

## Aplicaciones de la Sucesión de Fibonacci y la razón Áurea

Mauricio Vargas Contreras<sup>3</sup>

### Preliminares

Como se sabe la sucesión de Fibonacci<sup>2</sup> se la debemos al matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), más conocido como Fibonacci. Esta sucesión tiene su origen en la solución del siguiente problema:

*"En un corral, se coloca una pareja de conejos, recién nacidos, para ver cuántos descendientes produce en el curso de un año, y suponiendo que cada mes a partir del segundo mes de su vida, cada pareja de conejos da origen a una nueva pareja"*

Convencionalmente, se utilizan los números 1, 1 como comienzo de la secuencia, formando la siguiente sucesión:

**1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...**

la cual en su forma general, se escribe:

$$f_1 = f_2 = 1$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ para todo } n \geq 3,$$

Al realizar el cociente entre términos sucesivos  $1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, \dots$  tiende muy rápidamente a la **razón áurea**. De hecho, el valor "exacto" de ella (a cinco decimales) es  $\phi = 1,61803$ , y el cociente  $34/21 = 1,61905$ .

La "serie áurea",  $1, \phi, 1+\phi, 1+2\phi, 2+3\phi, 3+5\phi, \dots$ , tiene la propiedad notable de ser –a la vez– una secuencia de Fibonacci y una serie geométrica cuya razón es  $\phi$ .

### Los números de Fibonacci en la naturaleza

La sucesión de Fibonacci no solo sorprende a matemáticos, sino también a biólogos.

<sup>3</sup> Ingeniero Mecánico (c), e-mail: mvargas@utalca.cl

<sup>2</sup> (Fibonacci es una contracción de *filius Bonacci* = hijo de Bonacci) ya que su padre se llamaba, Guglielmo Bonacci

De acuerdo a lo que se enseña en filotaxia (una rama de la botánica), las ramas y las hojas de las plantas se distribuyen buscando siempre recibir el máximo de luz para cada una de ellas. Por eso ninguna hoja nace justo en la vertical de la anterior. La distribución de las hojas alrededor del tallo de las plantas se produce siguiendo secuencias basadas exclusivamente en estos números.

El número de espirales en numerosas flores y frutos también se ajusta a parejas consecutivas de términos de esta sucesión: los girasoles tienen 55 espirales en un sentido y 89 en el otro, o bien 89 y 144.

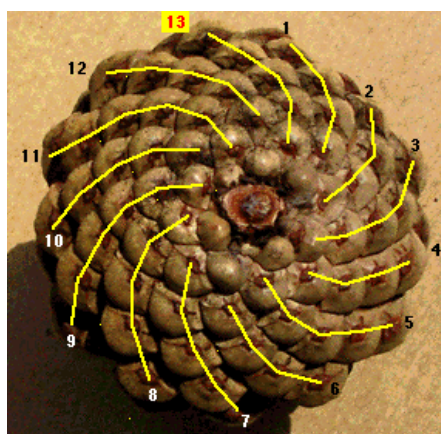
Las margaritas presentan las semillas en forma de 21 y 34 espirales.

Y cualquier variedad de piña presenta siempre un número de espirales que coincide con dos términos de la sucesión de los conejos de Fibonacci, 8 y 13; o 5 y 8.

Parece que el mundo vegetal tenga programado en sus códigos genéticos del crecimiento los términos de la sucesión de Fibonacci.



Una espiral, que de forma bastante ajustada, está presente en el crecimiento de las conchas de los moluscos, en los cuernos de los rumiantes... Es decir, la espiral del crecimiento y la forma del reino animal.



*De acuerdo a todas estas aplicaciones en la naturaleza muchos biólogos y matemáticos, piensan que Fibonacci sin pretenderlo habría hallado la llave del crecimiento en la naturaleza.*

### Fundamentos Fibonacci en su aplicación a los mercados accionarios

La sucesión de Fibonacci juega un rol preponderante en el análisis de los factores psicológicos de los participantes del mercado accionario, en el sentido de que estos se dejan llevar por el comportamiento de las masas y así van repitiendo las mismas conductas y errores de

un periodo a otro. Lo anterior, al repetirse en innumerables ocasiones va dando formas a los mercados, lo que genera ciclos al interior de éste.

