Los números complejos y una bella fórmula de la matemática

Genaro Castillo G[10].

Universidad de Talca.
Instituto de Matemática y Física

Introducción

Estas notas se proponen puesto que pueden ser de ayuda a los profesores de enseñanza media que deseen implementar un curso electivo para sus alumnos más avanzados. Habría que agregarle una cantidad de ejercicios que ejemplifiquen y refuercen cada concepto; aquí, por razones de espacio, se han desarrollado sólo algunos y se ha sumado un anexo con ejercicios propuestos, a modo de insinuación.

Los alumnos que postulan a carreras de ingeniería deben en alguna instancia enfrentarse con esta temática, más aún, si ingresan a una ingeniería "dura"deben sortear un ramo extenso de Variable Compleja; así...¿por qué no anticiparse a los acontecimientos?

Antes de entrar en el terreno mismo, debemos aclarar algunos conceptos o expresiones si lo fuesen, debido a su naturaleza polémica intrínseca. Siempre que nos referimos a lo bello (o a lo feo) lo hacemos atados y limitados a nuestros sentidos, formateo previo o prejuicios. La belleza la concebimos especialmente a través de los sentidos de la visión, el oído y el olfato, tal vez mediante algún receptor intelectual captador de belleza espiritual, y nos produce una especie de admiración y placer en nuestro interior; comunicarla es tarea muy difícil para poetas, pintores, escultores, músicos, artistas, en general. Como el hombre se considera la medida de todas las cosas, el mismo debería ser la causa de la belleza. *En el fondo, el hombre se mira en el espejo de las cosas y considera bello todo lo que le devuelve su imagen. El juzgar algo bello constituye la vanidad característica de nuestra especie* , nos enrostra Nietzsche.

¿Porqué hay belleza en los sonidos, en los colores, en los olores y en los movimientos rítmicos de la naturaleza? ¿Qué es lo que hace que se manifieste la belleza? Responde Platón, toda belleza estimula a la reproducción, siendo éste su efecto más característico, desde lo más sensual a lo más espiritual, bueno, aquí nos situaremos en la frontera de este último extremo.

Comenzamos por introducir el cuerpo de los números complejos, la conjugación, los conceptos de módulo y argumento.

Los números complejos

Se llama *número complejo* a todo par ordenado de número reales. El conjunto de los números

[10]email: gcastil@utalca.cl

complejos se designa por $\mathbb{C}$,

$$\mathbb{C} := \{(x, y) \ / \ x, y \in I\!R\}.$$

(El símbolo := se usa para indicar que la igualdad lo es por definición).

Visto como un conjunto sin estructura diríamos que $\mathbb{C} = I\!R^2$.

Para un número complejo $z := (x, y)$, se denomina *parte real* de z , y se anota $Re\, z$, a su primera coordenada; la segunda coordenada se llama *parte imaginaria* de z, y se denota por $Im\, z$; es decir, $Re\, z := x$ e $Im\, z = y$.

Vamos ahora a dotar al conjunto de los números complejos de una estructura algebraica, definiendo en él las operaciones de adición y multiplicación que siguen.

Para dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, se define la suma $z_1 + z_2$, y su producto $z_1 z_2$, respectivamente, por

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad , \quad z_1 z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

No es complicado comprobar que con estas operaciones el conjunto **C** queda dotado de una estructura algebraica denominada cuerpo, el cuerpo de los números complejos.

Se puede observar que el número complejo $(1, 0)$ es el neutro multiplicativo. Si deseamos determinar el inverso multiplicativo del número complejo $(a, b) \neq (0, 0)$, entonces debemos resolver el sistema que resulta de la igualdad $(a, b)(x, y) = (1, 0)$; es decir, de

$$\left.\begin{array}{rcl} ax - by &=& 1 \\ bx + ay &=& 0 \end{array}\right|$$

de donde se obtiene que $x = \frac{a}{a^2+b^2}$, $y = \frac{-b}{a^2+b^2}$. Por lo tanto, el inverso multiplicativo de (a, b) es $(a, b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$.

