Dos Números que resultan de Límites de Sucesiones

Genaro Castillo G.

Instituto de Matemática y Física Universidad de Talca

La idea de estas notas es aportar algún material que eventualmente podría implementarse a través de cursos electivos en la Enseñanza Media, como una manera de adelantarse a lo que mucho de nuestros estudiantes tendrán que enfrentarse en la universidad.

Por este motivo, comenzamos con una introducción a las ideas que van emergiendo hasta justificar la existencia de estos números, uno muy famoso y el otro no tanto, el número e y la constante γ de Euler-Mascheroni.

Sucesiones

Conceptos básicos

Si A y B son dos conjuntos no vacíos, admitamos como función f de A en B una cierta correspondencia que asocia a cada elemento x en A un valor único y en B. Este valor único $y \in B$ se acostumbra denotarlo por $f(x)$ y es *la imagen de x por f*. La idea de función se esquematiza por

$$\begin{array}{cccc} f : & A & \longrightarrow & B \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

El conjunto A se llama *dominio de f* y el conjunto B *codominio de f*. El conjunto de todas las imágenes es el *recorrido de f* y se representa por $Rec\,(f) = \{f(x) \in B \ / \ x \in A\}$. Siempre se cumple que $Rec\,(f) \subset B$.

Llamaremos *sucesión infinita* a una función f con dominio los números naturales. Por conveniencia, nos referimos a las sucesiones infinitas simplemente como *sucesiones*. En estas notas, el codominio de una sucesión será un conjunto de números reales y hablaremos de *sucesiones reales*.

Si f es una sucesión, entonces a cada número natural n corresponde un número real $f(n)$. A estos números en el recorrido de f se les representa por $f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n), \cdots$, donde los puntos al final indican que la sucesión no termina (cada número $f(i)$ tiene uno que le sigue, $f(i+1)$). Al número $f(1)$ se le llama *primer término* de la sucesión, a $f(2)$ el *segundo término*, y en general, $f(n)$ es el *n-ésimo término* de la sucesión. Es común usar notación de subíndices en vez de notación funcional y escribir estos números como $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$. Se entiende que el símbolo a_i denota el número real $f(i)$, para cada i número natural. A pesar de que las sucesiones son funciones, un conjunto ordenado del tipo anterior también será llamado sucesión.

Por razones de brevedad se utiliza la notación $(a_n)_{n\in N}$ para indicar la sucesión cuyo n-ésimo término es a_n y cuando se está más familiarizado con el concepto se escribe simplemente (a_n).

Existen diferentes maneras de comunicar una sucesión, lo importante es que el interlocutor sea capaz de entender y obtener al menos teóricamente sin ambigüedad los primeros y, ojalá, hasta su n-ésimo término.

Usualmente, una sucesión puede definirse dando alguna regla o fórmula que defina al n-ésimo término (definición por comprensión).

Ejemplo 1 *La fórmula* $a_n = \frac{n+1}{n^2}$ *define la sucesión cuyos cuatro primeros términos son:* $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}$. *El recorrido es el conjunto infinito: Rec* $(a) = \{2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \cdots\}$.

La fórmula $b_n = (-1)^{n+1}$ *define una sucesión cuyos primeros cuatro términos son:* $1, -1, 1, -1$. *El recorrido es el conjunto finito: Rec* $(b) = \{1, -1\}$.

Algunas veces se requieren dos o más fórmulas para definir una sucesión, por ejemplo, las relaciones $a_{2n-1} = 0, a_{2n} = n^2$ *juntas definen una sucesión cuyos primeros nueve términos son:* $0, 1, 0, 4, 0, 9, 0, 16, 0$.

Otra manera común de definir una sucesión es mediante un conjunto de instrucciones que indican como se obtiene un término a partir del o los anteriores (definición por recurrencia).

