

Aproximaciones a la modelación matemática con el uso de tecnologías portables: dos ejemplos prácticos.

Miguel A. Díaz F*.

Grupo de Interés en Tecnologías Portables UVM
Universidad de Viña del Mar

1. Introducción

Para Blum⁷, la modelación matemática es reconocida como una práctica científica que ha sido incorporada a la enseñanza de la matemática, por la diversidad de significados que aporta. La práctica docente algo nos dice al respecto: contenidos matemáticos conectados con situaciones reales, que los hacen significativos, desde el punto de vista de la permanencia en el acervo matemático del alumno. Por otro, para el profesor, modelar situaciones reales siempre trae consigo dificultades relacionadas con el cálculo y con las variables involucradas, reduciendo en el mayor de los casos el problema original a una situación idealizada, que poco tiene que ver con la situación inicial.

Cordero⁸ afirma que “el debate actual sobre el papel de las prácticas en la construcción de conocimiento matemático señala como una hipótesis que la graficación es la categoría que permite articular el uso de la modelación matemática y el uso de la tecnología en actividades matemáticas.

Esos dos aspectos teóricos vistos desde la educación matemática, nos hacen pensar en la puesta en juego de actividades que conjuguen la modelación matemática y el uso de tecnologías portables. Dejaremos la necesaria reflexión teórica respecto de la relación de cada una de las actividades que se proponen con el pensamiento variacional y, la revisión exhaustiva de las etapas de aprendizaje que propone Brousseau, para estudios posteriores.

La propuesta consiste de dos actividades⁹, la primera asociada a la ley de enfriamiento de Newton y la segunda a la variación en la intensidad de la luz. Desde la realidad, se colectan datos a través del sistema Calculadora TI-83 Plus y la interfase Calculador Based Laboratory (CBL²), para luego modelarlos a través de correlaciones de tipo exponencial y sinusoidal, obteniéndose funciones del tipo: $f(t) = A \cdot B^t + C$, en el primer caso e $I(t) = A^2 \cdot \text{sen}^2(w \cdot t)$ en el segundo. Se incluyen también, algunas referencias básicas respecto del uso del sistema calculadora TI-83 Plus más CBL².

* mdiaz@uvm.cl

⁷ Citado en el artículo “Modelación en Matemática Educativa” de Liliana Suárez Téllez, Francisco Cordero Osorio, Cinvestav del IPN, México.

⁸ Ídem, Cordero 2004.

⁹ Las actividades fueron adaptadas desde Real World Math with the CBL 2 and LabPro, **Explorations**, por el Grupo de Interés UVM y presentadas en el I Taller Kanelduquantum, realizado en el mes de agosto de 2005 en la UVM.

2. Lo básico respecto del CBL²

El CBL² (Calculator Based Laboratory) es un multímetro que recibe impulsos eléctricos y los convierte en señales digitales. Posee tres canales en los cuales pueden conectarse sensores que transforman las señales físicas (temperatura, movimiento, presión, intensidad de luz, sonido, etc) en impulsos eléctricos.

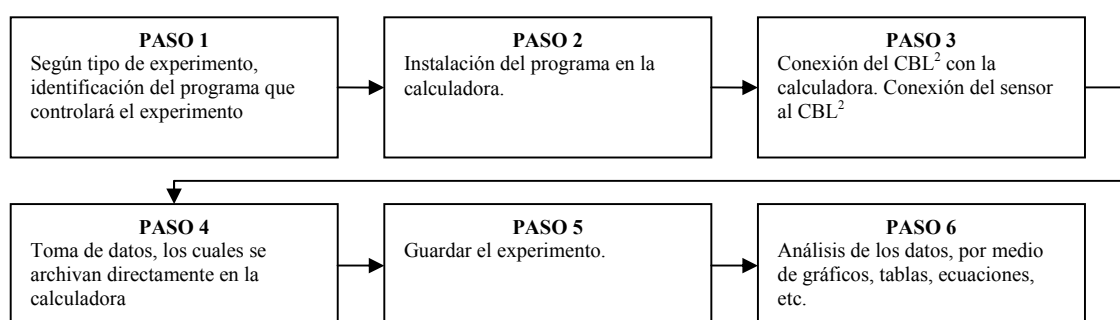
El CBL² puede almacenar los datos recopilados de las mediciones en listas, que se envían directamente a la calculadora. Generalmente produce dos listas, una con los datos del tiempo (instantes en que recibe los datos) y otra con los datos de la medición. Pero puede recibir datos simultáneos de hasta tres sensores diferentes.

