Media aritmética versus media geométrica

Juana Contreras Sepúlveda.♣
Claudio del Pino Ormachea.♦

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

En principio, la solución de un problema de máximo conduce siempre a una desigualdad, la cual expresa el hecho de que la variable que se considera es menor o a lo sumo igual al valor máximo que proporciona la solución.
Courant y Robbins.

Introducción

En la enseñanza de la matemática a nivel medio, los números reales juegan un rol preponderante: toda la operatoria numérica y el trabajo algebraico descansa en la estructura de campo de IR. Pero además de tener IR esta estructura algebraica, es ordenado, de donde surgen las temáticas de desigualdades e inecuaciones. En este trabajo se revisan algunas desigualdades relevantes entre medias de números reales, en particular entre la media geométrica y la media aritmética, y se destacan algunas de sus aplicaciones en problemas de optimización.

Desigualdades en IR

El orden en los números reales descansa en los siguientes axiomas: Se acepta que IR tiene un subconjunto, denotado por IR^+, el cual satisface:

A1 *Clausura de* IR^+ *para la adición y multiplicación*: Para todo par de números reales, x e y, si $x, y \in IR^+$ entonces $xy \in IR^+$ y $x + y \in IR^+$.

A2 *Propiedad de tricotomía*: Si x es un número real, entonces se cumple una y solo una de las siguientes posibilidades: $(x \in IR^+)$ o $(-x \in IR^+)$ o $(x = 0)$.

Luego de estos axiomas, se define la relación <, por $a < b \quad \Leftrightarrow \quad (b - a) \in IR^+$

De esta definición[1] y los axiomas de orden, de deducen con relativa facilidad las siguientes propiedades[2] de las desigualdades:

1. $x < y \Rightarrow x \pm a < y \pm a$

♣ e-mail: jcontres@utalca.cl
♦ e-mail: cdelpino@utalca.cl

[1] De manera análoga se define las relaciones: $\leq, >, \geq$.

[2] Análogas propiedades se cumplen para las otras relaciones de desigualdad.

2. $x < y$ y $a > 0 \Rightarrow ax < ay$
3. $x < y$ y $a < 0 \Rightarrow ax > ay$
4. $x < y$ y $u < v \Rightarrow x + u < y + v$
5. $0 \le x < y$ y $0 \le u < v \Rightarrow xu < yv$

En los análisis que siguen en este trabajo, observaremos que hay una desigualdad de frecuente uso:

Propiedad básica: Para todo número real x se cumple que $x^2 \ge 0,$ donde la igualdad se cumple si y solo si $x = 0.$

Esta propiedad tiene la siguiente generalización:

Propiedad básica generalizada: Si $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son n números reales, entonces $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \ge 0,$ donde la igualdad se cumple si y solo si $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$

Desigualdades clásicas entre *medias* de los números reales

Empezamos con una serie de desigualdades relativas a *medias* (*promedios*). Como se sabe existen varios tipos de promedios[3]. En primer lugar, presentamos los promedios entre dos números reales *positivos* x e y:

Media aritmética: $MA_2(x, y) = \dfrac{x + y}{2}$

Media geométrica: $MG_2(x, y) = \sqrt{x \cdot y}$

Media armónica: $MH_2(x, y) = \dfrac{2}{1/x + 1/y}$

Media cuadrática: $MC_2(x, y) = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{2}}$

Teorema 1: Si x e y dos números reales positivos, entonces se cumplen las siguientes 5 desigualdades:

$$\underbrace{\min(x, y) \le MH_2(x, y)}_{\textbf{(1)}} \le \overbrace{}^{\textbf{(2)}} \underbrace{MG_2(x, y) \le MA_2(x, y)}_{\textbf{(3)}} \le \overbrace{}^{\textbf{(4)}} \underbrace{MC_2(x, y) \le \max(x, y)}_{\textbf{(5)}}$$

[3] En general *un promedio* de un conjunto de datos, es un número que representa la escala de valores de este conjunto. Las propiedades básicas de un promedio son que su valor debe estar comprendido entre el mínimo y el máximo del conjunto de datos, y que su valor no se debe alterar al cambiar la escala de medida (homogeneidad).