Ejemplo 2 *Los términos de órdenes dos, tres y cuatro de la sucesión definida por*

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ *son:*

$$\begin{aligned} a_2 &= \sqrt{1 + a_1} = \sqrt{2} , \\ a_3 &= \sqrt{1 + a_2} = \sqrt{1 + \sqrt{2}} , \\ a_4 &= \sqrt{1 + a_3} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}} . \end{aligned}$$

Ejemplo 3 *Sea la sucesión definida por* $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ *y* $a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}$. *Reemplazando* n *por* $1, 2$ *y* 3 *en forma sucesiva se obtienen los términos* a_3, a_4 *y* a_5 *de la sucesión, respectivamente,*

$$a_3 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} \quad , \quad a_4 = \frac{1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} \quad , \quad a_5 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{8} .$$

Ejemplo 4 *Supongamos que una población de peces aumenta de manera que el crecimiento en cualquier año es el doble del crecimiento en el año anterior. Vamos a determinar una fórmula recursiva para la población en el año n-ésimo.*

Sea p_n la población de peces después de n años. El crecimiento entre el año n-ésimo y el $(n+1)$ será $p_{n+1} - p_n$. De acuerdo con el enunciado del problema $p_{n+1} - p_n = 2\,(p_n - p_{n-1})$, o bien,

$$p_{n+1} = 3p_n - 2p_{n-1}.$$

Para aplicar la fórmula debemos conocer las poblaciones iniciales p_0 y p_1.

Sucesiones acotadas y sucesiones convergentes

Definición 1 Una sucesión (a_n) se dirá *acotada* si y sólo si su recorrido es un conjunto acotado en $I\!R$. En símbolos ésto suele expresarse así:

$$(a_n) \text{ es acotada } \iff \exists M \in I\!R^+ \text{ tal que } |a_n| \leqslant M \quad , \quad \forall n \in I\!N \ ;$$

es decir, todos los términos quedan "atrapados" en un intervalo de longitud finita de $I\!R$.

Ejemplo 5 *La sucesión (a_n) definida por $a_n = \frac{1}{n}$ es acotada puesto que el conjunto recorrido de a, Rec $(a) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$, es acotado por estar contenido en el intervalo $[0,1]$.*

La sucesión $(b_n) = (-1)^{n+1}$ es acotada ya que el conjunto recorrido de b es Rec $(b) = \{-1, 1\}$ que es, evidentemente, un conjunto acotado en $I\!R$.

La sucesión (c_n) definida por $c_n = 2n+1$ no es acotada ya que Rec$(c) = \{3, 5, 7, 9, \cdots\}$ es un conjunto que no está contenido en ningún intervalo de longitud finita, por lo tanto no es acotado en $I\!R$.

Es interesante observar el comportamiento de ciertas sucesiones cuando el orden de sus términos se hace crecer correlativamente. Por ejemplo, veamos que sucede con la sucesión (a_n) definida por $a_n = \sqrt[n]{3}$ y calculemos algunos términos con una calculadora simple:

$$\begin{array}{lclclclclcl}
a_1 & = & 3 & , & a_2 & = & 1{,}732051 & , & a_3 & = & 1{,}442249\ , \\
a_{10} & = & 1{,}116123 & , & a_{11} & = & 1{,}1105031 & , & a_{12} & = & 1{,}095873\ , \\
a_{100} & = & 1{,}011046 & , & a_{101} & = & 1{,}010936 & , & a_{102} & = & 1{,}0910828\ , \\
a_{1000} & = & 1{,}0011099 & , & a_{1001} & = & 1{,}001098 & , & a_{1002} & = & 1{,}001077\ .
\end{array}$$

Se tiene la impresión que a_n tiende a 1 cuando n crece correlativamente. Si en una sucesión (a_n) sus términos se aproximan a un determinado valor L cuando sus órdenes crecen correlativamente, entonces se dirá que la sucesión es *convergente* y tiene a L como límite cuando n tiende a $+\infty$.

Definición 2 Sean (a_n) una sucesión y L un número real. Diremos que (a_n) *converge a* L si, para cada $\epsilon > 0$, existe un número natural N de modo que si $n > N$ entonces $|a_n - L| < \epsilon$.

Si (a_n) converge a L, se dice que el límite de (a_n) es L o que tiene límite L y se anota $\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = L$. En símbolos

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = L \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad n > N \Longrightarrow |a_n - L| < \epsilon$$

(ϵ sugiere un número tan pequeño como se desee).

Además, diremos que una sucesión (a_n) es *convergente* si converge hacia L, para algún L número real, y que es *divergente* si no converge.

En el esquema adjunto, *Figura* 1,1, se ilustra lo que puede y debe suceder si $\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = L$.

Posiblemente, los primeros términos $a_1, a_2, \cdots, a_N$ podrían estar fuera del intervalo $]\, L - \epsilon, L + \epsilon\, [$.