Para la realización de los experimentos, es necesario programar el CBL² para definir cuántos datos tomar, de qué canales, y cada cuánto tiempo. El programa DataMate, ya instalado en la calculadora se encarga de conectar el CBL² con la calculadora y permite programar la toma de datos.

Los datos recogidos por el CBL², se almacenan en listas en la calculadora donde pueden realizarse análisis de diferente tipo y representarlos por medio de gráficos o tablas. Este es el mayor interés desde el punto de vista matemático, pues una de sus tareas es la modelación de situaciones reales con el fin de explicar y predecir fenómenos.

Secuencia de pasos en una actividad “CBL²+Calculadora”

Para la recopilación de datos a través de un sistema CBL² más Calculadora, se proponen los siguientes pasos:



Las dos actividades propuestas hacen uso de los sensores de temperatura y luminosidad, sensores que utilizan el programa DataMate para conectarse con la calculadora TI-83 Plus. En consecuencia, los pasos uno y dos están ya resueltos.

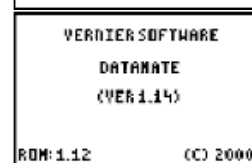
PASO 3: Conexión del CBL² a la calculadora y conexión del sensor al CBL².

1. Asegúrese que la calculadora no tiene “restos” del experimento anterior. Vaya a 2nd-MEM, busque ClrAllLists y presione Enter. Otra vez Enter.
2. Conecte el CBL² a la calculadora

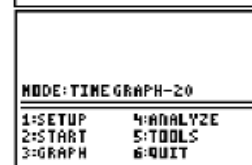
3. Pulse TRANSFER en el CBL²
4. Pulse APPS, aparece menú, seleccione DataMate, y pulse ENTER



5. Aparece la pantalla de DataMate

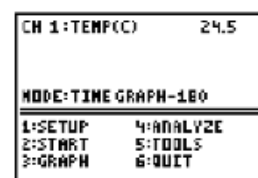


Y luego la pantalla principal de DataMate



Conecte un sensor al sistema CBL²

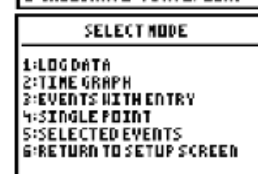
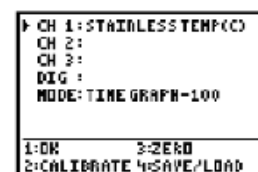
6. Conecte el sensor en el Canal 1 (CH1). Oprima bien los cables de conexión. En el ejemplo de la figura se ha instalado el sensor de temperatura, como está indicado en la primera línea (TEMP (C)), el que hará mediciones en grados centígrados.



Selección del modo de recopilación de datos

DataMate carga cada sensor de una manera pre-determinada (forma en la que se recolectan de datos). Para cambiar el modo de recopilación de datos, siga los siguientes pasos:

7. En la pantalla principal de DataMate, pulse 1 SETUP
8. Pulse las teclas direccionales, para llevar el cursor hasta MODE y pulse ENTER. Aparecerá una lista de los modos de recopilación de datos
9. Pulse el numero situado junto al modo que desea
10. Pulse 1 OK dos veces para regresar a principal.



Detalle de SELECT MODE

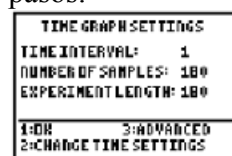
- a. LOG DATA: Solicita el inicio del procedimiento de configuración rápida, Quick Set-Up.

- b. TIME GRAPH: Permite definir el intervalo entre muestras y el número de puntos de datos recopilados. Modo predeterminado.
- c. EVENTS WITH ENTRY: Recopila un punto de datos cada vez que se pulsa ENTER y solicita al usuario que relacione dicho punto de datos con un valor numérico.
- d. SINGLE POINT Recopila un punto de datos por segundo durante diez segundos y muestra la media.
- e. SELECTED EVENTS: Recopila un punto de datos cada vez que se pulsa ENTER en la calculadora.
- f. RETURN TO SETUP SCREEN: Regresa a la pantalla de configuración.

Para modificar los tiempos de recopilación de datos

Sí en la pantalla Select Mode elige Time Graph, aparecerá la pantalla de ajustes para gráficos de tiempo. Cada sensor tiene predeterminado un intervalo de tiempo entre datos (en segundos) y un número de datos. Para cambiar los ajustes predeterminados siga los siguientes pasos:

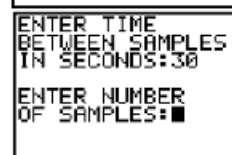
11. Sí pulsa 2 TIME GRAPH en Select Mode, accede a



12. Pulse 2 CHANGE TIME SETTNGS



13. Introduzca el intervalo de tiempo entre muestras (en segundos) y pulse ENTER



14. Introduzca el número de muestras y pulse ENTER. Volverá a aparecer la pantalla de ajustes para gráficos de tiempo. (la duración total del experimento (en segundos) se calcula de forma automática.)

