# ¿Por qué es importante la solución de Problemas?

**Heriberto Cisternas Escobedo**

**Colegio de Constitución**
**Departamento de Matemática**

Si la vida fuera de naturaleza tan constante que sólo tuviéramos que hacer unas cuantas tareas y que éstas se tuvieran que hacer una y otra vez exactamente del mismo modo, las razones del entrenamiento y conocimiento de cómo resolver problemas no sería tan compulsivo. Todo lo que tendría que hacer sería aprender cómo ejecutar las pocas faenas desde el primer momento. De allí en adelante se podría confiar en la memoria y en el hábito.

Afortunadamente e infortunadamente según cual sea el punto de vista, la vida no es tan simple ni inalterable. Más bien puede decirse que cambia rápidamente que casi todo lo que podemos predecir es que las cosas serán diferentes en el futuro. En un mundo tal, la capacidad de ajuste y solución de los propios problemas es de importancia primordial.

La necesidad de enseñar a los alumnos cómo formular y resolver problemas en que participe una reflexión cuantitativa es claro por lo demás; ya que estarán enfrentados permanentemente a situaciones problemáticas ya sea, en la vida diaria o en estudios posteriores.

Dentro de ésta enseñanza, hay una distinción entre lo que puede llamarse problema y lo que puede considerarse ejercicio. El último sirve para ejercitar al alumno en alguna técnica o procedimiento, y requiere poco o ningún razonamiento original o propio.

Así, cuando un estudiante que empieza el estudio del álgebra y haya conocido la fórmula cuadrática, se le deberá indudablemente ofrecer un conjunto de ejercicios en forma de ecuaciones cuadráticas específicas para que lo resuelva con el procedimiento (o fórmula) recientemente adquirido. La resolución de estos ejercicios ayudará a afianzar su dominio de la fórmula y asegurará su capacidad para emplearla. Por tanto, un ejercicio siempre puede resolverse con una razonable prontitud y con un mínimo de razonamiento creativo. En contraste con un ejercicio, un **problema**, si es adecuado para su nivel, requerirá que el alumno piense y razone. Tendrá que idear ataques estratégicos, algunos de los cuales puede fracasar, y otros, parcial o completamente llevarlo adelante. Puede necesitar consultar en los textos algún material relacionado, con la finalidad de impulsar un plan.

Resuelto adecuadamente un problema, el alumno deberá considerarlo para ver si puede idear una resolución distinta y tal vez mejor. Deberá buscar más deducciones, generalizaciones, aplicaciones y resultados relacionados. En resumen, deberá preocuparse por la cuestión durante algún tiempo, y examinarla cuidadosamente en todos sus aspectos. Para que sea adecuado, un problema deberá ser de tal naturaleza que el alumno no pueda resolverlo de inmediato.

**Construcciones euclidianas**

Un juego para una sola persona. Un juego es en particular bueno si es realmente excitante y tiene mucha variedad. Es aún mejor si además las reglas son muy pocas y simples. Y ojalá se puede jugar en cualquier sitio y en cualquier momento.

Los geómetras griegos de la antigüedad idearon un juego, que podría llamarse **solitario geométrico**. Durante las diversas épocas ha atraído multitud de jugadores y, aunque hayan pasado más de 2.000 años, parece que no ha perdido nada de estímulo y singular encanto.

**Algunas reglas de este fascinante juego:** las herramientas euclidianas.

Conviene recordar los tres primeros postulados de los **Elementos de Euclides**:

1. Puede trazarse una recta de un punto a otro.
2. Una recta finita puede prolongarse continuamente en línea recta.
3. Una circunferencia puede describirse tomando cualquier centro y una distancia.

Estos postulados enuncian las construcciones primitivas de las cuales todas las demás de los *Elementos* deben componerse. Constituyen por así decirlo, las *Reglas del Juego de la construcción Euclidiana*; como también restringen las construcciones sólo a aquellas que puedan hacerse en una forma admisible con regla y compás, estos dos instrumentos, así limitados, se conocen como las *herramientas euclidianas*.