Todos los términos a_n, $n > N$, deben estar en el intervalo $]\, L - \epsilon, L + \epsilon\, [$ y a medida que n crece los a_n se acercan cada vez más a L.

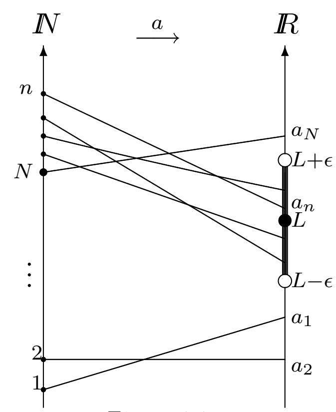


Figura 1,1

Ejemplo 6 *Consideremos la sucesión* (a_n) *definida por* $a_n = \frac{2n^2+1}{2+n^2}$. *Probaremos, por medio de la definición, que* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 2$. *La técnica consiste en analizar para qué valores de* n *se verifica que* $|a_n - 2| < \epsilon$ *para* $\epsilon > 0$.

De las igualdades $|a_n - 2| = \left| \dfrac{2n^2+1}{2+n^2} - 2 \right| = \dfrac{3}{2+n^2}$, *se deduce*

$$|a_n - 2| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2+n^2} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2 + n^2 > \frac{3}{\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n^2 > \frac{3}{\epsilon} - 2,$$

lo que se consigue cuando $n > \sqrt{\frac{3}{\epsilon}}$. *En particular, si escogemos* $N = \left[\sqrt{\frac{3}{\epsilon}} \right]$ *la propiedad vale para* $n > N$.

Observación: En cuanto a notaciones:

(a) Si $x \in \mathbb{R}$, el símbolo $[x]$ representa al número entero menor o igual que x.

(b) En lo que sigue, se anotará simplemente por $\lim a_n$ la expresión $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n$.

Proposición 1 *Toda sucesión convergente tiene un único límite.*

Ejemplo 7 *La sucesión* $(a_n) = (-1)^{n+1} + \frac{1}{n} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \\ -1 + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$

no es convergente. ¡Cuidarse de pensar que sus límites pudieren ser 1 y -1!

Observaciones:

(a) Si en una sucesión convergente se cambia un número finito de sus términos, la (nueva) sucesión así construida es también convergente y tiene el mismo límite que la original.

(b) Si en una sucesión divergente se cambia un número finito de sus términos, la (nueva) sucesión así construida es también divergente.

Proposición 2 *Toda sucesión convergente es acotada.*

Ejemplo 8 *La sucesión* (c_n) *definida por* $c_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$ *es un ejemplo elemental que muestra que una sucesión puede ser acotada y no ser convergente.*

Sucesiones que tienden a infinito

Entre las sucesiones divergentes destacaremos aquellas cuyos términos, en orden correlativo, se van haciendo cada vez más y más grandes en valor absoluto, acordaremos decir (abusando del lenguaje) que éstas tienen límite infinito. Distinguiremos los tres casos que pasamos a definir:

1) $\lim a_n = +\infty \iff \forall G > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Longrightarrow a_n > G.$

2) $\lim b_n = -\infty \iff \forall G > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Longrightarrow b_n < -G.$

3) $\lim c_n = \infty \iff \forall G > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Longrightarrow |c_n| > G.$

En los tres casos G representa un número real (tan grande como se desee).

Ejemplo 9 *Las sucesiones definidas por* $a_n = n^2 - 1$, $b_n = 3n - n^2$ *y* $c_n = (-n)^3$ *ilustran las tres situaciones anteriores. Aquí* $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$ *y* $\lim c_n = \infty$. *Sucesiones como éstas son claramente divergentes.*

Observamos que si el límite de a_n es $+\infty$ o si es $-\infty$, entonces $\lim a_n = \infty$. Sin embargo, si $\lim a_n = \infty$ no implica necesariamente que el límite de a_n sea $+\infty$ o $-\infty$.

Si el límite de la sucesión (a_n) es ya sea ∞, $+\infty$ o $-\infty$ y si $a_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión recíproca definida por $r_n = \frac{1}{a_n}$ tiene límite cero.

Generación de sucesiones a partir de otras

Conocidas dos sucesiones, (a_n) y (b_n), se obtienen por medio de diferentes procedimientos (especialmente algebraicos) nuevas sucesiones, por ejemplo:

(i) La sucesión suma (s_n), definida por: $s_n = a_n + b_n$.