Así Fibonacci a través de sus números dorado 0.618 y 1.618 trata de anticiparse a esos ciclos prediciendo precios objetivos y días clave de cambio de tendencia.

### Fibonacci precio

Esta herramienta basada en los conceptos de Elliott Wave y en los números dorados de Fibonacci 0.618 y 1.618. La idea central de ésta es predecir precios objetivos en función de la amplitud del impulso principal (onda1) y entrar al mercado en la corrección correspondiente (38%,50%,62% o 100%, relacionadas con la serie de Fibonacci), que equivale a un porcentaje del impulso principal.

Esto se observa en el gráfico de la empresa americana del sector Semiconductores Capital Equipment, Kulicke & Soffa.



### Fibonacci Tiempo

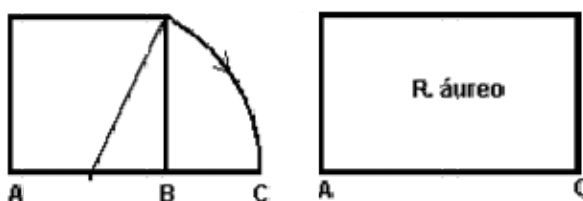
Esta herramienta tiene como finalidad la predicción de días claves de cambio de tendencia o TGD's (Time Goal Days) a través de la identificación de puntos extremos dentro de los ciclos de las acciones, los cuales pueden ser máximos o mínimos respectivamente. Así mediante la aplicación del radio de Fibonacci 1.618 se predicen los días críticos en los cuales el precio debiera revertir su tendencia.

La idea principal de la utilización de ambas herramientas de Fibonacci es aprovechar los ciclos intermedios de las acciones, especialmente los movimientos secundarios y diarios. Así la utilización de estas debiera tener mejores resultados en mercados con tendencias marcadas en los cuales no exista una excesiva volatilidad, ni por el contrario mercados con pocas fluctuaciones de precios, convirtiéndose en una excelente herramienta de transacción para cualquier inversionista de corto plazo que basa su toma de decisiones en herramientas del análisis técnico.

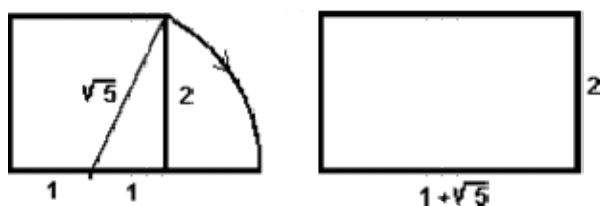
### Rectángulo áureo

Un rectángulo áureo es un rectángulo armónico en sus proporciones, de los cuales podemos generar con los siguientes pasos:

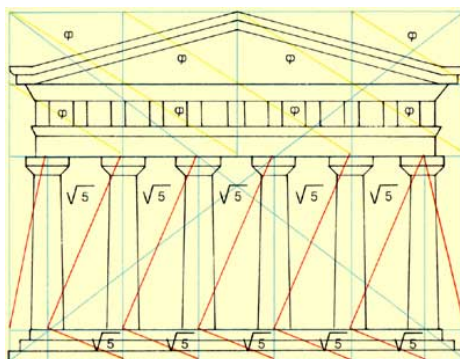
- Dibujar un cuadrado y marcar el punto medio de uno de sus lados.
- Después se une con uno de los vértices del lado opuesto y llevamos esta distancia sobre el lado inicial, de esta manera obtenemos el lado mayor del rectángulo.



