¿Función *coseno*, la derivada de la función *seno*?

Marco Antonio Barrales[1]

Colegio Alemán de Concepción, Concepción

INTRODUCCIÓN

Uno de los conceptos más importantes en matemática, principalmente en cálculo diferencial es el de la derivada de una función, lamentablemente no siempre nuestros alumnos asimilan correctamente dicho concepto, ya que la introducción realizada no es enfocada desde un punto de vista geométrico y los alumnos sólo se quedan con la mecánica del proceso. Su significado geométrico nos permite conceptualizar y comprender con claridad el concepto. Lo cual nos permitiría un trabajo más fructífero en la aplicación de la derivada a problemas reales.

El siguiente trabajo pretende lograr el aprendizaje de este concepto utilizando para ello un problema geométrico. Para lo cual construiremos en forma geométrica la gráfica de la función seno en la aplicación Cabri Geometry en la Voyage™ 200, luego utilizando el concepto de derivada en base a la tangente en un punto de la gráfica obtendremos la función coseno. Con lo cual probaremos que la derivada de la función seno es la función coseno.

Concepto de la derivada

Si se da un incremento h a la variable real x, (es decir, si x pasa de $x = x_0$ a $x = x_0 + h$), la función $y = f(x)$ se verá incrementada en $y = f(x_0 + h) - f(x_0)$ a partir del valor $y = f(x_0)$.

El cuociente $\dfrac{incremento\, de\, y}{incremento\, de\, x}$, recibe el nombre de cuociente medio de incrementos de la función en el intervalo comprendido entre x_0 y $x_0 + h$.

Pendiente de una recta que pasa por dos puntos.

Si $h \neq 0$ y $h \in IR^+$, entonces los dos puntos distintos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ determinan, como en la figura 1, una recta (secante) cuya pendiente es $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

[1] e-mail: mbarrale@dsc.cl

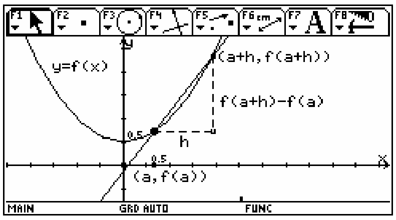


Figura 1

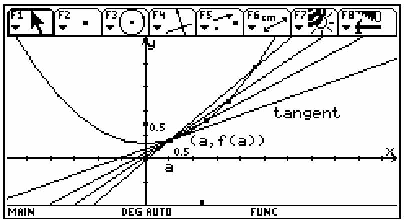


Figura 2

Como indica la figura 2, la recta tangente en (a, $f(a)$) es la posición límite de las rectas secantes, cuando h se aproxima a 0. La pendiente de la tangente (a, $f(a)$) es: $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Definición

La función f es derivable en el punto a si $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe. Es la pendiente de la recta tangente en $(a,f(a))$.

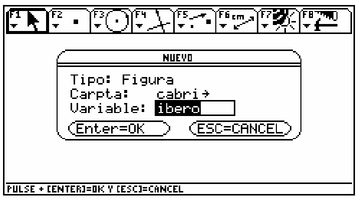
En este caso el límite se designa por $f\,'(a)$ y recibe el nombre de derivada de f en a. (Decimos también que f es derivable si f es derivable en a para todo a del dominio de f).

Definimos la tangente a la gráfica de f en $(a,\ f(a))$ como la recta posición límite de las rectas secantes, que pasa por $(a,\ f(a))$ e implica que el valor de su pendiente es $f\,'(a)$.

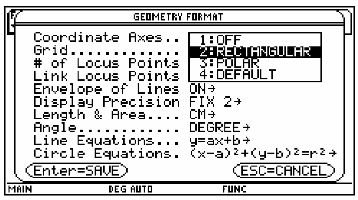
Problema

En base al concepto geométrico de la derivada, construir geométricamente la derivada de la función trigonométrica seno ($y = f(x) = \sin(x)$).

Pasos:



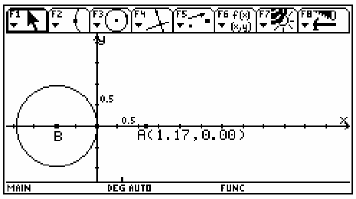
1. Utilizar de las aplicaciones de la Voyage 200[TM] la aplicación Cabri Geometry, seleccionar un nuevo archivo y digitar un nombre “ibero” y presionar dos veces enter para ingresar en la pantalla de Cabri.



