Sucesión de Fibonacci y el número áureo

Mauricio Vargas Contreras.[7]

Leonardo de Pisa (1170-1250)

Matemático Italiano nacido en Pisa, mas conocido como **Fibonacci**[8]. Fibonacci nació en Italia pero fue educado en África del norte donde su padre ocupaba un puesto diplomático. Es allí donde recibió su primera formación matemática, a cargo de maestros musulmanes y conoció las enormes ventajas de los sistemas matemáticos usados en esos países.

Su principal obra fue el Liber Abaci (o libro acerca del ábaco), una extensa obra que contiene casi todo el conocimiento algebraico y aritmético de la época. También escribió sobre problemas prácticos de matemáticas comerciales y geodesicas, problemas asociados al álgebra y sobre matemáticas recreativas. Su talento como matemático se extendió por la corte, siendo invitado por el Emperador Federico II a participar en un torneo. Leonardo resolvió con éxito todos los problemas que le fueron propuestos.

En el Liber Abaci, texto en el cual defiende el uso de los números arábigos, números que usamos hoy en día, y explica como sumar, restar, multiplicar y dividir en este sistema, así como la resolución de otro tipo de problemas sobre álgebra y geometría, uno de los cuales es el siguiente:

"En un corral, se coloca una pareja de conejos, recién nacidos, para ver cuántos descendientes produce en el curso de un año, y suponiendo que cada mes a partir del segundo mes de su vida, cada pareja de conejos da origen a una nueva pareja"

El Problema de los conejos

Para resolver este problema, Fibonacci utilizó las siguientes suposiciones:

- A un conejito recién nacido le toma un mes llegar a su madurez reproductiva
- En un mes, una pareja (macho y hembra) de conejos maduros producen una pareja de conejitos.
- Durante el primer año ninguno muere.

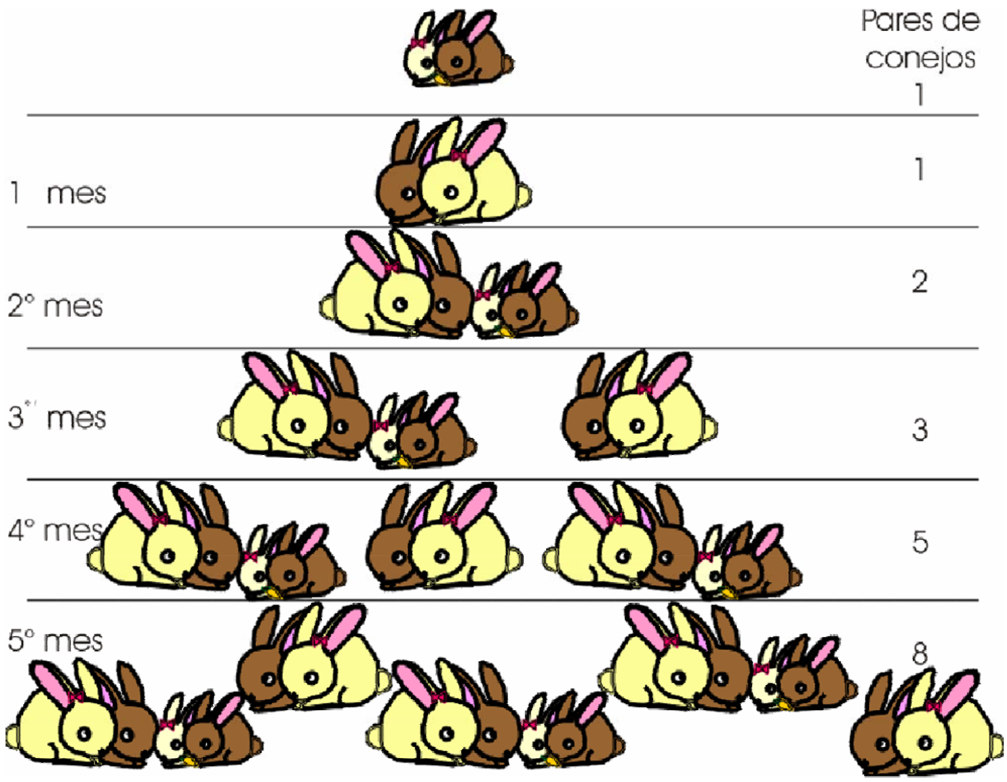
---

[7] Ingeniero Mecánico (c), e-mail: mvargas@utalca.cl

[8] Fibonacci es una contracción de *filius Bonacci* = hijo de Bonacci, ya que su padre se llamaba, Guglielmo Bonacci