(ii) La sucesión producto (p_n), definida por: $p_n = a_n \cdot b_n$.

(iii) La sucesión cuociente (c_n), definida por: $c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iv) La sucesión recíproca (r_n), definida por: $r_n = \dfrac{1}{b_n}$, $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(v) La sucesión sumas parciales (S_n), definida por: $S_n = a_1 + \cdots + a_n$.

(vi) La sucesión promedios (P_n), definida por: $P_n = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.

(vii) La sucesión cesaro 2 (C_n), definida por: $C_n = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n^2}$.

(viii) La sucesión productoria (π_n), definida por: $\pi_n = a_1 \cdot \ \cdots \ \cdot a_n$.

(ix) La sucesión medio geométrico (G_n), definida por: $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$, $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(x) La sucesión convolución (σ_n), definida por: $\sigma_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}$.

(xi) La sucesión potencia p-ésima (T_n), definida por: $T_n = a_n^p$, $a_n > 0$.

(xii) La sucesión potencia de c (α_n), definida por: $\alpha_n := c^{a_n}$, $c > 0$.

(xiii) La sucesión potencia-potencia (β_n), definida por: $\beta_n := b_n^{a_n}$, $b_n > 0$.

Observación: En general, si $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función y (a_n) es una sucesión tal que $a_n \in I$, para todo número natural n, entonces se puede definir una sucesión (t_n) , $t_n := f(a_n)$.

Ejemplo 10 *Si la sucesión (a_n) es tal que $a_n = \sqrt[n]{n}$ y $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función definida por $f(x) = \ln x$, entonces se obtiene la sucesión (t_n),*

$$t_n = f(\sqrt[n]{n}) = \ln(\sqrt[n]{n}) = \frac{\ln n}{n}.$$

A partir de la función g definida en $\mathbb{R}\setminus]-1,0[$ por $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ y la sucesión (b_n) definida por $b_n=n$, se puede construir una nueva sucesión cuyo n-ésimo término es

$$t_n = g(b_n) = g(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n .$$

Respecto de una sucesión, la primera pregunta que deberíamos formularnos es si converge o no converge.

La no convergencia de una sucesión puede ser atribuida a que sus términos a_n tiendan a $\pm\infty$ cuando $n \longrightarrow +\infty$, o bién, tenga un comportamiento oscilatorio o de otra índole como sucede, por ejemplo, con la sucesión $a_n = n\cos\frac{n\pi}{2}$.

Si una sucesión converge, la pregunta natural que aflora es ¿a qué número real converge?. Algunas veces se puede obtener exactamente ese número, otras veces nos debemos conformar con una aproximación. Hay sucesiones que convergen a números racionales y otras que convergen a números irracionales. No siempre es ésta una tarea sencilla especialmente cuando el límite es un número irracional.

Conociendo el comportamiento, en cuanto a convergencia o no, de la sucesión o las sucesiones involucradas cabe preguntarse ¿qué sucede con la convergencia o divergencia de las sucesiones creadas por los procedimientos antes mencionados?. Una respuesta parcial sobre algunas de ellas se presenta en el siguiente resultado.

Teorema 1 *Si $\text{lím}\, a_n = L$ y $\text{lím}\, b_n = M$, se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) *La sucesión suma (s_n) converge y $\text{lím}\, s_n = \text{lím}\, a_n + \text{lím}\, b_n = L + M$.*

(ii) *La sucesión producto (p_n) converge y $\text{lím}\, p_n = \text{lím}\, a_n \cdot \text{lím}\, b_n = L\cdot M$.*

(iii) *La sucesión recíproca (r_n) converge y $\text{lím}\, r_n = \dfrac{1}{\text{lím}\, b_n} = \dfrac{1}{M}$, siempre que $M \neq 0$ y $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(iv) *La sucesión cuociente (c_n) converge y $\text{lím}\, c_n = \dfrac{\text{lím}\, a_n}{\text{lím}\, b_n} = \dfrac{L}{M}$, siempre que $M \neq 0$ y $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

(v) *Sea f una función continua en I y $a_n \in I$, para todo número natural n. Si L está en I, entonces la sucesión $(f(a_n))$ converge y $\text{lím}\, f(a_n) = f(\text{lím}\, a_n) = f(L)$.*