Los primeros postulados nos indican lo que podemos hacer con una regla euclidiana, se nos permite trazar todo lo que se desee de la recta determinada por dos puntos dados. El tercer postulado nos indica lo que podemos hacer con el compás euclidiano; se nos permite describir la circunferencia con centro dado y que tenga, a partir de él, un segmento rectilíneo como radio; esto es; se nos permite describir la circunferencia de centro dado y que pase por un punto dado. Debemos tener en cuenta que ningún instrumento debe usarse para transportar distancias. Esto significa que la regla no puede marcarse, y que el compás ha de tener características de que si una cualquiera de sus patas se levanta del papel, el instrumento se cierra inmediatamente.

Por este motivo, un *compás moderno* en que éste conserve su abertura y, en consecuencia, puede utilizarse como un divisor para transportar distancias.

Hay construcciones que no pueden efectuarse con las herramientas euclidianas de entre ellas cabe destacar los tres problemas famosos de los geómetras griegos de la antigüedad:

- La duplicación del cubo
- La trisección de un ángulo
- La cuadratura del circulo

1.- **La duplicación del cubo**: O sea, el problema de la construcción de la arista de un cubo que tanga el doble del volumen de otro dado.

Este problema tiene un origen fabuloso y constituye el tema de una carta de Eratóstenes al rey Ptolomeo, que dice así: Uno de los antiguos poetas trágicos hacía aparecer en escena a Minos en el momento en que construía la tumba de Glauco, y, al observar que sólo medía cien pies por cada lado, dijo: "Es un espacio muy pequeño para sepulcro de un rey; duplicadla conservando su forma cúbica, duplicando cada lado".

Es evidente que se equivocaba porque duplicando los lados de una figura plana se cuadruplica, mientras que una sólida se octuplica; y entonces, se propuso su forma, y este problema se llamó duplicación del cubo.

2.- **La trisección del ángulo**: O sea, el problema de dividir un ángulo dado, cualquiera en tres partes iguales.

El problema de la trisección del ángulo – aunque se ignora su origen – no sería aventurado suponer que se lo plantearon los geómetras cuando supieron bisecarlo. Pappus de Alejandría y Nicomedes, del siglo III A.C. resolvieron el problema, pero sin emplear sólo regla y compás. Este último inventó un instrumento compuesto de tres reglas, para trisectar ángulos.

Durante 2.000 años se esforzaron los matemáticos por solucionar el problema geométricamente hasta que en 1837 el francés Wantzel demostró que no puede resolverse con regla y compás.

3.- **La cuadratura del círculo**: O sea, el problema de construir un cuadrado que tenga un área igual a la de un círculo dado.

Los antiguos geómetras griegos se plantearon problemas tales como el de construir una longitud de propiedades determinadas. Por ejemplo, construir el lado del cuadrado cuya área sea igual a la de un triángulo determinado. La palabra "construcción" tiene aquí un significado especial.

Dichos geómetras sólo podían usar regla y compás, o sea que podían trazar una recta entre dos puntos, o una circunferencia de centro y radio determinado, o bien combinaciones de estos dos procedimientos.

Podían imaginarse la existencia de otras curvas, pero como en la práctica no podían trazarlas con facilidad, no juegan papel ninguno en sus construcciones.

Resolvieron el problema del cuadrado de área igual a la de un triángulo y se les ocurrió construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado, construcción que había que hacer por los procedimientos euclidianos, es decir, empleando solamente regla y compás. Se designó al problema con el nombre de "Cuadratura del Círculo" y no lo resolvieron nunca. En la actualidad sabemos que ese problema es *insoluble*. La construcción que se pide es imposible.

Pero veamos este problema en geometría cartesiana. Podemos suponer que el radio del círculo sea 1 y entonces su área será $\pi$. El lado del cuadrado que se nos pide debe valer, por lo tanto, $\sqrt{\pi}$ .

El matemático alemán Lambert demostró en 1761 que $\pi$ es un número irracional. Dicha demostración es interesante, pero no prueba que la cuadratura del círculo sea imposible. Hay longitudes como $\sqrt{2}$, que se pueden construir con los procedimientos euclidianos, aunque no todas las longitudes irracionales se puedan construir por dichos métodos. Esto nos lleva a considerar longitudes de una clase especial, en la que no se encuentra $\sqrt{\pi}$. Otro matemático alemán, Lindemann, en 1882, demostró que $\pi$ no solamente es irracional, sino que es lo que se llama un número **trascendente**. Esto quiere decir que, al contrario, $\pi$ no es raíz de una ecuación algebraica con coeficientes enteros; de manera que ni $\pi$ ni $\sqrt{\pi}$ se pueden construir, luego es imposible la cuadratura del círculo.