Solución:

Como la primera pareja es recién nacida, y no se reproduce hasta el segundo mes de vida, al finalizar el primer mes tenemos sólo una pareja, pero al finalizar el segundo, se produce una nueva pareja. De éstas, sólo la primera pareja tiene descendencia en el mes siguiente, de manera que en el tercer mes hay tres parejas. De estas tres parejas, sólo dos parejas tienen descendencia en el mes siguiente, de manera que, al finalizar el cuarto mes, hay cinco parejas. De las cinco parejas, sólo tres se reproducen en el mes siguiente, de manera que, al final del quinto mes hay ocho parejas, como se puede observar en la siguiente figura.



Como se puede observar en la figura, determinar cuantas parejas de conejos habrá en cierto tiempo es fácil. Sin embargo la riqueza que encierra este problema, es la secuencia de resultado, mes tras mes, en donde podemos encontrar una relación matemática que provocó la inmortalidad del problema de los conejos.

Analizando los datos anteriores podemos deducir la cantidad de parejas de conejos que hay en un determinado tiempo ¿cómo?, de la siguiente forma:

- Al examinar la figura, podemos ver que, en el segundo mes se suma el primer número al segundo, o sea, 1+1=**2**
- En el siguiente, se suma el segundo número con el tercero, es decir, 1+2=**3**
- Posteriormente, se suma el tercer número con el cuarto, de donde 2+3=**5**

Y así sucesivamente. Esto es, a partir del segundo mes, para saber cuantos conejos hay al finalizar cada mes, debemos sumar al número de conejos que hay en los dos meses inmediatamente anteriores.

Para ahondar y precisar más en esta relación numérica, vamos a sacarla del contexto del problema de los conejos y presentarla como objeto matemático sujeta a determinada notación convencional y caracterizada por sus propiedades. Veamos la lista de números resultantes.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

En primer lugar, nos damos cuenta que estos números forman una lista infinita (esto es lo que indican los tres puntos sucesivos: que no podemos escribir un último término). A una lista como ésta, que además es ordenada, esto quiere decir que hay un primer término, un segundo, un tercero, etc., le damos el nombre de sucesión, y por razones obvias, a ésta en particular, le llamamos Sucesión de Fibonacci.

Podemos hacernos algunas preguntas sobre sus términos, por ejemplo ¿cuál es el 4º término? Si denotamos por la letra f a la sucesión en general, nos referiremos entonces con esta letra y un subíndice a un término específico de ella. Así,

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3, \ldots,\ f_{10} = 55,\ f_{11} = 89,$$
$$f_n = \text{n-ésimo término de Fibonacci.}$$

Los subíndices juegan entonces un papel importante puesto que indican el término al cual nos referimos, pero de acuerdo al orden, o sea al lugar que ocupa en la sucesión, mientras que el número en sí, es el valor numérico que le asociamos a ese término.

Bueno, lo que interesa señalar ahora es que ya conocemos una forma general de encontrar un número de Fibonacci, no importa cuál sea: simplemente sumamos sus dos predecesores. En notación general tenemos:

$$f_1 = f_2 = 1$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ , para todo } n \geq 3,$$

Este descubrimiento natural no sólo ha sorprendido a matemáticos, sino también a biólogos y arquitectos. Una de las tantas aplicaciones que ha tenido esta sucesión de números ha sido por ejemplo; en la filotaxia (rama que estudia la posición de las hojas), también en la cantidad de pétalos de las margaritas, el espiral que presenta cualquier variedad de piñas, coincide con dos términos de la sucesión de Fibonacci, 8 y 13; o 5 y 8.

Así como tantas otras aplicaciones en la naturaleza muchos biólogos y matemáticos, piensan que Fibonacci sin pretenderlo habría encontrado una clave del crecimiento de la naturaleza.

Numero áureo

Se denomina número áureo al número[9] ϕ= 1,61803..., (llamado sección áurea o razón áurea).