(vi) *La sucesión potencia p-ésima (T_n) converge y $\text{lím}\, T_n = L^p$, siempre que $L > 0$.*

Ejemplo 11 *La función f definida por $f(x) = \ln x$ es continua en $\mathbb{R}^+$, luego*

$$\text{lím}\left(\ln\frac{2n^2+1}{n^2+4}\right) = \ln\left(\text{lím}\,\frac{2n^2+2}{n^2+4}\right) = \ln 2.$$

La función g definida por $g(x) = \sqrt[3]{x}$ es continua en $\mathbb{R}$, por lo tanto

$$\lim \left(\frac{n+1}{5-n}\right)^{1/3} = \left(\lim \frac{n+1}{5-n}\right)^{1/3} = -1.$$

Observación: En la parte (v) del Teorema 1 se estableció que si f es continua y una sucesión (a_n) tiene su recorrido y límite en el dominio de f, entonces $\lim f(a_n) = f(\lim a_n)$. Si f no es continua puede suceder que este límite no se transmita a través de f tal como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 12 *Sean (a_n) la sucesión definida por $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ y la función signo*

$$sgn\,(x) = \begin{cases} \;\;1 \; si \; x > 0 \\ \;\;0 \; si \; x = 0 \\ -1 \; si \; x < 0. \end{cases}$$

La función signo no es continua en $x = 0$, la sucesión (a_n) tiene recorrido y límite en su dominio, $\lim a_n = 0$ *. Este límite no se trasmite a través de la función signo, puesto que, la sucesión $t_n = sgn\,(a_n) = (-1)^{n+1}$ es divergente.*

Se sugiere conjeturar o dar contraejemplos sobre las otras alternativas que se presentan en la generación de nuevas sucesiones a partir de sucesiones conocidas.

Dos resultados importantes sobre sucesiones

Proposición 3 *Si* $\lim a_n = 0$ *y* (b_n) *es una sucesión acotada, entonces* $\lim a_n b_n = 0$.

Ejemplo 13 *Para determinar el límite de la sucesión* (c_n) *definida por* $c_n = (\cos n^2)/n$, *escribimos la sucesión* (c_n) *como el producto de dos sucesiones* (a_n) *y* (b_n) *con* $a_n = 1/n$ *y* $b_n = \cos n^2$. *La primera sucesión tiene límite cero y la segunda es acotada, de la Proposición 3 se obtiene que* $\lim(\cos n^2)/n = 0$.

Ejemplo 14 *Queremos probar que* $c_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$ *tiene límite cero cuando* $n \longrightarrow +\infty$; *para tal efecto, descomponemos* $c_n = a_n \cdot b_n$ *donde* $a_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n^{2/3}}$ *y* $b_n = \frac{1}{n^{1/3}}$.

Es claro que $\lim b_n = 0$. *Ahora,*

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)2(n+1)^{2/3}} \cdot \frac{2\cdot4\cdot6\cdots(2n-2)\cdot 2n^{2/3}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)} \\ &= \frac{2n+1}{2n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2/3} \leqslant 1 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

De aquí concluimos que el término mayor es $a_1 = \frac{1}{2}$, *o sea,* $a_n \leqslant \frac{1}{2}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y la sucesión* (a_n) *es acotada. Por la Proposición 3 resulta que* $\lim c_n = 0$.

Teorema 2 Teorema del Sandwich

Sean las sucesiones $(a_n), (b_n)$ *y* (c_n) *tales que* $\lim a_n = \lim b_n = L$. *Si a partir de cierto* N_1 *se tiene que* $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, *para todo* $n > N_1$, *entonces* $\lim c_n = L$.

Ejemplo 15 *Usando el Teorema del Sandwich, vamos a determinar* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{5^n + 7^n}$.

Es evidente que $\sqrt[n]{7^n} \leqslant \sqrt[n]{5^n + 7^n} \leqslant \sqrt[n]{7^n + 7^n}$, *o equivalentemente,*

$$7 \leqslant \sqrt[n]{5^n + 7^n} \leqslant 7\sqrt[n]{2}. \tag{1}$$

Pasando al límite, en (1), cuando $n \longrightarrow +\infty$ *obtenemos que*

$$\lim 7 \leqslant \lim \sqrt[n]{5^n + 7^n} \leqslant \lim(7\sqrt[n]{2}).$$

Puesto que $\lim 7 = 7$ *y* $\lim \sqrt[n]{2} = 1$ *necesariamente, gracias al Teorema del Sandwich,* $\lim \sqrt[n]{5^n + 7^n} = 7$.