- Si el lado del cuadrado vale 2 unidades, es claro que el lado mayor del rectángulo vale 1 más la raíz de 5, por lo que la proporción entre los lados es 1 más la raíz de 5 todo ello dividido entre 2:

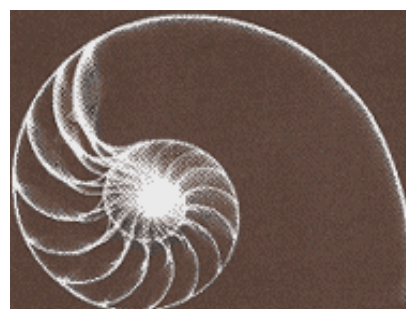
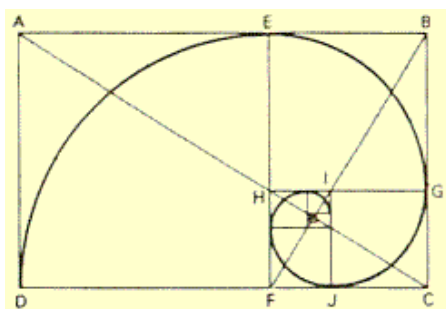


Obtenemos así un rectángulo cuyos lados están en proporción áurea. A partir de este rectángulo podemos construir otros semejantes que, como veremos mas adelante, se han utilizado en arquitectura (Partenón, pirámides egipcias) y diseño (tarjetas de crédito, banderas, carnets, cajetillas de tabaco, etc...).



### La espiga logarítmica

Si tomamos un rectángulo áureo ABCD y le sustraemos el cuadrado AEFD cuyo lado es el lado menor AD del rectángulo, resulta que el rectángulo EBCF es áureo. Si después a éste le quitamos el cuadrado EBGH, el rectángulo resultante HGCF también es áureo. Este proceso se puede reproducir indefinidamente, obteniéndose una sucesión de rectángulos áureos encajados que convergen hacia el vértice O de una espiral logarítmica.



Esta curva ha cautivado, por su belleza y propiedades, la atención de matemáticos, artistas y naturalistas. Se le llama también espiral equiangular (el ángulo de corte del radio vector con la curva es constante) o espiral geométrica (el radio vector crece en progresión geométrica mientras el ángulo polar decrece en progresión aritmética). J. Bernoulli, fascinado por sus encantos, la llamó *spira mirabilis*, rogando que fuera grabada en su tumba.

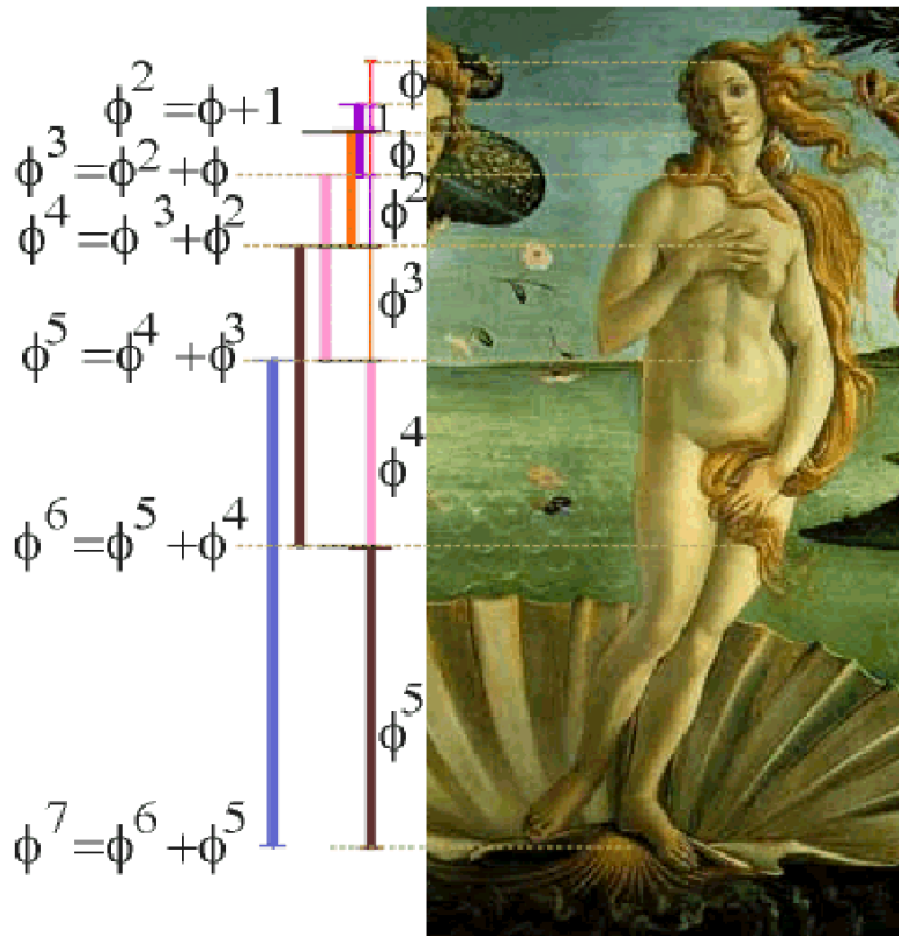
La espiral logarítmica vinculada a los rectángulos áureos gobierna el crecimiento armónico de muchas formas vegetales (flores y frutos) y animales (conchas de moluscos), aquellas en las que la forma se mantienen invariante. El ejemplo más visualmente representativo es la concha del nautilus.