[9] ϕ (phi) es la inicial del nombre del escultor griego, Fidias, que utilizó tal proporción en sus obras.

La razón áurea surge cuando los griegos estudian la división de un segmento en dos partes de forma que la longitud total del segmento (a+b), es a la parte mayor (a), como la parte mayor es a la menor (b), o sea:

El segmento está dividido en la razón áurea sí: $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$.

De esta igualdad se llega a que: $1+\frac{b}{a}=\frac{a}{b}$ y, si denominamos x al cociente $\frac{a}{b}$, se obtiene una ecuación, cuyas soluciones son $x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. La solución negativa se descarta por ser las longitudes siempre positivas.

A la raíz: $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1,618034...$ se denomina número áureo o número dorado.

A este número se le ha dado un carácter casi mágico, haciéndolo aparecer, de forma más o menos natural, en las proporciones de la antigua pirámide de Keops, en el Partenón, en las catedrales de Colonia o Notre Dame y dándonos a entender que los arquitectos de distintas épocas lo habían empleado en sus diseños por ser generador de una armonía casi mágica. También se dijo que es utilizado en el famoso grabado de Leonardo da Vinci sobre las proporciones humanas; la altura hasta el ombligo de una persona divide a la altura total según la sección áurea. A partir de ahí, otras muchas zonas de nuestra anatomía fueron divididas según la razón áurea: la cara, los dedos, etc.

Relación del número áureo con la sucesión de Fibonacci

Para relacionar la sucesión de Fibonacci con el número áureo, vamos a realizar el siguiente ejercicio:

- Determinar los cuocientes $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ de los términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci, comenzando en $n=2$.
- Observar los resultados obtenidos en las divisiones anteriores.
- Estimar el comportamiento de las sucesivas divisiones cuando n tiende a $+\infty$

$$f_2/f_1=1$$
$$f_3/f_2=2/1=2$$
$$f_4/f_3=3/2=1,5$$
$$f_5/f_4=5/3=1,66666666666666...$$

$$f_6 / f_5 = 8/5 = 1{,}6$$
$$f_7 / f_6 = 13/8 = 1{,}625$$
$$f_8 / f_7 = 21/13 = 1{,}61538461...$$
$$f_9 / f_8 = 34/21 = 1{,}61904776...$$
$$f_{10} / f_9 = 55/34 = 1{,}61764705...$$

De acuerdo al análisis anterior, se obtiene $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n}{f_{n-1}} \approx 1{,}61803398... \approx \phi$

Ahora, para ver desde otro punto de vista la relación entre la sucesión de Fibonacci con el número áureo, analizaremos que sucede con la formula recursiva que satisfacen los números de Fibonacci cuando interviene el $\lim\limits_{n\to\infty}$ en dicha formula.

Como la fórmula recursiva de la sucesión de Fibonacci es:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{para todo } n \geq 3$$

Dividiendo la igualdad anterior por f_{n-1} se obtiene

$$\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{f_{n-1} + f_{n-2}}{f_{n-1}} = 1 + \frac{f_{n-2}}{f_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}$$

y por lo tanto $\dfrac{f_n}{f_{n-1}} = 1 + \dfrac{1}{\dfrac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}$

Usando que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n}{f_{n-1}}$ existe y que su valor es ρ **,** se tiene

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\dfrac{f_{n-1}}{f_{n-2}}} \right) = 1 + \frac{1}{\rho},$$

de donde $\rho^2 - \rho - 1 = 0$. Resolviendo y considerando que $\rho > 0$ se obtiene $\rho = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, igual al número áureo.

Bibliografía

[1] Fibonacci Numbers and the Golden Section
http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

[2] E.M. Purcell. *Fundamental University Physics*, Vol. 2,1967.

[3] Los trucos de Fibonacci
http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/mate3q.htm

[4] G.H. Ardy and E.M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers,* Oxford Science Publications, 1979.

[5] G. Nicolas Rodrigo et al. *Fisiología Vegetal*, Quinta Edición, Ediciones pirámide.

[6] M. Alonso y E. Finn. *Electricity and Magnetism*, 2ª ed., McGraw-Hill, 1985.

[7] N. N. Vorobiov. *Números de Fibonacci*, Editorial MIR, 1974.