Algunas sucesiones especiales y sus límites

(a) **La sucesión p-armónica:** Sea $p > 0$, se define $a_n = \dfrac{1}{n^p}$. La sucesión resultante $\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$ es, claramente, convergente a cero.

(b) **La sucesión potencia n-ésima:** Sea x un número real. Se define $a_n = x^n$ y se obtiene

$$\lim a_n = \lim x^n = \begin{cases} \infty & \text{si } -\infty < x < -1 \\ \nexists & \text{si } x = -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ +\infty & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(c) **La sucesión raíz n-ésima:** Se define por $a_n = \sqrt[n]{k}$ donde k es una constante positiva, entonces $\lim \sqrt[n]{k} = 1$.

(d) **La sucesión raíz n-ésima de n:** Se define $a_n = \sqrt[n]{n}$, entonces $\lim a_n = \lim \sqrt[n]{n} = 1$.

Sucesiones monótonas: crecientes y decrecientes

Definición 3 Sea (a_n) una sucesión.

(a) La sucesión (a_n) es *estrictamente creciente* si $a_{n+1} > a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se puede representar por $(a_n) \uparrow$.

(b) La sucesión (a_n) es *creciente* si $a_{n+1} \geqslant a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se acostumbra denotarla $(a_n) \nearrow$.

(c) La sucesión (a_n) es *estrictamente decreciente* si $a_{n+1} < a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. La simbología usada es $(a_n) \downarrow$.

(d) La sucesión (a_n) es *decreciente* si $a_{n+1} \leqslant a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. La terminología usada es $(a_n) \searrow$.

Ejemplo 16 *La sucesión (a_n) definida por $a_n = -\frac{1}{n}$ es estrictamente creciente.*

La sucesión (b_n) definida por $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \cdots)$ es creciente.

La sucesión (c_n) definida por $c_n = \frac{1}{n}$ es estrictamente decreciente.

La sucesión (d_n) definida por $(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \cdots)$ es decreciente.

La sucesión (h_n) definida por $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots)$ no es creciente ni decreciente.

Observación. A veces hay que demostrar que una sucesión es estrictamente creciente (o estrictamente decreciente), entonces se aconseja seguir los siguientes pasos:

(a.1) Verificar que $a_{n+1} - a_n > 0$, para todo número natural n (o, $a_{n+1} - a_n < 0$ para todo número natural n).

(a.2) Verificar si $a_n > 0$ para todo número natural n, luego ver si: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ (o $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, para todo número natural n) .

(a.3) Escribir $f(n) = a_n$ y verificar que $f'(n) > 0$ para todo número natural $n \geqslant 1$ (o bien $f'(n) < 0$ para todo número natural $n \geqslant 1$) .

Averiguando (a.1), (a.2) o (a.3), se determina el tipo de monotonía de la sucesión.

Ejemplo 17 *Para determinar la monotonía de la sucesión* (a_n) *definida por* $a_n = \frac{n^2+4n+3}{n^2+2n}$ *usaremos (a.3) de la observación anterior.*

Sea $f(x) = \frac{x^2+4x+3}{x^2+2x}$*, derivando en* $x = n$ *se obtiene*

$$f'(n) = \frac{(2n+4)(n^2+2n) - (2n+2)(n^2+4n+3)}{(n^2+2n)^2}.$$

Después de desarrollar y reducir términos semejantes,

$$f'(n) = \frac{-2n^2 - 6n - 6}{(n^2+2n)^2} < 0 \quad \textit{si } n \geqslant 1.$$

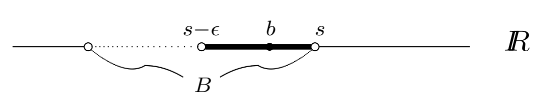
Como la derivada es negativa, entonces la sucesión $(a_n) \downarrow$.

El Axioma de Completitud. El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ (justo donde hemos puesto las imágenes de las sucesiones) verifica un axioma llamado *Axioma de Completitud*, que establece lo siguiente: *"Todo conjunto de números reales acotado tiene supremo"*.