Demostración: Las 5 demostraciones a realizar son esencialmente semejantes, por esta razón solamente nos detendremos en la demostración de la relación entre la media geométrica y la media aritmética. Esta clásica desigualdad tiene diversas demostraciones, se revisarán algunas demostraciones algebraicas y otras geométricas.

Demostraciones algebraicas de (3):

(A). Usando la desigualdad básica $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0$, se tiene:

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x+y-2\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Además, la igualdad se cumple solamente cuando $x = y$. ■

(B). Usando la desigualdad básica $(x-y)^2 \geq 0$, se tiene:

$$\begin{gathered}(x-y)^2 \geq 0 \\ \Updownarrow \\ x^2+y^2-2xy \geq 0 \\ \Updownarrow \\ x^2+y^2+2xy \geq 4xy \\ \Updownarrow \\ (x+y)^2 \geq 4xy \\ \Updownarrow \\ \frac{(x+y)^2}{4} \geq xy \\ \Updownarrow \\ \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}\end{gathered}$$

■

(C). Usando la desigualdad básica $(a-b)^2 \geq 0$, con a y b positivos, se tiene que:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$$

Ahora, reemplazando $a=\sqrt{x}$ y $b=\sqrt{y}$, en la última desigualdad, se tiene:

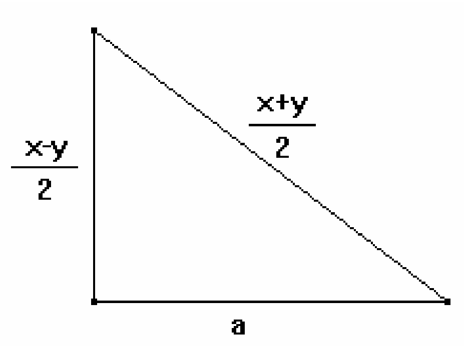
$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

■

(D). Partiendo de la identidad $(x+y)^2-4xy=(x-y)^2$, al ser $(x-y)^2 \geq 0$ se tiene que $(x+y)^2-4xy \geq 0$. Ordenando convenientemente esta última desigualdad se verifica que $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$. ■

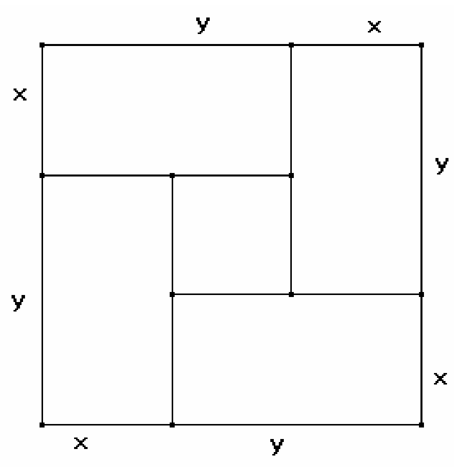
Demostraciones geométricas de (3):

(A). Para efecto de la siguiente construcción, se asume que $x > y$. Construyendo un triángulo rectángulo con un cateto igual $\frac{x-y}{2}$ e hipotenusa igual a $\frac{x+y}{2}$



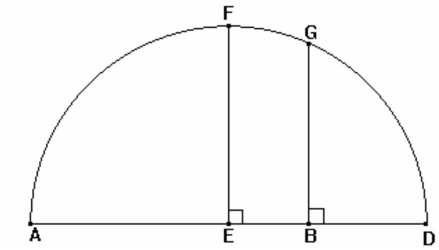
Usando el teorema de Pitágoras, se obtiene que el otro cateto de este triángulo rectángulo, **a**, es igual a $\sqrt{xy}$. Recordando que un triángulo rectángulo la hipotenusa en mayor que cada uno de sus catetos, se obtiene que $\frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$. ■

(B). En un cuadrado de lado $x + y$ se *incorporan* 4 rectángulos de lados x e y:



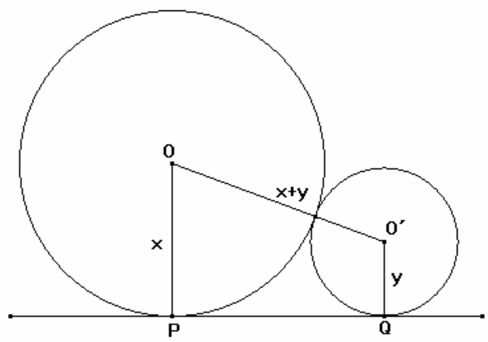
Por inspección de la figura precedente es claro que $4xy \le (x+y)^2$, relación de la cual se deriva la desigualdad deseada, donde la igualdad se cumple cuando $x = y$. ■

(C). En la siguiente semicircunferencia



Se tiene que AB=x, BD=y, AE=EF=$\frac{x+y}{2}$. Es claro que la longitud del segmento BG es $\sqrt{xy}$. Por lo tanto, se verificado que $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, con igualdad cuando $x = y$. ■

(D). En la siguiente figura



Se obtiene que PQ=$2\sqrt{xy}$. Luego, $2\sqrt{xy} \le x+y$. De donde $\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$, con igualdad cuando $x = y$. ■

Extensiones de las desigualdades entre medias

Como es de suponer, las 4 medias definidas al comienzo y las 5 desigualdades establecidas en el Teorema 1, admiten generalizaciones, es decir, se pueden extender a *n* números reales. En efecto:

Dado un conjunto arbitrario de *n* números reales positivos, $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$, se definen sus siguientes *promedios*:

Media aritmética: $MA_n(A) = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$

Media geométrica: $MG_n(A) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n}$

$$\text{Media armónica: } MH_n(A) = \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3 + \ldots + 1/x_n}$$

$$\text{Media cuadrática: } MC_n(A) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots x_n^2}{n}}$$

y el teorema 1, se generaliza al

Teorema 2: Dado un conjunto arbitrario de n números reales positivos, $A = \{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$, se tiene que

$$\underbrace{\min(A) \le \mathrlap{\overbrace{}^{\textbf{(7)}}}MH_n(A)}_{\textbf{(6)}} \le \underbrace{MG_n(A) \le \mathrlap{\overbrace{}^{\textbf{(9)}}}MA_n(A)}_{\textbf{(8)}} \le \underbrace{MC_n(A) \le \max(A)}_{\textbf{(10)}}$$

donde la igualdad se cumple, siempre y cuando, $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n$.

Al igual que el teorema 1, nos detendremos solamente en la desigualdad (8), desigualdad conocida como teorema de Cauchy[4], quien la demostró a comienzos del siglo XIX. Para esta desigualdad, se han encontrado tantas demostraciones diferentes, que ha llegado a competir, en este aspecto, con el Teorema de Pitágoras. A continuación se exponen las dos ideas claves que Cauchy usó en su demostración de (8). Para simplificar, en lo que sigue usaremos que $\underline{P_n : MG_n(A) \le MA_n(A).}$

Idea clave 1: Cauchy observó que se podía verificar P_4 a partir de P_2. En efecto:

$$\begin{aligned}
x_1x_2x_3x_4 &= (x_1x_2)(x_3x_4) \\
&\le \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 \left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2 && \text{por } P_2 \\
&= \left[\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right]^2 \\
&\le \left[\left\{\frac{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)}{2}\right\}^2\right]^2 && \text{por } P_2 \\
&= \left[\left\{\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right\}^2\right]^2
\end{aligned}$$

[4] Agustín Cauchy (1789 - 1857), matemático francés nació en París durante la Revolución francesa.

$$= \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \right)^4$$

y la igualdad se cumple siempre y cuando $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. Ahora, usando P_4, se puede verificar análogamente P_8. Luego con este procedimiento, se puede probar P_n para todo natural de la forma $n = 2^k$.