### En el cuerpo humano

El canon más antiguo conocido (3,000 A. de C.) acerca de las proporciones del cuerpo humano se encontró en una tumba de las pirámides de Menfis, por lo que, podemos concluir que

desde esos tiempos hasta nuestros días, el estudio de las proporciones del cuerpo humano es un tópico de interés tanto para los artistas como para los científicos.

Los artistas del renacimiento relacionaron la razón áurea con las partes del cuerpo humano, por ejemplo, la Venus de Botticelli fue subdividida por Theodore Cook en una sucesión de potencias de la razón áurea  $\phi$ .



Por ejemplo:

$$\frac{\text{del ombligo a la parte superior de la cabeza}}{\text{del ombligo a los pies}} = \frac{\phi^5}{(\phi^4 + \phi^5)} = \frac{\phi^5}{\phi^6} = \frac{1}{\phi}$$

Lo cual es cercano al valor promedio de esta proporción en un adulto.

Leonardo Da Vinci realiza un estudio de las proporciones del cuerpo humano, y en su inquietud por establecer el canon perfecto del cuerpo humano, así como su relación con las

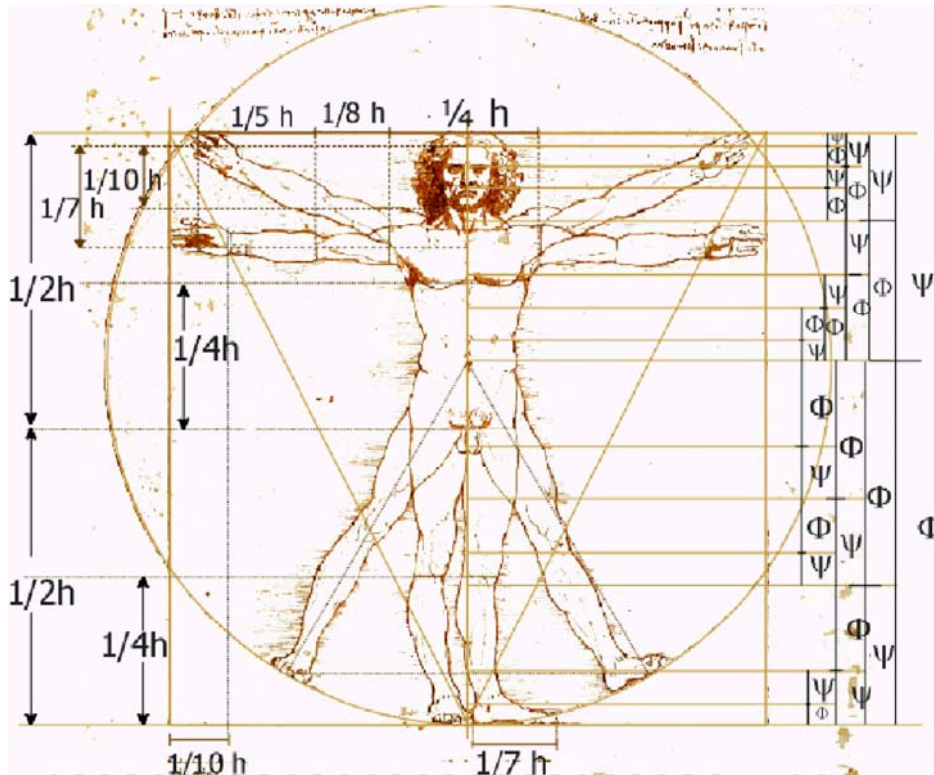
formas geométricas más simples y perfectas realiza su dibujo sobre el Homo Cuadratus el cual es la traslación de las medidas perfectas en un ser humano ideal, que puede inscribirse tanto en un círculo como en un cuadrado.