Debemos aclarar que aunque $\mathbb{C}$ y $I\!R^2$ tengan los mismos elementos, poseen estructuras diferentes. Cuando vemos a $I\!R^2$ pensamos en los pares ordenados como elementos de un espacio vectorial en cambio, al escribir $\mathbb{C}$ como pares ordenados también están provistos de una multiplicación y son elementos del cuerpo complejo.

Los números complejos con parte imaginaria cero, $(x, 0)$, se les denomina *reales puros*; mientras que, aquellos con parte real nula, $(0, y)$, se les llama *imaginarios puros*.

Sabemos que $I\!R$ con las operaciones de adición y multiplicación constituye un cuerpo; ahora si consideramos la función $F : I\!R \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(x) = (x, 0)$, es fácil ver que esta función es inyectiva y conserva las operaciones en el sentido de que

$$\begin{array}{rcl} F(x_1 + x_2) &=& (x_1 + x_2, 0) = (x_1, 0) + (x_2, 0) = F(x_1) + F(x_2) \\ F(x_1x_2) &=& (x_1x_2, 0) = (x_1, 0)(x_2, 0) = F(x_1)F(x_2) \end{array}$$

y, en este caso, se dice que hay un isomorfismo entre el cuerpo de los números reales y el subcuerpo de $\mathbb{C}$ consistente de los números complejos con parte imaginaria cero.

Esto identifica x con $(x, 0)$; convengamos en decir que $x = (x, 0)$ y por tanto $I\!R$ se puede considerar como un subcuerpo de $\mathbb{C}$. Esta identificación trae como consecuencia que, para cada $y \in I\!R$,

$$(0, y) = (0, 1)(y, 0) = (0, 1)y$$

y que

$$(0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

propiedad que jamás satisface un número real (que el cuadrado sea negativo) gracias a la cual el cuerpo complejo es algebraicamente cerrado (algebraicamente cerrado significa que cualquiera ecuación de grado $n \geq 1$ con coeficientes complejos tiene al menos una raíz. El conjunto de los números reales no es algebraicamente cerrado puesto que, por ejemplo, la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución en $I\!R$).

Al número complejo $(0, 1)$ se denomina *unidad imaginaria compleja* y se denota por la letra i, es decir, $i := (0, 1)$.

En términos de la unidad imaginaria, cualquier número complejo (a, b) se puede expresar en la forma

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a + bi$$

que es la notación que usualmente se utiliza cuando se trabaja con números complejos, por ser más manejable desde el punto de vista operacional.

Como en todo cuerpo, se puede restar y dividir números complejos:

$$z - w = z + (-w), \text{ para cada } z, w \in \mathbb{C} \quad ; \quad z \div w = z \cdot w^{-1}, \text{ para cada } z, w \in \mathbb{C},\ z \neq (0, 0).$$

El conjunto $I\!R^2$ dotado de la suma compleja y el producto por números reales, posee la estructura algebraica denominada espacio vectorial real bidimensional y se puede probar que el conjunto $\{(1, 0), (0, 1)\} = \{1, i\}$ constituye una base de este espacio. Por este motivo, se puede identificar $\mathbb{C}$ con los vectores del plano $I\!R^2$ y gracias a esta identificación, a $I\!R^2$ se le acostumbra también denominarlo plano complejo. Los ejes de este plano $y = 0, x = 0$, se llaman *eje real* y *eje imaginario*, respectivamente.

Módulo y Argumento.

El *módulo* de un número complejo $z = (x, y)$ se anota por $|z|$ y es el número real

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

El módulo de z corresponde a la longitud euclídea del vector (x, y).

Si $z = (x, y) \neq (0, 0)$, se denomina *argumento principal* de z que anotaremos por Arg (z) y es el único valor $\theta \in [-\pi, \pi[$ que cumple $\theta = \arctan \frac{y}{x}$.