Idea clave 2: A continuación, la pregunta natural que surge es: ¿y cómo se puede proceder para verificar P_n cuando n no es una potencia de 2?. Veamos la manera como procedió Cauchy. Se ejemplifica el procedimiento con $n = 29$. La potencia de 2 que sigue a 29 es 32 (=2^5) y suponemos que se ha verificado P_n para n=32, repitiendo las estrategia recién comentada para pasar de P_4 a P_8, de P_8 a P_{16} y de P_{16} a P_{32}. Lo que se necesita verificar ahora es:

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_{29} \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{29}}{29} \right)^{29}$$

Sea $X = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{29}}{29}$. Usando P_{32} se tiene que

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_{29} XXX \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{29} + X + X + X}{32} \right)^{32}$$

Como $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{29} = 29X$

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_{29} XXX \leq \left(\frac{29X + X + X + X}{32} \right)^{32} = \left(\frac{32X}{32} \right)^{32} = X^{32}$$

es decir,

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_{29} XXX \leq X^{32}$$

de donde,

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_{29} \leq X^{29}$$

o sea,

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_{29} \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{29}}{29} \right)^{29}$$

que es justamente lo que se quería verificar.

Usando las ideas claves recién comentadas, se puede estructurar una demostración formal de (8), usando inducción matemática.

Este trabajo termina, tal como se había anunciado, con algunas aplicaciones de la desigualdad entre la media geométrica y media aritmética, en la comprobación de algunas desigualdades particulares y en la resolución de ciertos problemas de optimización.

Aplicación 1: Verificar que la suma de un número positivo con su recíproco siempre es mayor o igual 2.

Desarrollo: Sea $x > 0$. Entonces, usando P_2, se obtiene:

$1 = x \cdot \frac{1}{x} \leq \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{2} \right)^2 \Rightarrow 1 \leq \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{2} \right)^2 \Rightarrow 1 \leq \frac{1 + \frac{1}{x}}{2}$, de donde se tiene que $1 + \frac{1}{x} \geq 2$, que es justamente lo que se pedía verificar.

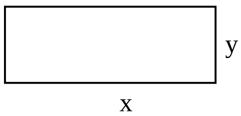
Nota: Lo que se usa en la comprobación precedente es que $x \cdot \frac{1}{x} = 1$, luego la aplicación 1 se puede generalizar a las siguientes propiedades:

Propiedad: Dados dos números reales positivos x e y tales que $xy = 1$, se tiene que $x + y \geq 2$.

Propiedad: Dados n números reales positivos $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$.
Si $x_1 x_2 x_3 \cdots x_n = 1$, entonces $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \geq n$.

Aplicación 2: De todos los rectángulos de perímetro 20, determinar cuál de ellos tiene área máxima.

Desarrollo: Consideremos el siguiente rectángulo



De acuerdo a la información $x+y=10$ y se debe maximizar $A=xy$.
Usando P_2, se tiene

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad \Leftrightarrow \quad xy \leq \left(\frac{x+y}{2} \right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad xy \leq 25$$

Luego, todos los rectángulos de perímetro 20 tienen un área a lo sumo igual a 25, y la igualdad se alcanza cuando $x = y = 5$. Por lo tanto, el área máxima se obtiene en un cuadrado de lado 5.

Nota: Como es de suponer, también se puede plantear el *problema dual* a la aplicación 2: "De todos los rectángulos de *área fija*, determinar cuál de ellos tiene *perímetro mínimo*". Se sugiere resolver este problema para concluir que, al igual que la aplicación precedente, "de los rectángulos que tienen área fija el cuadrado es el que tiene perímetro mínimo".

Aplicación 3: Verificar que entre todos los triángulos que tienen un perímetro dado, el triángulo equilátero es el que tiene mayor área.

Desarrollo: Sea p el perímetro fijo y supongamos que tenemos un triángulo T de área A y lados a, b y c. Por la fórmula de Herón

$$A^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

donde s es el semiperímetro de T, es decir, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.