15. Pulse 1 OK para salir. Aparecerá la pantalla Setup.

O bien Pulse 3 ADVANCED para cambiar los ajustes avanzados. (Cambios el aspecto del gráfico que se genera con los datos de la muestra)

PASO 4: Recopilación de datos

Para iniciar el experimento, pulse 2 START en la pantalla principal de DataMate. El CBL² empieza a recoger datos de acuerdo con el modo de recolección elegido.

Nota: En modo Time Graph, los datos del canal 1 (CH1) se trazan automáticamente en tiempo real cuando se pulsa 2. Los valores aparecen en el ángulo superior derecho de la pantalla a medida que se avanza en la recopilación de los mismos.

PASO 5: Guardar el experimento

Luego de la recopilación de datos, aparece el gráfico de los datos en un sistema tiempo v/s unidad experimento (grados celcius, newton, etc.). Pulse ENTER, para volver a la pantalla principal de DataMate

16. En la pantalla principal de DataMate Pulse 1 SETUP

17. Pulse 4:SAVE/LOAD

18. Pulse 1:SAVE EXPERIMENT

19. Introduzca un nombre (hasta un máximo de 20 caracteres alfabéticos y/o numéricos) y pulse ENTER. El experimento queda almacenado y vuelve a aparecer el menú de experimentos (Experiment Menu). Para recuperar el experimento en 18, seleccione 2 LOAD EXPERIMENT



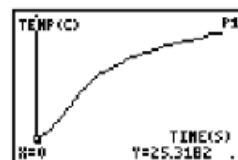
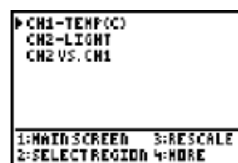
PASO 6: Análisis de los datos

Representación gráfica de los datos

20. Si tiene varios sensores conectados al CBL², la pantalla de menú de gráficos (Graph Menu) aparecerá automáticamente cuando finalice la recopilación de los datos.

Nota: Si sólo hay un sensor conectado al CBL², la pantalla muestra el gráfico de los datos recolectados.

21. Pulse las teclas direccionales para llevar el cursor al canal/datos que desea ver en forma de gráfico y pulse ENTER.



22. Para ver otro gráfico, pulse ENTER. Volverá a aparecer la pantalla Graph Menu y podrá seleccionar otro canal.

23. Si desea cambiar la región del gráfico que muestra la pantalla, vaya a la pantalla Graph Menu y pulse 2 SELECT REGION.

O bien, si desea cambiar la escala del gráfico, vaya de nuevo a la pantalla que contiene el gráfico y pulse 3 RESCALE. Aparecerá la pantalla de ajuste de la escala de los gráficos (Rescale Graph). O bien si ha terminado de ver los gráficos, vaya a la pantalla Graph Menu y pulse 1 MAIN SCREEN.

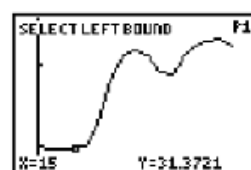
Para seleccionar una región

Además de ver el gráfico completo, DataMate permite seleccionar y ver una parte del gráfico.

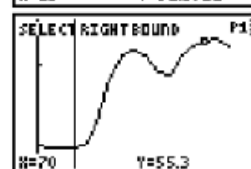
Nota: Si se selecciona una región, la calculadora sólo retiene los datos incluidos en dicha región. Todos los datos que queden fuera de la región se borrarán de la memoria de la calculadora. No obstante, el grupo completo de datos permanece almacenado en el CBL² y puede recuperarse en cualquier momento (En la pantalla principal de DataMate, pulse 5 TOOLS, luego pulse 2 RETRIEVE DATA, el programa comienza a recuperar todos los datos del experimento. Recuerde también que lo tiene guardado).

Para ver una parte o “región” de un gráfico, siga estos pasos:

24. En la pantalla Graph Menu, pulse 2 SELECT REGION.



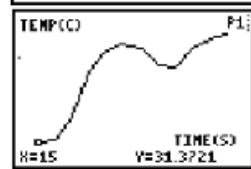
25. Cambie los valores de X e Y situados en la parte inferior de la pantalla; para ello desplácese con las direccionales para llevar el cursor al punto del gráfico que desea convertir en su lado izquierdo. Pulse ENTER.