Tanto el círculo como el cuadrado eran figuras relacionadas con la divinidad, puesto que se consideraban las más exactas y perfectas, por la correspondencia de sus partes con el todo, y entre sí.

Leonardo nos explica en su Tratado de Pintura [DV. Proporciones y movimientos del cuerpo humano, Pág. 286], que:

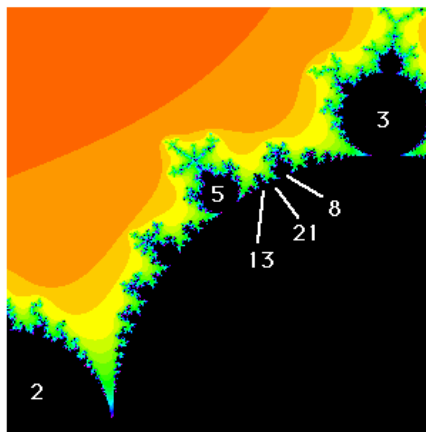
*La longitud de los brazos extendidos de un hombre es igual a su altura. Desde la raíz de los cabellos hasta la sotabarba tenemos 1/10 de la altura del hombre; desde la sotabarba hasta el extremo superior de la cabeza, 1/6 del hombre; desde el extremo superior del pecho hasta la raíz de los cabellos, 1/7 de todo el hombre; desde las tetillas hasta el extremo superior de la cabeza, 1/4 del hombre. La anchura máxima de los hombros contiene en sí 1/4 del hombre; desde el codo hasta la punta de la mano 1/5 del hombre; desde ese mismo codo hasta el término del hombro, 1/8 de ese hombre. Toda la mano es 1/10 del hombre; el miembro viril nace del centro del hombre; el pie es 1/7 del hombre; desde la planta del pie hasta la parte inferior de la rodilla tenemos 1/4 del hombre; desde la parte inferior de la rodilla hasta la base del miembro, 1/4 del hombre. Los espacios comprendidos entre el mentón y la nariz y entre la raíz de los cabellos y el entrecejo son iguales y equivalen a la oreja, a saber 1/3 del rostro. (Lado izquierdo de la siguiente figura.)*

Partiendo de la divisibilidad del cuerpo humano en proporción armónica, el arquitecto francés Le Corbusier desarrolló su teoría de las proporciones en la construcción. Marcó tres intervalos en el cuerpo que, como descubrió Fibonacci, forman una serie armónica. Los extremos y puntos de división son el pie, el plexo solar, la cabeza y las puntas de los dedos con el brazo en alto. Basándonos nuevamente en el Homo Cuadratus mostramos, del lado derecho de la figura anterior, la relación que hay entre el cuerpo humano y la razón áurea.



**En un Fractal.**

Las ideas en la sección anterior permiten que demostremos la presencia de la secuencia de Fibonacci en el sistema de Mandelbrot. Olvídense para el momento sobre los números de la rotación y concéntrese solamente en los períodos de los bulbos (los denominadores). Llame el cusp del cardioide principal “el” del bulbo del período 1. Ahora el bulbo más grande entre el bulbo del período 1 y del período 2 es el bulbo del período 3, en la tapa o el fondo del sistema de Mandelbrot. El bulbo más grande entre el período 2 y 3 es el período 5. Y el bulbo más grande entre 5 y 3 es 8, y así sucesivamente. La secuencia generada (1, 2, 3, 5, 8, 13...) es, por supuesto,

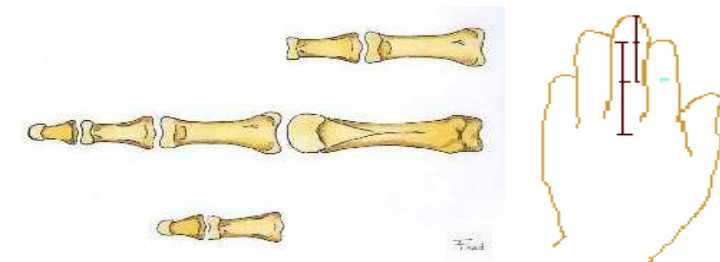




esencialmente la secuencia de Fibonacci.