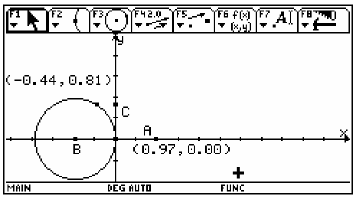
2. En Cabri construiremos la función trigonométrica seno para lo cual incluiremos un sistema cartesiano de ejes (*F8 9:Format Coordinate Axes.. 2:RECTANGULAR*).

3. Determinar un punto A sobre el eje X (*F2 2:Point on Object*) y calcular sus coordenadas (*F6 5:Equation & Coordinates*).

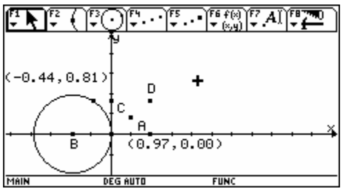
4. Dibujar una circunferencia con centro el punto B y radio cualquiera sobre el eje X .



5. Transferir el valor de la abscisa del punto A sobre la circunferencia (*F4 9: Measurement Transfer*) y determinar las coordenadas del punto que se originó sobre la circunferencia.

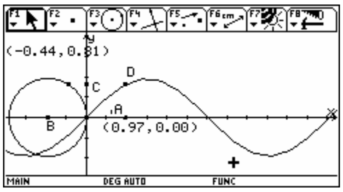


6. Transferir el valor de la ordenada de este nuevo punto al eje Y determinando el punto C.

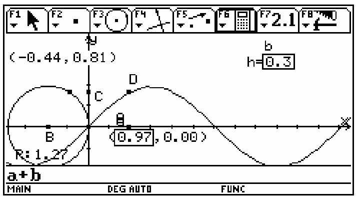


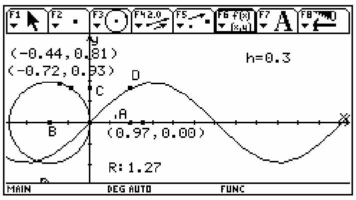
7. El punto de coordenadas abscisa A y de ordenada C, lo determinaremos con *F4 3:Midpoint* entre los puntos A y C, luego en *F5 5:Symmetry* del punto centro del sistema cartesiano de ejes con respecto al punto medio. (punto D).

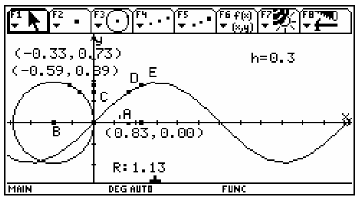
8. Determinaremos el Lugar Geométrico del punto D con respecto al punto A en el eje X , con lo cual obtendremos la función seno (*F4 A: Locus)*. Para "suavizar" la gráfica haz clic en el lugar geométrico y presiona la tecla +. Ahora determinaremos su derivada.



9. Primero debemos definir un valor para h (por ejemplo $h = 0.3$) que representará nuestro incremento (*F7 6:Numerical Edit)*.

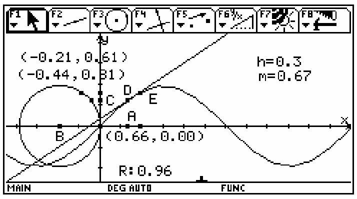


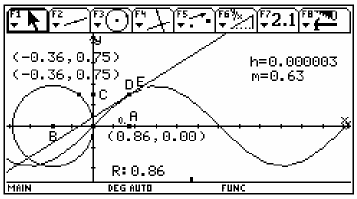




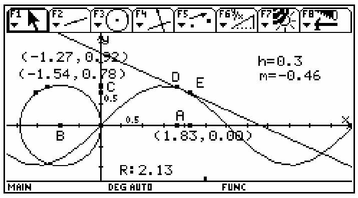
10. Utilizando la herramienta calculadora de Cabri (*F6 6:Calculate*) determinamos el valor de $x+h$ (1.27), transferimos el resultado al eje X y a la circunferencia.