26. Pulse las direccionales para llevar el cursor al punto del gráfico que desea convertir en su lado derecho y pulse ENTER. Aparecerá la pantalla Graph Menu.



27. Pulse ENTER para mostrar el nuevo gráfico.



28. Cuando haya finalizado de examinar el gráfico, pulse ENTER. Aparecerá la pantalla Graph Menu.

Análisis de los datos

La calculadora lleva integrados modelos de regresión y funciones estadísticas con los que podrá realizar el análisis de los datos. Para seleccionar estas opciones, siga estos pasos:

29. En la pantalla principal de DataMate, pulse 4 ANALYZE.

En los párrafos siguientes se explican las distintas opciones para analizar los datos.



30. La opción 2, CURVE FIT, muestra una lista de los modelos de regresión que pueden seleccionarse. Cuando se elige un modelo de regresión, la calculadora determina la recta o la curva que se adapta mejor; a continuación, permite seleccionar la opción adecuada a la escala de regresión que se aplica a los datos.

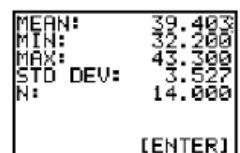


31. La opción 3, ADD MODEL, permite crear un modelo de regresión propio.

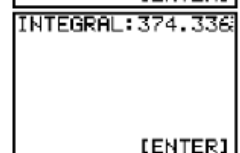
Para utilizar esta opción lo primero que debe hacer es introducir la ecuación en el editor Y= de la calculadora *antes* de iniciar DataMate. Por ejemplo, si sabe que los datos que se dispone a recopilar son lineales, puede introducir $y=ax+b$. Cuando selecciona ADD MODEL, puede cambiar los coeficientes a y b hasta que el modelo propio que se dispone a utilizar sea el que pretende.



32. La opción 4, STATISTICS, solicita la selección del canal/datos y de los límites izquierdo y derecho. La pantalla muestra la estadística de una variable para los datos.



33. La opción 5, INTEGRAL, solicita la selección del gráfico y de los límites izquierdo y derecho. La pantalla muestra el valor de la integral definida.



34. Pulse el número situado junto a la opción que desea:

35. Cuando haya finalizado, pulse ENTER Aparecerá la pantalla de opciones de análisis (Analyze Options).

Listas de datos

El análisis de los datos hasta ahora se ha realizado en el entorno que ofrece DataMate. Sin embargo, al realizar un experimento, los datos recopilados se almacenan en listas en la calculadora TI-83 Plus, los cuales se pueden también analizar en forma independiente del CBL². Las listas permiten, por ejemplo: alterar los datos de acuerdo a condiciones del problema, representar dos o más curvas de regresiones, etc.

36. Al tomar datos con el CBL², automáticamente se generan dos listas: L₁ y L₂. La primera contiene la variable tiempo, la segunda el dato medido en ese instante. Para ver las listas, salga del programa DataMate. Pulse STAT, seleccione 1EDIT.

37. A partir de las listas anteriores, puede generar una tercera L₃. Por ejemplo sí en la tercera, quisiera dejar cada dato de la segunda, pero menos 60, proceda así:

- Ubique con las direccionales, el cursor en L₃ (queda resaltado)
- Pulse ENTER, en la línea de edición aparece destellando el cursor
- Digite L₂ (2nd 2)- 60
- Pulse ENTER, aparece la tercera columna como se quería.

38. Para dibujar la curva L₁ v/s L₃ proceda así:

- Pulse 2nd STAT PLOT

- Seleccione 2:PLOT 2
- Seleccione On, el tipo de gráfico, en el eje x L₁, en el eje y L₃ (reemplazar L₂ por L₃, digitando 2nd 3) y el tipo de marca

ACTIVIDAD 1: “Contenedor de calor”

Esta experiencia permite a los estudiantes acercarse a la Ley de Enfriamiento de Newton, mediante el análisis de asíntotas, decrecimiento exponencial y logaritmos naturales.

I. Modelo $f(t) = A \cdot B^t + C$

Se estudia el fenómeno de enfriamiento y a continuación, el modelo matemático que relaciona tiempo y temperatura.