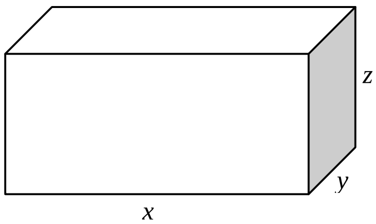
Es claro que, maximizar A es equivalente a maximizar A^2. Además, maximizar A^2 es equivalente a maximizar $(s-a)(s-b)(s-c)$, pues s es constante y positivo. Ahora bien, usando P_3, se tiene que:

$$(s-a)(s-b)(s-c) \le \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{s}{3}\right)^3$$

y la igualdad se obtiene cuando $s-a = s-b = s-c = 0$, es decir, cuando $a = b = c$. Por lo tanto el área es máxima cuando el triángulo T es equilátero.

Aplicación 4: Verificar que entre todas las cajas rectangulares (paralelepípedos) que tienen un área superficial fija, el cubo es el que tiene mayor volumen.

Desarrollo: Consideremos la siguiente caja rectangular



Luego $V = xyz$ y su área superficial viene dada por $A = 2xy + 2xz + 2yz$ (con A constante). Usando la desigualdad P_3 (desigualdad entre la media aritmética y media geométrica para tres números positivos) para los números xy, xz e yz; se tiene:

$$\frac{xy+xz+yz}{3} \ge [(xy)(xz)(yz)]^{1/3} = (xyz)^{2/3} = V^{2/3}$$

Y la igualdad se alcanza cuando $xy = xz = yz$, es decir, cuando $x = y = z$. Además como $xy + xz + yz = \dfrac{A}{2}$, se tiene que $\dfrac{A}{6} \ge V^{2/3}$. Equivalentemente, $\left(\dfrac{A}{6}\right)^{3/2} \ge V$.

Por lo tanto, el volumen de una caja rectangular con área superficial constante e igual a A es siempre menor o igual $\left(\dfrac{A}{6}\right)^{3/2}$, y este valor es alcanzado siempre y cuando $x = y = z = \left(\dfrac{A}{6}\right)^{1/2}$.

Entonces, el volumen es máximo cuando la caja es un cubo.

Antes de finalizar se dejan propuestas algunas aplicaciones adicionales, entre ellas, recuperar, con las técnicas comentadas en este trabajo, el conocido máximo de una parábola:

Aplicación propuesta 1 (Máximo de una parábola): Si a > 0, el máximo de la parábola $y = x(a-x)$ se obtiene en $x = \frac{a}{2}$ y toma el valor $\frac{a^2}{4}$.

Aplicación propuesta 2: Un granjero tiene 200 metros de alambrado para cercar una región rectangular a lo largo de la costa de un río (costa que podemos suponer recta), poniendo el alambrado sobre los tres lados del rectángulo que no están sobre la costa. ¿Cuáles serán las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede cercar?

Aplicación propuesta 3: Verificar que si x e y son reales positivos y n, m son enteros positivos, entonces $\left(x^n\, y^m\right)^{\frac{1}{n+m}} \leq \frac{nx+my}{m+n}$.

Bibliografía

1. Beckenbach, E., Bellman, R. *An introduction to inequalities*. Ed. Random House. 1961.
2. Courant, R., y Robbins, H. ¿*Qué es la matemática*?.Editorial Aguilar. Madrid 1962.
3. Georgakis, C. *On the inequality for the arithmetic and geometric means*. Journal Mathematics, Inequalities and applications. Vol. 5 N° 2. 2002.
4. González, Gonzalo. *Solución de problemas de optimización usando Geometría Dinámica*. III Congreso Iberoamericano de Cabri IBEROCABRI. 2006. http://macareo.pucp.edu.pe/~mgonzal/IBEROCABRI%202006%20conferencia.pdf
5. Ortega, J. *Reordenamiento de conjuntos y Desigualdades*. http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/Reareglo/index.html
6. Teknomo, Kardi. *Mean or Average*. http://people.revoledu.com/kardi/ tutorial/BasicMath/Average/
7. Wu, H. *The isoperimetric inequality: the algebraic viewpoint* http://math.berkeley.edu/~wu/HSI1.pdf