El ángulo θ es uno de los posibles que forma la parte positiva del eje X y el vector (x, y) medido positivo en sentido antihorario y negativo en sentido horario. Al conjunto de todos estos ángulos se le llama simplemente *argumento* de z y se denota arg (z), es decir,

$$\arg(z) := \{\mathrm{Arg}(z) + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Esta correspondencia se dice multiunívoca ya que posee infinitas determinaciones, el argumento de z está definida como un conjunto, de entre las cuales se llama principal al elemento que toma valores entre $[-\pi, \pi[$.

Cuando $z \neq (0, 0)$, para cada $\theta \in \arg(z)$ se verifica que

$$z = |z| (\cos\theta + i \sin\theta)$$

expresión que corresponde a la *forma polar* del número complejo z.

El par $(|z|, \arg(z))$ son las *coordenadas polares* de z.

Antes de revisar una propiedad del argumento veamos las siguientes definiciones de suma de conjuntos y de la multiplicación de un número complejo por un conjunto: Sean A , B subconjuntos de $\mathbb{C}$ y λ un número complejo, se definen

$$A + B := \{a + b \ : \ a \in A, b \in B\} \quad , \quad \lambda A := \{\lambda a \ : \ a \in A\}.$$

Nótese que, en general, $A + A \neq 2A$; por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$ entonces $A + A = \{2, 3, 4\}$; en cambio, $2A = \{2, 4\}$.

Propiedad del Argumento

Sean $z, w \in \mathbb{C}\backslash\{(0, 0)\}$, entonces el argumento del producto es igual a la suma de argumentos; en símbolos,

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w).$$

Como,

$$\arg(i) = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\},$$

entonces

$$\arg(i) + \arg(i) = \{\pi + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\};$$

en cambio,

$$2\arg(i) = \{\pi + 4k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}, \}$$

o sea,

$$\arg(i) + \arg(i) \neq 2\arg(i).$$

Además, si $z \neq (0, 0)$ entonces

$$\arg(z^2) = \arg(z) + \arg(z)$$

pero ésto no significa que $\arg\,(z^2) = 2\arg\,(z)$, relación que en general es falsa.

Observe también que
$$\text{Arg}\,(i^2) = \text{Arg}\,(-1) = -\pi;$$
mientras que
$$\text{Arg}\,(i) + \text{Arg}\,(i) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$
Esto muestra que no siempre el argumento principal de un producto es igual a la suma de los argumentos principales; es decir, en general

$$\text{Arg}\,(zw) \neq \text{Arg}\,(z) + \text{Arg}\,(w).$$

Ahora probaremos que el argumento de un producto es igual a la suma de los argumentos. Sean $\theta_1 \in \arg\,(z)$ y $\theta_2 \in \arg\,(w)$, entonces

$$\arg\,(z) = \{\theta_1 + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \quad , \quad \arg\,(w) = \{\theta_2 + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= |z||w|(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\theta_1 + \theta_2 \in \arg\,(zw)$. Así:

$$\begin{aligned} \arg\,(zw) &= \{\theta_1 + \theta_2 + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\theta_1 + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} + \{\theta_2 + 2k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \arg\,(z) + \arg\,(w). \end{aligned}$$

La conjugación

Si $z = x + iy$, se denomina *conjugado* de z y se anota $\overline{z}$ al número complejo $\overline{z} := x - iy$. El conjugado de z es el simétrico de z en el plano complejo respecto al eje real X. Si $z \neq (0,0)$ entonces $\overline{z}$ está caracterizado por

$$|\overline{z}| = |z| \quad , \quad \text{Arg}\,(\overline{z}) = -\text{Arg}\,(z).$$

Es simple ver que se cumplen las siguientes propiedades:

1. Para cada $z \in \mathbb{C}$, $Re\,z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ e $Im\,z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
2. Para cada $x \in I\!R$, $\overline{x} = x$.
3. Para cada $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$.
4. Para cada $z, w \in \mathbb{C}$, $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$, además, $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.

Es un buen ejercicio demostrar estas afirmaciones.