En términos más explícitos ésto quiere decir que si $B \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado, entonces existe $s \in \mathbb{R}$ que satisface los dos siguientes requisitos:

1) $s \geqslant b$, $\forall\, b \in B$;

2) $\forall \epsilon > 0$, $\exists b \in B$ tal que $s - \epsilon < b \leqslant s$.

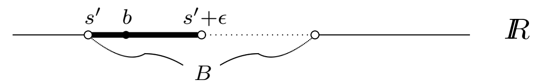


El número s, llamado *supremo* de B, se anota $s = \sup B$. Este número puede estar en B o no estar en él.

Lo anteriormente expresado para el supremo también se puede afirmar para el ínfimo: *"Todo conjunto de números reales acotado tiene ínfimo".*

En términos de desigualdades ésto quiere decir que si $B \subset I\!R$, B acotado, entonces existe $s' \in I\!R$ que satisface:

1) $s' \leqslant b \ , \ \forall b \in B$;



2) $\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists b \in B$ tal que $s' \leqslant b < s' + \epsilon$.

El número s', llamado *ínfimo* de B, se anota $s' = \inf B$.

Observaciones:

(a) Este axioma junto a la monotonía de las sucesiones permite establecer su convergencia sin necesidad de exhibir su límite.

(c) Toda sucesión creciente y acotada superiormente es acotada y toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es acotada.

(c) Es claro que si una sucesión (a_n) es creciente, entonces la sucesión $(-a_n)$ es decreciente.

Ejemplo 18 *La sucesión (a_n) definida por $a_n = \frac{2n-1}{n}$ es creciente. También es una sucesión acotada, el supremo del recorrido de a es $2 \notin Rec\ (a)$ y su ínfimo es $1 \in Rec\ (a)$. Además,* $\lim \frac{2n-1}{n} = 2 = \sup Rec\ (a)$.

La sucesión (b_n) definida por $b_n = \frac{1}{n}$ es decreciente. El supremo del recorrido de b es 1 y el ínfimo es 0. Observar que $1 \in Rec\ (b)$ y $0 \notin Rec\ (b)$. En este caso, $\lim \frac{1}{n} = 0 = \inf Rec\ (b)$.

El siguiente teorema es relevante para establecer la existencia de límite de sucesiones monótonas como también para su determinación.

Teorema 3 *Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente y su límite es el supremo de su recorrido.*

Un resultado equivalente al Teorema 3 es el siguiente corolario:

Corolario 4 *Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente y su límite es el ínfimo de su recorrido.*

El número e

Es este un número muy importante en el desarrollo de la matemática, aquí le dedicaremos un lugar preferente especialmente en lo que respecta a su génesis.

La siguiente proposición justifica la existencia del número e.

Proposición 4 *Las sucesiones* (a_n) *y* (b_n) *definidas, respectivamente, por* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *y* $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *son ambas convergentes y tienen el mismo límite.*

Demostración: Se afirma que (a_n) es creciente lo cual mostraremos usando la técnica de la derivada positiva.

Sea $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. Derivando en $x = n$

$$f'(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left[\ln(1+n) - \ln n - \frac{1}{1+n}\right]. \tag{2}$$

La expresión del paréntesis cuadrado en (2) es positiva si $n \geqslant 1$. Para verificar este aserto, consideremos la función definida por $g(x) = \ln x$ para $x \geqslant 1$. Por el Teorema del Valor Medio, podemos afirmar que

$$g(n+1) - g(n) = g'(x) = \frac{1}{x} \text{ para cierto } x \text{ que satisface } n < x < n+1 \,,$$

o sea,

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{x} \text{ para cierto } x \text{ que satisface } \frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{1}{n}.$$

Así, $\ln(n+1) - \ln n > \frac{1}{1+n}$, $n \geqslant 1$; es decir,

$$\ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{1+n} > 0.$$

Por consiguiente $f'(n) > 0$, para todo $n \geqslant 1$, y la sucesión (a_n) es creciente.

Ahora veremos que la sucesión $(b_n) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ es decreciente, usando la técnica de la derivada negativa para la función h definida por $h(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}$.

Derivando h y evaluando en $x = n$, resulta que

$$h'(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \left[\ln(1+n) - \ln n - \frac{1}{n}\right]. \tag{3}$$

La expresión del paréntesis cuadrado en (3) es negativa si $n \geqslant 1$, ya que de la identidad

$\ln(n+1) - \ln n = \dfrac{1}{x}$ y la desigualdad $\dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{n}$, se obtiene $\ln(n+1) - \ln n < \dfrac{1}{n}$.