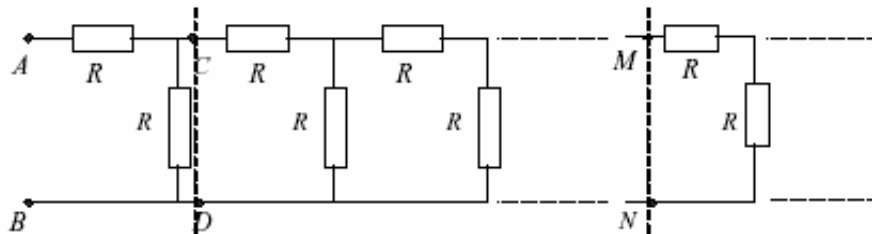
**En la mano humana**

En la mano humana, es también, una serie de Fibonacci; ya que la longitud entre las falanges están en la razón áurea de la longitud del dedo.

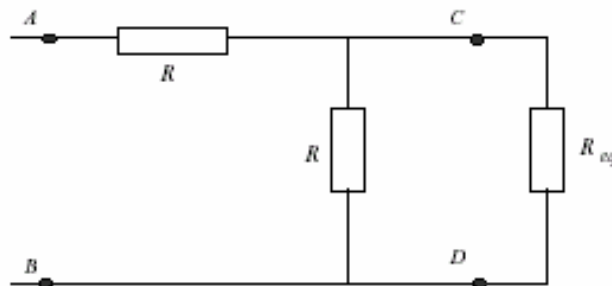


**El problema de la escalera semi-infinita**

Este es uno de los problemas más llamativos en los textos de física universitaria. Consiste en calcular la resistencia equivalente de un conjunto de resistencias iguales  $R$  dispuestas en una “escalera” semi-infinita:



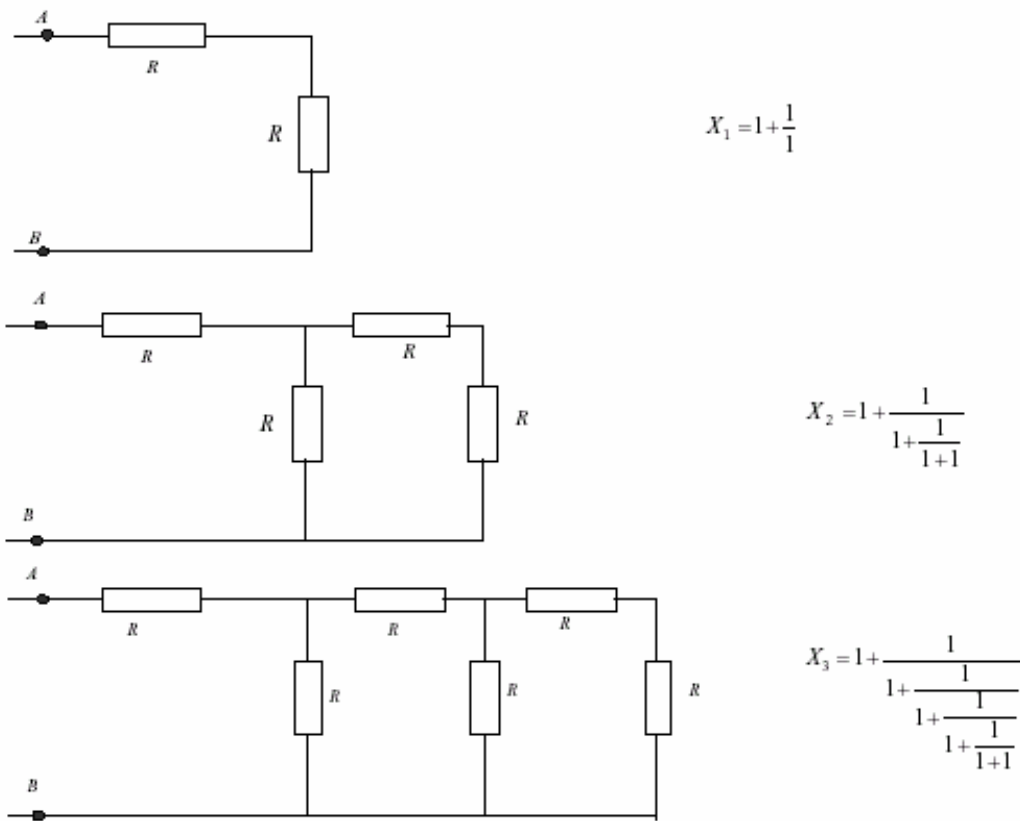
La manera estándar de resolver este problema es examinar el circuito (hacia el infinito) haciendo un corte en CD, observando que el circuito sigue siendo semi-infinito y, por lo tanto, su resistencia equivalente es la misma que originalmente se quería calcular. En otras palabras, tenemos el siguiente circuito:



De acuerdo a las reglas para combinar resistencias en serie y en paralelo, se establece la ecuación:

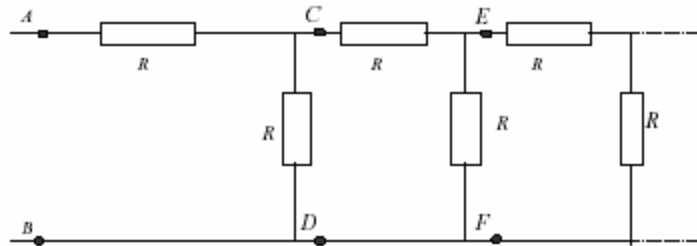
$$R_{eq}^2 - RR_{eq} - R^2 = 0, \text{ cuya solución es, } R_{eq} = \phi R, \text{ siendo } \phi \text{ la razón áurea.}$$

Otra manera de considerar el problema consiste en analizar el comportamiento de la escalera con un peldaño, dos peldaños, etc., e intentar predecir lo que pasa cuando se tiene un número infinito de peldaños. Si llamamos  $X$  a la resistencia equivalente adimensional, obtenemos, para uno, dos y tres peldaños:

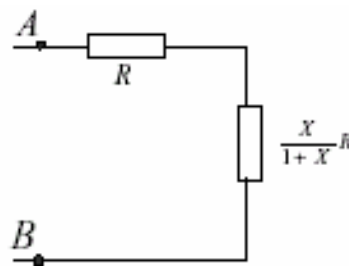


Calculando:  $X_1 = 2/1$ ;  $X_2 = 5/3$  y  $X_3 = 13/8$ . Estas fracciones corresponden a cuocientes entre números consecutivos de la secuencia de Fibonacci. Continuando con este procedimiento, agregando peldaños, se llega al resultado  $X_\infty = \phi$ , que obviamente coincide con lo obtenido previamente.

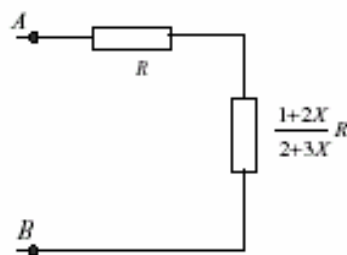
Otra pregunta pertinente es, ¿Qué pasa si se resuelve el problema con el método estándar pero en lugar de cortar el circuito en CD, se lo corta en uno cualquiera de los peldaños? (como el corte MN indicado en la primera figura de esta nota).



Para contestar esta pregunta procederemos por pasos. Al cortar en CD, hacemos igual a  $R_{eq}$  la serie semi-infinita de resistencias hacia la derecha de la figura. Así obtenemos para el circuito equivalente el valor indicado en la figura adjunta (usando nuevamente  $X = R / R_{eq}$ ).