También se cumplen las siguientes propiedades que involucran el módulo de un complejo:

1. Para cada $z \in \mathbb{C}$, $|z|^2 = z\overline{z}$.
2. Para cada $z, w \in \mathbb{C}$, $|zw| = |z||w|$ y $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$, siempre que $w \neq (0,0)$.
3. Para cada $z, w \in \mathbb{C}$, $|z+w| \leq |z| + |w|$ y $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

La función exponencial

Si $z = x + iy$, se define e^z por la identidad

$$\mathrm{e}^z := \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y),$$

donde e^x es la exponencial real. De acuerdo con la definición, cuando $y = 0$, $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x$; es decir, la función exponencial compleja definida por $z \longmapsto \mathrm{e}^z$ es una extensión al plano complejo de la exponencial real $x \longmapsto \mathrm{e}^x$.

El siguiente listado, que invitamos a verificar, establece algunas propiedades algebraicas importantes de la función exponencial:

1. Para cada $z, w \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^w$.
2. Para cada $z \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{Re\, z}$. En particular, $|\mathrm{e}^{iy}| = 1$ donde y es un número real.
3. $\mathrm{e}^z = 1$ si y sólo si $z \in 2\pi i\mathbb{Z}$.
4. Para cada $z \neq (0,0)$, $z = |z|\mathrm{e}^{i\arg(z)}$.
5. Para cada $z \in \mathbb{C}$, $(\mathrm{e}^z)^{-1} = \mathrm{e}^{-z}$.
6. Para cada $k \in \mathbb{Z}$ y $z \in \mathbb{C}$, $(\mathrm{e}^z)^k = \mathrm{e}^{kz}$.

Demostraremos esta última aseveración puesto que tiene otra implicancia importante. En efecto, la igualdad es cierta, por definición, para los valores de $k = 0$ y $k = 1$. Ahora, si $k \geq 2$, la propiedad en cuestión es una consecuencia inmediata de (1.) de esta lista, aplicando inducción. La parte (5.) prueba el resultado para $k = -1$. Por último, para $k \leq -2$

$$(\mathrm{e}^z)^k = [(\mathrm{e}^z)^{-1}]^{-k} = (\mathrm{e}^{-z})^{-k} = \mathrm{e}^{(-z)(-k)} = \mathrm{e}^{kz}.$$

Debido a este resultado, para cada $\theta \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{Z}$ se cumple que

$$(\mathrm{e}^{i\theta})^k = (\cos\theta + i\sin\theta)^k = \mathrm{e}^{ik\theta} = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta).$$

La identidad $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos(k\theta) + i\sin(k\theta)$ es conocida como *la fórmula de De Moivre.*

En particular, la igualdad $\mathrm{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ se conoce como la *fórmula de Euler.*

Ahora, si en esta última fórmula reemplazamos $\theta = \pi$, resulta $\mathrm{e}^{i\pi} = -1$, de donde,

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathbf{i}\pi} + \mathbf{1} = \mathbf{0}}$$

Permítanme citar nuevamente a Nietzsche: *el silencio en el que caemos ante lo bello es un profundo esperar, un querer oir las más finas y lejanas tonalidades; nos conducimos como una persona que fuera todo oídos y ojos; la belleza tiene algo que decirnos, por eso guardamos silencio y no pensamos lo que en otra ocasión pensaríamos. Por consiguiente, nuestro silencio, nuestra expectación, nuestra paciencia, es una preparación y nada más. Esto es lo que sucede en toda contemplación.*

Es probable que en la evolución de la matemática en el tiempo, los números: $1, 0, \pi, \mathrm{e}, i$, hayan surgido en ese orden como verdaderos motores del desarrollo de esta ciencia, pero lo más extraordinario de todo es que a una suerte de llamado causal se congreguen en una minúscula fórmula de equilibrada belleza.

Para continuar esta unidad, aprovechemos que la función exponencial está estrechamente ligada con la función logaritmo; por este motivo se va a introducir el logaritmo complejo tal vez una de las nociones que, en este tema, más confunden a los alumnos; se tratará de alumbrar en esa dirección.