11. Determinamos las coordenadas del nuevo punto en la circunferencia y transferimos la ordenada al eje Y. Repitiendo el paso 7 para estos nuevos puntos obtenemos el punto E.

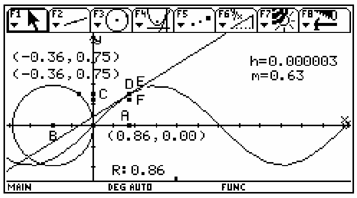




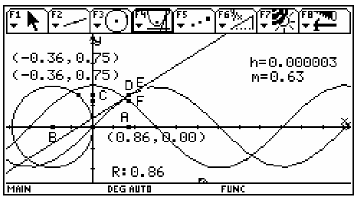
12. Para utilizar el concepto de la derivada necesitamos trazar un recta (secante) para los puntos D y E (*F2 4:Line*). Mover el punto A para observar el cambio de la secante y de la pendiente m (*F6 4:Slope*)

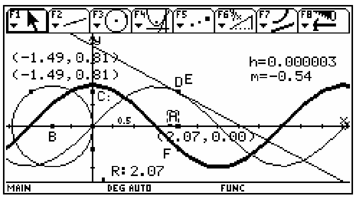


13. Ahora para transformar la secante en tangente, hacemos tender h a cero ($h \to 0$) y punto E coincide con punto D, con lo cual nuestra pendiente se transforma en la derivada de la función en ese punto (concepto).



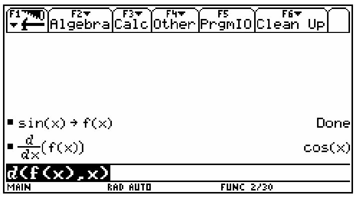
14. Para representar la derivada transferimos el valor de la pendiente de la tangente en el punto D de la función al eje Y (*F4 9: Measurement Transfer*). Siguiendo la secuencia descrita en el paso 7 obtenemos el punto F y pedimos el lugar geométrico de este punto con respecto al punto A (*F4 A: Locus*) ¡¡Sorpresa!! la función trigonométrica coseno

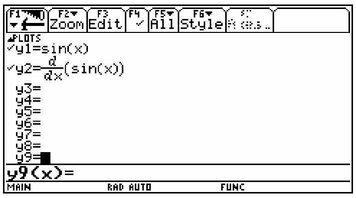


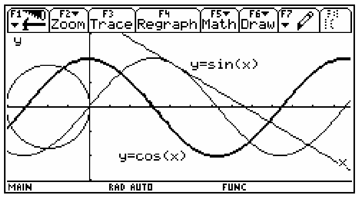


$y = \cos(x)$

15. Si queremos comparar nuestros resultados podemos en modo HOME calcular la derivada de la función seno y luego graficar los resultados.







Conclusiones

La geometría dinámica de Cabri en la Vogaye 200 TM nos permite explorar y recrear conceptos matemáticos, que habitualmente no se presentan en forma gráfica, con lo cual el aprendizaje resulta más completo y participativo.

Además un instrumento como la calculadora gráfica provee un rico ambiente para la resolución de problemas complejos, y puede ser pensado como una herramienta cognitiva o bien como un agente didáctico. La representación de un mismo objeto matemático en distintos sistemas de representación semióticos y la conexión entre los mismos permite que el encuentro entre el sujeto y el medio sea fructífero, y que el sujeto se apropie del conocimiento de una manera más efectiva.

Bibliografía

- Carral M. Institut Universitaire de Formation des Maîtres Midi-Pyrénées, France.
  - ✓ Primer Encuentro de Matemática 2000, 12 al 14 Julio del 2000. Concepción. Chile.
  - ✓ Conferencia Taller “Aprendiendo Matemática y Nuevas Tecnologías”. Julio 2001 Santiago de Chile.
  - ✓ Segundo Encuntro de Matemática 2002, 17 al 19 de Julio del 2002. Concepción Chile.
  - ✓ Taller “Geometría Dinámica”, Julio 2003 Concepción, Chile.

- Barrales M., (2003). Revista Innovaciones Educativas, 4º Edición. 2003. Texas Instruments.