Construcciones de este tipo que seguían sin resolverse, dieron nacimiento a uno de los más notables desarrollos en la matemática, cuando, después de siglos de investigación inútil, surgió la sospecha de que dichos problemas debían de ser irresolubles.

Los matemáticos se propusieron investigar la cuestión de: ¿Cómo es posible probar que ciertos problemas no pueden resolverse?

Fue el deseo de alcanzar claridad completa sobre esta cuestión lo que inspiró el magnifico desarrollo del álgebra moderna y la teoría de grupos iniciado por Ruffini, Abel y Galois (1811 – 1832).

Isaac Newton concibió el *cálculo infinitesimal*, al que llamó "método de las fluxiones", como un medio para resolver los problemas que se planteaba acerca del movimiento y trayectoria de los cuerpos. Lo concibió, en consecuencia, no como un acto mental de matemática pura, sino, aguijoneado por la necesidad de disponer de una herramienta que le preemitiese resolver un problema concreto. Su atención se concentró alrededor de los problemas principales. Primero, *el problema de las tangentes*: la determinación de las tangentes; esto es, el problema fundamental del cálculo infinitesimal. Segundo *el problema de las cuadraturas*: determinar el área encerrada por una curva dada o sea, el problema fundamental del cálculo integral. Cabe destacar que Newton publicó, sus resultados en su obra maestra, *Principa Mathematica*, los presentó al estilo de la Geometría clásica.

Estos grandes despliegues de conocimientos alcanzados por grandes hombres de ciencia permitieron a la geometría incursionar en otras áreas del saber. Es así, como las construcciones geométricas permiten la realización precisa de mapas, esquemas representativos de habitaciones, terrenos, muebles, campos de deportes; secciones de animales, plantas, máquinas, etc.

Este tipo de construcciones y los problemas que ellos involucran tienen mucha importancia práctica y formativa, además de las numerosas aplicaciones en la vida diaria. Las resoluciones de los problemas que se pueden trazar con regla y compás tienen un importante valor práctico en el dibujo mecánico y, por eso, los dibujantes profesionales, arquitectos y artistas las conocen bien.

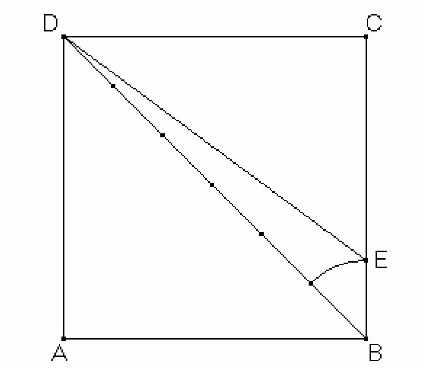
**Soluciones aproximadas de los tres problemas famosos de la antigüedad**

**A**.- **La duplicación del cubo**.

El siguiente procedimiento muestra una solución aproximada, que se efectúa con regla y compás, del problema de la duplicación del cubo.

*Construcción*:

1. Dibujamos el cuadrado ABCD; una de las caras del cubo del que deseamos doblar su volumen.
2. Trazamos la diagonal BD.
3. Dividimos la diagonal BD en seis partes iguales.
4. Llevemos sobre el lado BC, a partir de B, un segmento BE igual a la sexta parte de la diagonal.
5. Unimos D con E: el segmento DE es aproximadamente igual a la arista del cubo cuyo volumen es el doble del cubo cado.




La aproximación es de cerca de dos milésimos; es decir, de dos milímetros por metro.

