

- b) Como se indicó anteriormente, la hoja de cálculo recién diseñada está limitada al trabajo de sistemas de ecuaciones lineales con solución única. Como es de suponer esta limitación se puede obviar, incorporando en la celda M7 (que contiene la solución para x):
 $=SI(\$B\$7*\$E\$8=\$B\$8*\$E\$7;" "; (-\$E\$7*\$H\$8+\$E\$8*\$H\$7)/(\$B\$7*\$E\$8-\$B\$8*\$E\$7))$,
 y en la celda O7 (que contiene la solución para y):
 $=SI(\$B\$7*\$E\$8=\$B\$8*\$E\$7;" "; (\$B\$7*\$H\$8-\$B\$8*\$H\$7)/(\$B\$7*\$E\$8-\$B\$8*\$E\$7))$.
- c) Cómo un desafío interesante, se propone modificar la hoja recién construida de modo que tenga la siguiente apariencia⁶:



Actividades:

Utilizando la hoja de cálculo, ya preparada, se proponen las siguientes actividades para ser trabajadas con sus estudiantes:

Actividad 1: Familiarizándose con la hoja de cálculo que resuelve sistemas de ecuaciones.

- a) Resolver, usando la hoja de cálculo preparada, cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones. Al resolver cada uno de ellos, observar tanto la solución como la tabla de valores y los gráficos de ambas ecuaciones.

i)
$$\begin{cases} 3x - 5y = -7 \\ x + 4y = 9 \end{cases}$$
 ii)
$$\begin{cases} 21x + 3,5y = 203 \\ -7x + 10y = -90 \end{cases}$$
 iii)
$$\begin{cases} 43x - 25y = -448,5 \\ 34x + 21y = 61,2 \end{cases}$$

- b) ¿La solución de alguno de los sistemas de ecuaciones anteriores, no aparece en el gráfico respectivo?. En caso afirmativo, modificar el valor inicial (celda B10), de modo que en el gráfico asociado "se vea" la solución.

⁶ Si usted lo desea, puede solicitar el archivo correspondiente a uno de los autores de este trabajo.

Actividad 2: *Determinando sistemas de ecuaciones equivalentes.*

- Ingresar un sistema de ecuaciones, a su gusto, en la hoja de trabajo. Anótela en su cuaderno, junto a su solución.
- Sustituir la segunda ecuación, por la suma de la primera ecuación con la segunda. Anotar en su cuaderno el nuevo sistema de ecuaciones junto a su solución. ¿Qué puede observar?
- Sustituir, en el nuevo sistema, la segunda ecuación por la resta de la primera ecuación con la segunda. Anotar en su cuaderno el nuevo sistema de ecuaciones junto a su solución. ¿Qué puede observar?
- Sustituir, en el nuevo sistema, la primera ecuación por la suma de 3 veces la segunda más la primera. Anotar en su cuaderno el nuevo sistema de ecuaciones junto a su solución. ¿Qué puede observar?
- De todas las observaciones realizadas, ¿qué puede concluir?.

Actividad 3: *Estudiando una familia de sistemas de ecuaciones.*

Dados los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{l} \text{i)} \quad \begin{array}{l} 3x + 4y = 5 \\ 7x + 8y = 9 \end{array} \quad \text{ii)} \quad \begin{array}{l} -20x - 19y = -18 \\ 4x + 5y = 6 \end{array} \quad \text{iii)} \quad \begin{array}{l} 13x + 14y = 15 \\ -9x - 8y = -7 \end{array} \end{array}$$

- ¿Qué tienen de particular los coeficientes de las ecuaciones que conforman los sistemas dados?
- Usando la hoja de trabajo desarrollada en Excel para resolver sistema de ecuaciones obtener la solución de los tres sistemas dados. ¿Qué puede observar en las soluciones obtenidas?
- Según la observación realizada, usted piensa que es casualidad o que ella responde a una propiedad general. Plántese otros sistemas de ecuaciones que correspondan al patrón de los sistemas dados en esta actividad, y compruebe si en ellos se verifica o no lo observado.
- Los diferentes casos analizados sugieren que lo observado corresponde a una propiedad general. Enunciar e intentar comprobar esta supuesta propiedad general.

Actividad 4: *Descifrando un mensaje oculto con soluciones de sistemas de ecuaciones.*

A continuación se presenta un mensaje oculto. El objetivo de esta actividad es descubrirlo. Para ello debes resolver los sistemas de ecuaciones planteados y luego anotar las letras asociadas a cada sistema sobre el par correspondiente a su solución. Por ejemplo, si un sistema tiene asociada la letra Z y su solución fuera el par (3,6), sobre cada aparición del par (3,6), en el mensaje oculto, se colocaría la letra Z.

Sistemas de ecuaciones y letras asociadas:

$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{array} \right\} E$	$\left. \begin{array}{l} 2x - y = -3 \\ x + 2y = 1 \end{array} \right\} O$	$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ x + 2y = -1 \end{array} \right\} A$
$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 1 \\ 3x + 4y = 6 \end{array} \right\} T$	$\left. \begin{array}{l} 5x - 7y = -7 \\ 8x + 4y = 4 \end{array} \right\} N$	$\left. \begin{array}{l} x - 8y = 1 \\ 3x + 4y = 3 \end{array} \right\} R$
$\left. \begin{array}{l} x + y = -5 \\ 3x - 5y = 9 \end{array} \right\} M$	$\left. \begin{array}{l} 9x + 4y = 6 \\ 7x - 3y = 23 \end{array} \right\} B$	$\left. \begin{array}{l} 14x + 9y = 55 \\ 10x - y = 17 \end{array} \right\} D$

-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
(1,-1)	(-2,3)	(1,-1)	(-2,3)	(1,0)	(1,1)	(2,-3)	(1,1)	(-1,1)	
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
(1,1)	(-2,3)	(1,-1)	(1,0)	(-2,-3)	(0,1)	(1,1)	(2,3)	(-1,1)	

Mensaje oculto:

Como se ha podido observar, la planilla excel resulta ser un recurso tecnológico bastante sencillo y apropiado para generar una hoja de trabajo en el ambiente de sistemas de ecuaciones lineales. Se pueden generar otras planillas especiales para trabajar temas tales como: operatoria de números (enteros, racionales, reales y complejos), porcentajes, ecuaciones, funciones (incluyendo sus gráficos), tópicos de estadística, etc.

Bibliografía

- [1] **Fare Matematica con Excel**
<http://digilander.libero.it/enzomrd/>
- [2] **Para entretenerse y aprender matemática**
<http://old.clarin.com.ar/suplementos/informatica/2000/09/27/t-05301d.htm>
- [3] **Resolviendo ecuaciones con Excel**, G. Figueroa M. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática
<http://www.itcr.ac.cr/revistamate/HERRAmInternet/ecuaexecl/node0.html>