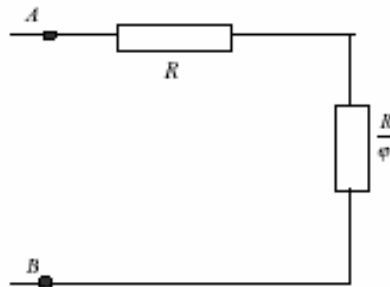
Si cortamos en el segundo peldaño (EF) y nuevamente hacemos igual a  $R_{eq}$  la serie semi-infinita de resistencias hacia la derecha, tenemos el resultado que aparece en la figura siguiente:



Continuando con este procedimiento, aparecen en serie con la primera resistencia R los cocientes:

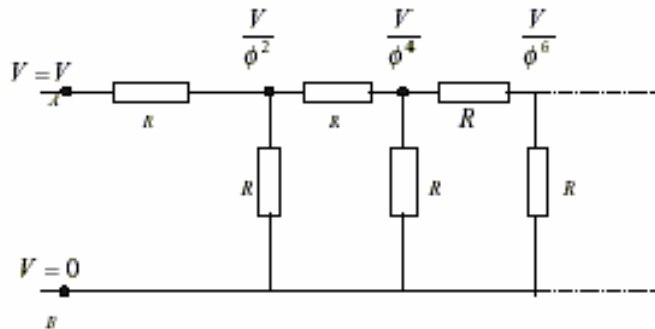
$$\frac{X}{1+X}, \frac{1+2X}{2+3X}, \frac{3+5X}{5+8X}, \dots$$

que son razones entre términos consecutivos de la serie áurea y por lo tanto su valor invariante es la sección áurea,  $\phi$ . Es decir, cualquiera que sea en número de eslabones considerados, se obtiene finalmente:

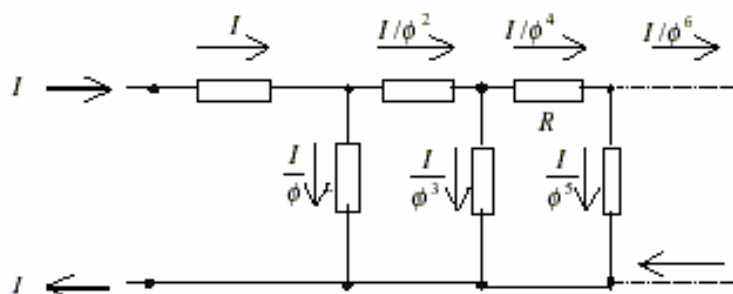


Con el resultado final que la resistencia equivalente es  $\phi R$ .

Finalmente se pueden calcular los voltajes y las corrientes en todas las ramas de la escalera. Si el voltaje de entrada es  $V$  y el punto B está a tierra, la serie de voltajes se muestra en la figura, resultando una serie geométrica de razón  $\frac{1}{\phi^2}$ :



Si llamamos  $I$  a la corriente de entrada  $\left( I = \frac{V}{\phi R} \right)$ , las corrientes en las distintas ramas de la escalera se pueden determinar fácilmente, resultando nuevamente series geométricas de razón  $\frac{1}{\phi^2}$



El lector puede comprobar que  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\phi^{2i+1}} = 1$ , con lo cual (correctamente) se verifica que la corriente de entrada es igual a la de salida.

Resulta curioso que la razón áurea, un concepto introducido por los geómetras griegos, y asociado generalmente a criterios de belleza y/o armonía (el texto citado de Huntley, tiene como subtítulo “Un Estudio de la Belleza Matemática”), aparezca en este problema de divisor de voltaje o atenuador como se le denomina en el lenguaje de los circuitos eléctricos.

**Bibliografía**

- [1] *Fibonacci Numbers and the Golden Section*  
<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>
- [2] E.M. Purcell, *Electricity and Magnetism*, 2ªed, McGraw-Hill, 1985.
- [3] *Los trucos de Fibonacci*  
[http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act\\_permanentes/mate/mate3q.htm](http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/mate3q.htm)
- [4] G.H. Ardy and E.M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford Science Publications, 1979.
- [5] G. Nicolás Rodrigo et al. *Fisiología Vegetal*, Quinta Edición, Ediciones pirámide.
- [6] M. Alonso y E. Finn, *Fundamental University Physics*, Vol. 2, Addison-Wesley, 1967.
- [7] C.H.Wörner, *La razón áurea y una escalera semi-infinita de resistencias*, Instituto de Física, Pontífice Universidad Católica de Valparaíso.