Por tanto, $h'(n) < 0$ para todo $n \geqslant 1$. Luego, la sucesión (b_n) es decreciente.

Para ver que (a_n) es acotada superiormente (y que (b_n) es acotada inferiormente) verificaremos la desigualdad $a_n < b_n$, para todo número natural n. En efecto,

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = 1 + \frac{1}{n} > 1 \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

es decir, $a_n < b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, $a_n < b_1 = 4$ y $a_1 = 2 < b_n$ para todo número natural n.

Así, la sucesión (a_n) es creciente y acotada; la sucesión (b_n) es decreciente y acotada. Por lo tanto, ambas son sucesiones convergentes.

Se define el número e como sigue:

$$\mathbf{e} := \lim \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}}$$

Debido a que $\lim \frac{b_n}{a_n} = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, entonces $\lim b_n = \lim a_n$; es decir,

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$$

$\square$

A mayor valor de n mejor será la aproximación al límite. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} a_{10} &= \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} \approx 2{,}593 \ , \\ a_{100} &= \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2{,}704 \ , \\ a_{1000} &= \left(1 + \frac{1}{1000}\right)^{1000} \approx 2{,}716 \ . \end{aligned}$$

A pesar de que el orden 1000 es bastante elevado, la aproximación es magra; hay que buscar procedimientos más efectivos.

Ya que (b_n) es decreciente y $a_n < b_n$ para todo número natural n, se obtiene la desigualdad

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} < \mathrm{e} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Corolario 5 *Las sucesiones definidas por* $c_n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$ *y* $d_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ *convergen a los números* e *y* e^{-1}*, respectivamente.*

Demostración: Para la sucesión (c_n),

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} \quad \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{\mathrm{e}}{1}.$$

Para la sucesión (d_n),

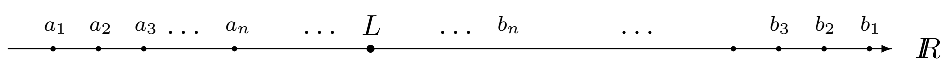
$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \quad \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Sucesiones monótonas contiguas

Definición 4 Un par de sucesiones (a_n), (b_n) se dicen *monótonas contiguas* si satisfacen las condiciones siguientes:

(1) (a_n) es creciente y (b_n) es decreciente,
(2) $a_n \leqslant b_n$ para todo número natural n,
(3) $\text{lím}(b_n - a_n) = 0$.

La condición (3) equivale a decir que $\text{lím}\, a_n = \text{lím}\, b_n$.



Ejemplo 19 *Las sucesiones (a_n) y (b_n) definidas por* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *son monótonas contiguas. Para verificar ésto mostraremos que se cumplen las tres condiciones de la Definición 4.*

En la Proposición 4 se probó que la sucesión (a_n) es creciente y que (b_n) es decreciente.

Como $\frac{b_n}{a_n} = \left(1+\frac{1}{n}\right) > 1$ *para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $a_n \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Además, $b_n - a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \quad \overset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$

Ejemplo 20 *Las sucesiones (a_n) y (b_n) definidas por* $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$, $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ *son monótonas contiguas. Además, tal como se probó en la monotonía del número e, se cumple:*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1) > 0$$

También,

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \ln(n) < 0$$

Lo anterior significa que $(a_n) \uparrow$ *y* $(b_n) \downarrow$.

Es claro que

$$b_n - a_n = \ln(n+1) - \ln n > 0$$

por tanto, $a_n < b_n$ *para todo número natural* n*; además,*

$$\begin{aligned} \text{lím}(b_n - a_n) &= \text{lím}(\ln(n+1) - \ln(n)) \\ &= \text{lím} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, la sucesión (a_n) es convergente (lo mismo que (b_n)).

El límite de la sucesión $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$ es conocido como **la constante** γ **de Euler-Mascheroni** y aparece espontáneamente en soluciones de ecuaciones diferenciales de la física matemática.

Con una calculadora se pueden obtener los primeros decimales de este número , $\gamma \approx 0,57721$ y no se sabe si se trata de un número racional o irracional, manteniéndose como un duro desafío para la comunidad matemática de la actualidad.