II. Equipo necesario

- CBL²
- Calculadora compatible con CBL²
- Sensor de temperatura
- Estufa
- Lámina de aluminio de 15X15 cm

III. Procedimiento

1. Programe una toma de datos de 5 minutos y de 300 datos
2. Envuelva el sensor de temperatura con la lámina de aluminio. En el caso que sean varios grupos, probar con diferentes densidades de envoltura (más o menos ajustado el envoltorio al sensor), para analizar el mejor contenedor
3. Acerque el contenedor a la estufa.
4. Cuando el sensor indique una temperatura sobre 70°C, retire la estufa y pulse la opción 2 del menú de DATAMATE en la calculadora para iniciar la colección de datos. Espere mientras el CBL² captura datos hasta que se detenga (avisa con una señal sonora).
5. Cuando finalice la colección de datos, automáticamente aparece la pantalla de gráficos GRAPH MENU. Se puede desplazar con el cursor a través de la curva.
6. Analice los datos. Use la hoja de registros para conservar los parámetros de cada una de las regresiones aplicadas.

IV. Algunas Preguntas

- a) ¿Qué forma aproximada tiene la gráfica de puntos? ¿Podría ser una recta? ¿Una parábola?. Explícite su razonamiento.
- b) Describa el comportamiento de las variables.
- c) Una vez que se ha determinado la mejor regresión, ¿En que tiempo la temperatura del contenedor era de 40°C después que se retiró de la estufa?

- d) Según sus resultados, ¿Cuánto tiempo necesitará el contenedor para alcanzar la temperatura ambiente?
- e) ¿Podría calcular la temperatura que tenía el contenedor 2 minutos antes de comenzar la experiencia? Explique su respuesta.

ACTIVIDAD DOS: “Variaciones en la intensidad de luz”

Esta experiencia permite descubrir la frecuencia de la red eléctrica a través de la luz.

I. Introducción

Cuando observamos la luz de una lámpara o de un tubo fluorescente, aparece una luz constante y pareja, de igual intensidad en todo momento. Sin embargo, en la realidad, la luz con que iluminamos nuestras casas no es constante ni pareja en intensidad, es oscilante, es decir, es una luz que varía en intensidad de manera sinusoidal. No nos percatamos de ello porque la frecuencia de oscilación es tan pequeña que nuestros ojos no alcanzan a percibir dichas variaciones.

La frecuencia a la cual oscila la intensidad de la luz es de 50 Hz que corresponde a la frecuencia de la red eléctrica del voltaje alterno de 220 Volt.

Como la frecuencia es el inverso de de la frecuencia, el período es de 0,02 segundos. El modelo de la intensidad de la luz queda de la siguiente manera (correspondiente a una onda sinusoidal rectificada):

$$I(t) = A^2 \cdot \text{sen}^2(\omega \cdot t)$$

donde A es la amplitud de la senoide, ω es la frecuencia angular, igual $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$, donde f es la frecuencia.

II. Equipo necesario

- CBL²
- Calculadora compatible con CBL²
- Sensor de luz TI
- Luz fluorescente que ilumine el sector en que se tomaran datos

III. Procedimiento

Cambios para la toma de datos

- Oprima el número 2 (CHANGE TIME SETTINGS).
 - En TIME INTERVAL, ingrese 0,001. En NUMBER OF SAMPLES, ingrese 200. Luego seleccione del menú 1 (OK), nuevamente 1 (OK) y quedará en el menú principal del DATAMATE.
1. Acerque el sensor de luz a los tubos fluorescentes (aproximadamente 1 o 2 metros de distancia). Cuando esté listo, oprima 2 (START) para comenzar la toma de datos.

2. Cuando finalice la recogida de datos, automáticamente aparece la pantalla de gráficos GRAPH MENU. Halle la coordenada X (tiempo) que pertenece a dos máximos adyacentes de la onda sinusoidal. Determine el período de la onda y regístrelo.
3. Observación: si fuese necesario, usted deberá seleccionar un sector del gráfico, para apreciar de mejor manera los máximos y mínimos.
4. Determine la frecuencia de la red. Repita el procedimiento para una ampolleta normal y verifique que se obtenga la misma frecuencia.

IV. Preguntas

1. Si usted efectúa esta experiencia en Estados Unidos, ¿Qué diferencias tendría con los actuales resultados? (mencione las dos más importantes)
2. ¿Cuáles son los tres elementos matemático-físicos más importantes en cualquier onda sinusoidal?

Bibliografía

- Suárez Téllez, Liliana y Cordero Osorio, Francisco. *Modelación en Matemática Educativa*, 2004, Cinvestav del IPN, México.
- Manuales TI-83 y TI-84 Plus Sylver Edition. 2000, 2003. Texas Instruments Incorporated.
- Procedimientos Iniciales del Sistema CBL 2™, 2000, 2003. Texas Instruments Incorporated.
- Chris Brueningsen, Bill Bower, Linda Antinone, Elisa Kerner. *Real World Math with the CBL 2 and LabPro, Explorations*. 2003. Texas instruments.