**B. La trisección del ángulo**

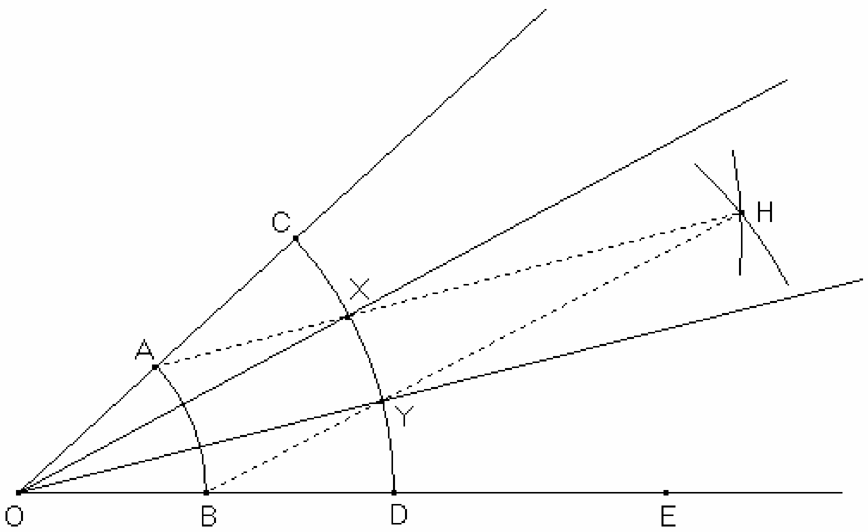
Esta es una aproximación muy sencilla de la trisección del ángulo que se construye utilizando sólo regla y compás.

Construcción:

1. Copiamos el ángulo a trisectar, sea este $\angle AOB$.
2. Dibujamos los arcos de centro O y radios OB y OD; siendo $\overline{OD} = 2 \cdot \overline{OB}$.
3. Trazamos $\overline{DE} = \overline{DC}$.
4. Determinamos F en la intersección de la circunferencia de centro de D y radio $\overline{OE}$ y circunferencia de centro en C y radio $\overline{OE}$.
5. Determinamos H en la intersección de la circunferencia de centro de D y radio $\overline{EF}$ y

circunferencia de centro en C y radio $\overline{EF}$.

6. Unimos H con A y B.
7. Determinamos los puntos X e Y que al ser unidos con O se obtienen aproximadamente las trisectrices del $\angle AOB$.




Previamente a exhibir una aproximación del problema de la "Cuadratura del Círculo", abordaré otro problema histórico que fue estudiado por los matemáticos griegos 500 o más años A.C. que consiste en *determinar un trazo que tenga la misma longitud que una circunferencia de radio "r"*, y que se conoce con el nombre de *Rectificación de la circunferencia*".

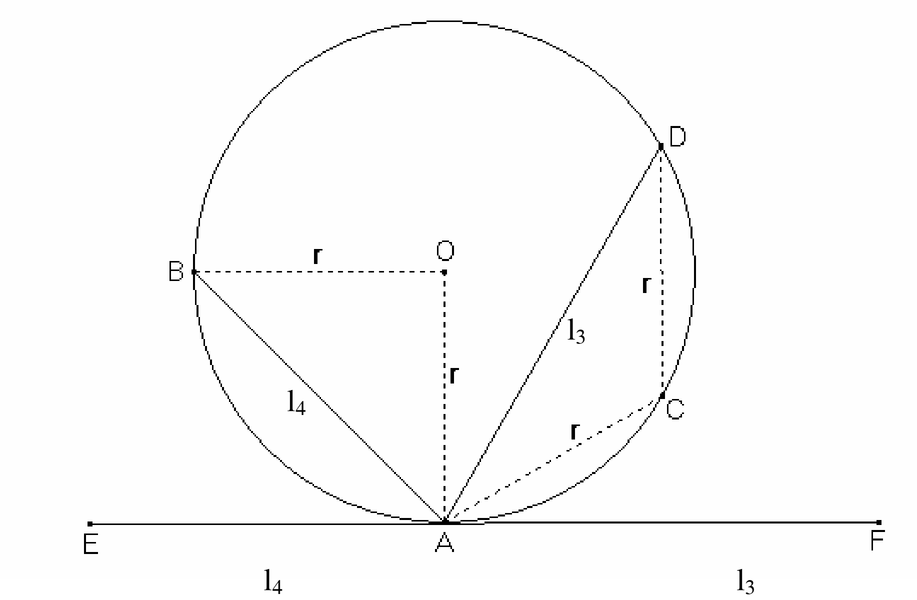
Esta es una *solución aproximada* de este problema:

*Construcción*:

1. Describimos la circunferencia de centro O y radio "r".
2. Dibujamos $\Delta AOB$, tal que $\overline{OA} \perp \overline{OB}$.
3. Obtenemos $\overline{AB} = l_4 = r\sqrt{2}$.
4. Dibujamos $\Delta ACD$, tal que $\overline{AC} = \overline{CD} = r$
5. Obtenemos $\overline{AD} = l_3 = r\sqrt{3}$
6. Copiamos $\overline{AE} = l_4$ y $\overline{AF} = l_3$.

$$
\begin{aligned}
\overline{EF} &= l_4 + l_3 \\
&= r\sqrt{2} + r\sqrt{3} \\
&= r\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \\
&\approx r(1{,}41 + 1{,}73) \\
&\approx 3{,}14 \cdot r
\end{aligned}
$$

7. Obtenemos:




$\overline{EF} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$, en que $2\pi r$ es la longitud de la circunferencia de centro O y radio “r”.

