C.Q.D.: Como Quisiéramos Demostrar

Claudio Alsina[1]

¡Bienvenidas y bienvenidos! a esta conferencia sobre la demostración. En la enseñanza de las Matemáticas el tema de demostrar es un reto transversal importantísimo que a menudo fluctúa entre el olvido más radical y la perseverancia más exagerada. Mucho me complacería aportar en esta conferencia un poco de luz docente a este tema.

*****

Fondo musical: Lo que el viento se llevó. Tema de Tara (M. Steiner) Westminter Philarmonic.

Escarlata*: ¡Oh! Red. Nuestro mundo se tambalea. Tantos cambios. Tantas reformas... ¿y las demostraciones? ¿Dónde están las demostraciones?.*

Red : *Las demostraciones, querida, el viento se las llevó.*

Escarlata : *Lo están destruyendo todo. No calculan, no memorizan las tablas, no recitan los axiomas de Euclides... ¿A dónde iremos a parar?...*

Red : *Peor que nosotros no creo que salgan, Escarlata. Nosotros no aprendimos nada. Fuimos cotorras de tablas y palabras, pero nada más.*

Escarlata *: ¡Oh Red!. Pero, y aquellas clases donde todos aprendíamos que la suma de los catetos es la hipotenusa... El sur se hunde y con los vientos del norte ya no quedará ni rastro de aquella enseñanza...*

Red : *Siempre fuiste sorprendente querida. ¿Qué valor tuvo para nuestras vidas saber que tres puntos cualesquiera determinan una recta?.*

Escarlata : *¡Oh! Red, claro que tuvo valor. Nosotras sabíamos que tres puntos cualesquiera determinan una recta. Pero los otros no lo sabían... y ahí estaba la diferencia con los que fuimos a la escuela.*

Red : *Querida, tu nunca fuiste a la escuela. Tu siempre tuviste una tutora en Tara...*

Escarlata *: No me intentes confundir con tus palabras. A Dios pongo por testigo que vamos a seguir demostrando. Aunque tengamos que reír o llorar. A Dios pongo por testigo que nunca más dejaremos teoremas sin pruebas...*

*****

[1] Catedrático de matemáticas de la Universidad Politécnica de Cataluña.
http://www.upc.es/ea-smi/personal/claudi/materials.html

Cariño... ¡demuéstrame que me amas!

En este primer apartado nos gustaría resaltar los muchos significados que el verbo "**demostrar**" tiene en los ámbitos sociales y profesionales más diversos. Parece que, hoy, "**demostraciones**" de todo tipo forman ya parte de la vida de las personas.

La demostración en el ámbito social

La sociedad en general hace usos diversos del término demostración. En un sentido pragmático, demostrar es realizar la acción efectiva que evidencia aquello que se pretende ver. Este es el caso del aforismo popular: "el movimiento **se demuestra** andando" o del compasivo "con todo lo que ha aguantado **demuestra** tener paciencia". Lamentablemente a partir de un sólo ejemplo muchas personas aplican una falsa inducción completa y a través de la expresión: "**esto demuestra que**..." se saca una conclusión universal. Esta debilidad es explotada por el mundo de la publicidad donde un sólo ejemplo aparece como "**demostración**" de que un producto funciona, una crema rejuvenece, o un licor gusta más que otro.

También se asimila la demostración al hecho de que se enseñe como hacer algo (demostración de cómo funciona una licuadora o de cómo se hace un pastel).

La demostración en el ámbito filosófico

En la tradición platónico-aristotélica y hasta nuestros días, reluce con gran esplendor cognitivo la **demostración** como derivación de un enunciado a partir de otros enunciados (llamados premisas), mediante la aplicación de determinadas leyes lógicas. Aquí se encuadran tanto las demostraciones matemáticas tradicionales (axiomas-deducciones-teoremas) como las teorías escolásticas, las visiones empíricas, las justificaciones psicológicas, etc, etc, etc. En cualquiera de las múltiples versiones que la demostración filosófica pueda presentar, subyace siempre el objetivo de probar la validez de algo o su existencia, **una búsqueda razonable de la verdad**.