Logaritmo complejo

Denotaremos por ln a la función logaritmo natural real; por tanto, por definición, para cada número positivo x, $u := \ln x$ es el único número real que verifica la relación $\mathrm{e}^u = x$.

El logaritmo complejo, que anotamos en estas notas por log, no es una función en el sentido estricto, sino es más bien una correspondencia multiunívoca de modo que, a cada número complejo $z \neq (0,0)$, asocia el conjunto de soluciones w de la ecuación $\mathrm{e}^w = z$; es decir,

$$\log z := \{w \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{e}^w = z\}.$$

Así como el argumento, el logaritmo complejo està definido en tèrminos de un conjunto.

Como la ecuación $\mathrm{e}^w = z$ puede escribirse en la forma

$$\mathrm{e}^{Re\,w}\mathrm{e}^{i\,Im\,w} = |z|\mathrm{e}^{i\arg\,(z)} \qquad (1)$$

Tomando módulo en ambos miembros de la relación (1), resulta

$$e^{Re\,w} = |z|,$$

de donde se obtiene, aplicando logaritmo natural real, que

$$Re\,w = \ln |z|.$$

Ahora, si ambos miembros de (1) es dividido por $|z|$, Obtenemos que

$$e^{iIm\,w} = e^{i\arg\,(z)},$$

igualdad que se verifica si y sólo si la parte imaginaria de z está en el argumento de z. Por tanto, el logaritmo complejo

$$\log z = \ln |z| + i \arg\,(z).$$

A modo de ejemplo, vamos a calcular el logaritmo de los números complejos $z_1 = -1 + i$, $z_2 = i$ y $z_3 = -1$.

- Como $|z_1| = \sqrt{2}$ y $\arctan \frac{+1}{-1} = \frac{3\pi}{4} = \text{Arg}\,(-1+i)$, entonces

$$\arg\,(-1+i) = \left\{ \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right) i \;:\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Por consiguiente,

$$\log(-1+i) = \ln \sqrt{2} + \left\{ \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right) i \;:\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- Como $|z_2| = |i| = 1$ y $\arg\,(i) = \{(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)i \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$, por tanto

$$\log(i) = \ln 1 + \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) i \;:\; k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) i \;:\; k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

- Como $|z_3| = |-1| = 1$ y $\arg\,(-1) = \{-\pi + 2k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$, entonces

$$\log(-1) = \{(2k-1)\pi i \;:\; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Obsérvese que

$$\log i + \log i = \{(2k-1)\pi i \;:\; k \in \mathbb{Z}\};$$

en cambio,

$$2\log i = \{(1+4k)\pi i \;:\; k \in \mathbb{Z}\};$$

es decir,

$$2\log i \neq \log i + \log i;$$

no obstante,

$$\log i^2 = \log i + \log i.$$

El logaritmo complejo debe ser considerado como una correspondencia multiunívoca, a menos que se fije una determinación del argumento, en cuyo caso, se transforma en una función. Llamaremos *logaritmo principal* y se denotará por Log aquel valor del del logaritmo complejo en que sólo se considera el argumento principal; o sea,

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg}\,(z)\ ,\ z \neq (0,0).$$

De acuerdo con lo anterior,

$$\operatorname{Log}(-1+i) = \ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}\,i \quad , \quad \operatorname{Log}(i) = \frac{\pi}{2}\,i \quad , \quad \operatorname{Log}(-1) = -\pi i.$$

Nótese que si x es un número real positivo, entonces $\operatorname{Log} x = \ln x$ y, en particular, $\operatorname{Log}|z| = \ln|z|$; es decir, la función logaritmo principal, Log, es una extensión al conjunto de los números complejos menos el $(0,0)$ del logaritmo natural real ln.

El siguiente resultado establece las principales propiedades del logaritmo complejo log.