## C. LA CUADRATURA DEL CIRCULO

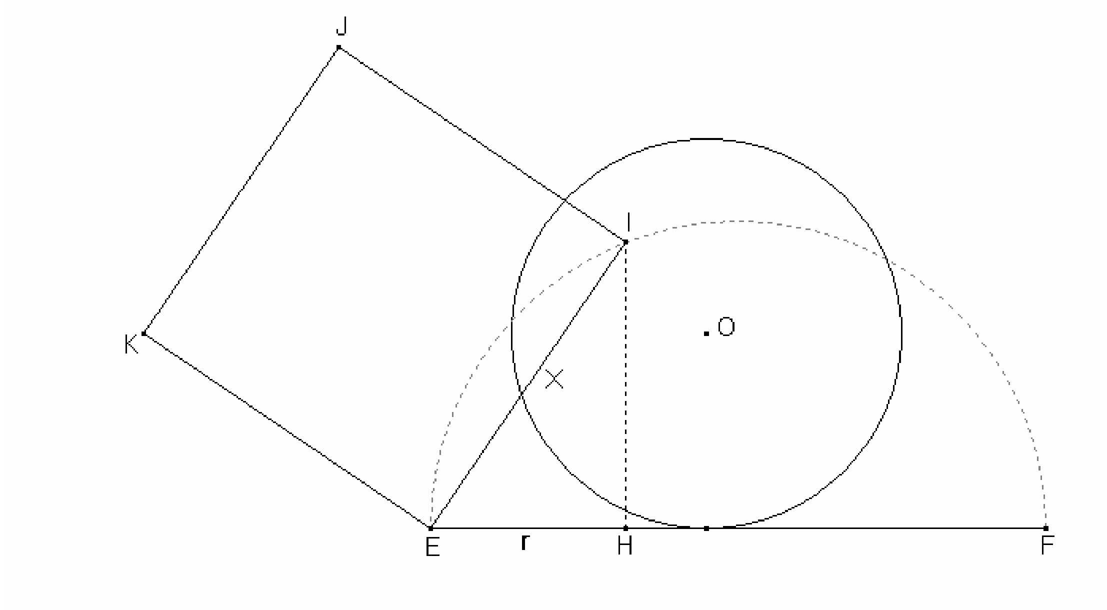
Como se mencionó anteriormente, que $\pi$ es un número irracional, solo daré una solución aproximada de la cuadratura del círculo; en virtud de que interesa calcular X el lado del cuadrado tal que $X^2 = \pi\ r^2$

Construcción:

1. Describimos circunferencia de centro en O y radio “r”.
2. Determinemos $\overline{EF} = \pi \cdot r$ (problema anterior)
3. Dibujamos la semi-circunferencia de diámetro $\overline{EF}$.
4. copiamos $\overline{EH} = r$
5. Levantamos en H la perpendicular hasta cortar la semi-circunferencia en I.

6. Obtenemos $\overline{EI} = X$ ; es decir, $\overline{EI}$ es el lado del cuadrado pedido.

Por lo tanto: Cuadrado EIJK = Circunferencia (O,r)




**Bibliografía**

1. Courant Richard y Robbins Herbert. *¿Qué es la matemática*?. Editorial Aguilar: Madrid 1962. Tercera edición.
2. Cisternas Escobedo, Heriberto *Construcciones Planimétricas*. Seminario para optar al título de Profesor de Estado en Matemática. Prof. Guía Sra: Ana Fuenzalida C. Universidad de Talca. 1986.
3. Vera Francisco. *Breve Historia de la Geometría*. Editorial Losada. Buenos Aires. Argentina 1963.
4. Polya George. *¿Cómo Plantear y Resolver Problemas*?. Editorial Trillas, S.A. México, D.F. 1965.