Sumas infinitas de progresiones geométricas[1]

Introducción.
Cuando sumamos, siempre sumamos una cantidad finita de términos. En muchos problemas interesantes es necesario sumar una cantidad *infinita* de términos. Una suma de infinitos términos, en matemática recibe el nombre de *serie*. Las series son un tema bastante delicado en matemática. En esta sección se trabaja solamente una serie especial: *la serie geométrica*. Se llama serie geométrica a la serie que tiene la siguiente forma:

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots \qquad \textbf{(*)}$$

donde r es un número real, llamado razón de la serie.

Actividad 1:

Encontrar valores de la razón r, de modo que:

a) La suma infinita **(*)** claramente exista, es decir, que la suma sea igual a un número.
b) La suma infinita **(*)** claramente NO exista.

Actividad 2:

Encontrar una fórmula reducida para la suma de los n primeros términos de la serie geométrica **(*)**.

Actividad 3:

Dada la serie geométrica (de razón $1/2$):

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots \qquad \textbf{(**)}$$

a) Calcular: la suma de los 5 primeros términos; la suma de los 10 primeros, la suma de los 100 primeros, la suma de los 1000 primeros.
b) En base a los cálculos precedentes, ¿cuál sería el valor de la serie geométrica (**)?.
c) Tomar un segmento de 2cm de longitud. Dividirlo en dos partes iguales. Tomar una de estas partes y dividirla nuevamente en dos partes iguales. Y así sucesivamente. Sumar las longitudes de todas las partes en las cuales ha quedado dividido el segmento original.
d) Comprobar el resultado precedente, usando el resultado comentado en la siguiente observación.

[1] Estos problemas son algunas actividades trabajadas en los *Talleres sobre Resolución de Problemas*, que nuestro Instituto desarrolla con estudiantes de enseñanza media.

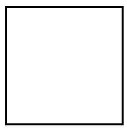
Observación: En lo que sigue se puede usar el siguiente resultado:

Si la razón r de una serie geométrica cumple que $-1 < r < 1$, entonces la serie (*) existe y su valor igual a $\frac{1}{1-r}$. Es decir, cuando $-1 < r < 1$:

$$1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots = \frac{1}{1-r}$$

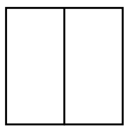
Actividad 4:

Considerar un cuadrado de lado 1:

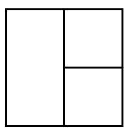


Realizar los siguientes pasos:

Paso 1: Dividirlo en dos partes iguales de la siguiente manera:



Paso 2: Tomar una de las mitades obtenidas y dividirla, de la misma manera, en dos partes iguales. La figura quedaría así:



Y así sucesivamente.

Encontrar las suma de las áreas de todos los rectángulos en los cuales ha quedado dividido, siguiendo el procedimiento anterior, el cuadrado original.

Actividad 5:

Se deja caer una pelota desde 5 metros de altura. Suponiendo que en cada rebote la pelota alcanza una altura igual a 3/5 de la altura desde la cual cae, determinar el camino total recorrido por la pelota.

Actividad 6:

Dado un cuadrado de 1 m. de lado, unimos dos a dos los puntos medios de sus lados; se obtiene un nuevo cuadrado, en el que se vuelve a efectuar la misma operación, y así sucesivamente. Halla la suma de las áreas de *todos* los cuadrados obtenidos.

Actividad 7:

Sobre un segmento L de longitud 1 se realiza la siguiente secuencia de operaciones:

Paso 1: Se divide el segmento L en 3 partes iguales y se quita el tercio del medio. Quedan así 2 intervalos más pequeños: L_{11} y L_{12}.

Paso 2: Ahora, a cada uno de los intervalos que quedan, L_{11} y L_{12}, se les realiza la misma operación, es decir, cada uno de ellos se divide en 3 partes iguales y se les quita el tercio del medio. Nos quedan así 4 intervalos más pequeños. **Y así sucesivamente.**
La siguiente figura ilustra los 4 primeros pasos de la secuencia recién señalada.

Calcular las suma de las longitudes de TODOS los segmentos que se quitan, mediante este proceso, al segmento L.