Para cada z, w números complejos distintos de $(0,0)$, se cumple que

$$\text{(a)}\ \log(zw) = \log z + logw \quad ; \quad \text{(b)}\ \log\left(\frac{z}{w}\right) = \log z - \log w.$$

Demostración caso (a):

$$\begin{aligned} \log(zw) &= \ln|zw| + i \arg\,(zw) \\ &= \ln|z| + \ln|w| + i\arg\,(z) + i\arg\,(w) \\ &= \log z + \log w. \end{aligned}$$

Exponenciales complejas

Si A es un subconjunto del conjunto de los números complejos, denotaremos por e^A al conjunto

$$\mathrm{e}^A := \{\mathrm{e}^a \ :\ a \in A\}.$$

Para cada z, c, $z \neq (0,0)$, números complejos, se define z^c como el conjunto de números complejos

$$z^c := \mathrm{e}^{c\log z} = \mathrm{e}^{c(\operatorname{Log}|z| + i\arg\,(z))}.$$

Así, por ejemplo,

$$i^i = \mathrm{e}^{i\log i} = \{\mathrm{e}^{i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)i}\ :\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\mathrm{e}^{-\pi(\frac{1}{2}+2k)}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Al igual que con el logaritmo complejo, $z \longmapsto z^c$ y $c \longmapsto z^c$ son correspondencias multiunívocas. Se denomina *determinación principal* de z^c y se anota $DP(z^c)$, a la función

$$DP(z^c) := \mathrm{e}^{c\operatorname{Log} z} = \mathrm{e}^{c(\ln|z| + i\operatorname{Arg}\,(z))}$$

De acuerdo con esta definición

$$DP(i^i) = \mathrm{e}^{i\,\mathrm{Log}\, i} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Para finalizar revisaremos la raíz n-ésima de un número complejo.

Raíz n-ésima de un número complejo

Si $z \neq (0,0)$ es un número complejo, según la definición, $z^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\log z}$; no obstante,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\log z &= \frac{1}{n}\{\mathrm{Log}|z| + i(\mathrm{Arg}\ (z) + 2k\pi)\ :\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \left\{\mathrm{Log}|z|^{\frac{1}{n}} + \frac{i\,\mathrm{Arg}\ (z) + 2k\pi}{n}\ :\ k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{n}} &= \{\mathrm{e}^{\mathrm{Log}\,|z|^{1/n} + i\left(\frac{\mathrm{Arg}\,(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}\ :\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= |z|^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\frac{i\,\mathrm{Arg}\,(z)}{n}}\ \{\mathrm{e}^{\frac{2k\pi i}{n}}\ :\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= |z|^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{\frac{i\,\mathrm{Arg}\,(z)}{n}}\ \{\mathrm{e}^{\frac{2k\pi i}{n}}\ : 0 \leq k \leq n-1\}. \end{aligned}$$

A cada uno de estos números se denomina *raíz* n-ésima de z.

Si llamamos $z_0 := |z|^{\frac{1}{n}}\,\mathrm{e}^{\frac{i\,\mathrm{Arg}\,(z)}{n}}$, $\quad w_k = w_{k-1}\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}}$, para $1 \leq k \leq n-1$, entonces

$$z^{\frac{1}{n}} = \{w_k\ :\ 0 \leq k \leq n-1\}.$$

Por consiguiente, todas las raíces n-ésimas del número complejo z están en una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $|z|^{\frac{1}{n}}$. El número complejo w_0 está en esta circunferencia con argumento $\frac{\mathrm{Arg}\ (z)}{n}$ y cada una de las restantes $(n-1)$ raíces de z se obtienen incrementando el argumento de w_0 por la cantidad fija $\frac{2\pi}{n}$.

Finalizamos el tema calculando las raíces quinta del número complejo $4+4i$.

Si $z = (4+4i)^{\frac{1}{5}}$, entonces el módulo de z es $\sqrt{32}$ y el argumento es $\frac{\pi}{4}$ puesto que $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Así,

$$\begin{aligned} w_0 &= (\sqrt{32})^{\frac{1}{5}}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{20}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{20}}, \\ w_1 &= w_0\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{5}} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{20}}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{5}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{9\pi i}{20}}, \\ w_2 &= w_1\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{5}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{9\pi i}{20}}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi i}{5}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{17\pi i}{20}}, \\ w_3 &= w_2\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{5}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{17\pi i}{20}}\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{5}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{25\pi i}{20}}, \\ w_4 &= w_3\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{5}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{25\pi i}{20}}\,\mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{5}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{33\pi i}{20}}. \end{aligned}$$

Las raíces quintas del número complejo $4+4i$ son los vértices de un pentágono regular inscrito en la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio $\sqrt{2}$.

ANEXO

Si se desea saber como están sus conocimientos sobre números complejos:

1. Determine el conjunto con todas las soluciones de la ecuación $\overline{z}=z^2$.
   Respuesta: $\left\{(0,0),\ (1,0),\ (-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}),\ (-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})\right\}$.
2. Determine el módulo, argumento principal y argumentos de $z=\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}$.
   Respuesta: $2,\ -\frac{\pi}{3},\ \{-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ :\ k\in\mathbb{Z}\}$, respectivamente.
3. Calcule el logaritmo principal y el logaritmo complejo de $z=-1+\sqrt{3}i$. Además, calcule el logaritmo complejo del número e.
   Respuesta: $\operatorname{Log} z=\ln|z|+\frac{2\pi}{3}i$, $\log z=\{\ln|z|+i\left(\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right):k\in\mathbb{Z}\}$,
   $\log \mathrm{e}=\{1+2k\pi:k\in\mathbb{Z}\}$, respectivamente.
4. Resuelva sobre el cuerpo de los números complejos las siguientes ecuaciones:
   (a) $\mathrm{e}^z=-1$, (b) $\mathrm{e}^z=1+\sqrt{3}i$.
   Respuesta: (a) $\{\pi(2k-1)i\ :\ k\in\mathbb{Z}\}$; (b) $\{\ln 2+\pi(2k+\frac{1}{3})i\ :\ k\in\mathbb{Z}\}$.
5. Calcule las raíces cuartas del número complejo $z=-1$ y las raíces cúbicas del número $w=1-\sqrt{3}i$.
   Respuesta: Raíces cuartas de z: $\mathrm{e}^{-\pi i},\ \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{4}},\ \mathrm{e}^{\frac{3\pi i}{4}},\ \mathrm{e}^{\frac{5\pi i}{4}}$. Raíces cúbicas de w: $\mathrm{e}^{-\frac{\pi i}{3}},\ \mathrm{e}^{\frac{\pi i}{3}},\ \mathrm{e}^{\pi i}$.
6. Calcule $(1+i)^i$ y también su parte principal.
   Respuesta: $\mathrm{e}^{i\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}}\{\mathrm{e}^{-2k\pi}\ :\ k\in\mathbb{Z}\}$ y $\mathrm{e}^{i\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}}$, respectivamente.
7. Determine la parte real de $\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$, en términos de las coordenadas cartesianas.
   Respuesta: $\mathrm{e}^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2}$.
8. Compruebe que $\operatorname{Log}(1+i)^2=2\operatorname{Log}(1+i)$; mientras que $\operatorname{Log}(-1+i)^2\neq 2\operatorname{Log}(-1+i)$.
9. Pruebe que, para cada $z\in\mathbb{C}$, $|Re\,z|+|\Im\,z|\leq\sqrt{2}|z|$.
10. Represente en el plano cartesiano los conjuntos siguientes:
    $$(a)\ \{z\in\mathbb{C}\ :\ |2z-1+i|=2\}\quad;\quad(b)\ \{z\in\mathbb{C}\ :\ Re\,(\overline{z}-i)=2\}.$$
11. Pruebe que si $|z|<1$, entonces $|Im\,z(1-\overline{z}+z^2)|<3$.
12. Pruebe que $\log\left(z^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{n}\log z$.