La demostración en el ámbito religioso

En el pensamiento teológico cristiano gozan de enorme tradición las llamadas **demostraciones de la existencia de Dios**. Se trata de diversas argumentaciones, a menudo presentadas en forma lógico-filosófica, cuya tesis final es la existencia de Dios pero cuya finalidad práctica es el adoctrinamiento del no creyente o la reconfirmación del creyente en su fe. Para el creyente, **la demostración** pasa a ser un acto teológico de contemplación.

También Dios **demuestra** sus infinitas bondades a través de diversas facetas que van desde el perdón al premio, desde la ocurrencia de un suceso terrenal normal a un milagro.

La demostración en el ámbito militar

En el mundo castrense son frecuentes **las demostraciones de fuerza**, actos que en tiempos de paz dan lugar a desfiles ante la población civil y que en tiempos de guerra dan lugar a monstruosas destrucciones de la población civil. También entienden por **demostrar** hacer cualquier acto que intimide al enemigo o a la víctima y admiten como conveniente hacer **demostraciones para despistar** al enemigo.

La demostración en el ámbito jurídico

Tanto al juzgar como al establecer los hechos o determinar lo que sucedió, descubriendo a los culpables, es tradicional en abogados, jueces, fiscales, defensores, inspectores, etc. apelar a la necesidad de **demostrar la veracidad** del modelo propuesto para explicar la sucesión de los hechos. Usan por ello una combinación curiosa de objetos reales (videos, cadenas, grabaciones, cadáveres, etc.) y de razonamientos lógicos que "expliquen" lo acaecido, dando por supuesto en general que el sentido común es universal y que deben existir motivaciones para realizar cualquier acto.

La demostración en el ámbito conyugal

Incluso en este ámbito tan finito, pero tan variable, de las parejas, se ha instalado la costumbre de hablar de demostraciones. En un sentido pícaro se hace referencia a las "**demostraciones de amor**" como una forma jurídica de referirse a todo tipo de caricias y prácticas amatorias. En un sentido más interesado es frecuente oír la expresión que encabeza este apartado

Cariño, ... ¡demuéstrame que me amas!.

forma imperativa, frecuentemente relacionada con ámbitos del consumo, que a menudo da lugar a insólitas **demostraciones** en forma de pulseras, collares, pendientes, anillos, viajes, transferencias, etc. Por eso cuando estos objetos no aparecen se dice:

"**Nunca me has demostrado tus verdaderos sentimientos**",

como si la ausencia de regalos no fuera una demostración clara del estado en que dichos sentimientos se encuentran.

Vale la pena evocar aquí el epigrama de Samuel Johnson:

"Las personas que se vuelven a casar
son la **demostración** de que la esperanza
pesa más que la experiencia".

Como queríamos demostrar

Es en el ámbito matemático donde la idea de demostración y el verbo demostrar adquieren, históricamente, una dimensión notabilísima.

Fue precisamente la autoexigencia de razonamiento deductivo la que marcó el final de una matemática experimental y dio paso a la matemática tal como la entendemos hoy en día.

Los ideales platónico-aristotélicos propios de la filosofía y de la lógica filosófica impregnaron la matemática griega, y con ella buena parte de nuestra cultura.

Motivos sociológicos, políticos y filosóficos pueden explicar dicha obstinación griega por hacer prevalecer la racionalidad deductiva sobre otras formas humanas de pensar.

En el mundo del "**homo mathematicus**" la demostración final es la culminación de un proceso, la presentación limpia y ordenada de una larga investigación nunca exenta de experimentalidad, intuición, pruebas, errores, refinamientos, etc. Es así como el "**homo demonstrans**" descubre que demostrar "en vivo" es una tarea cognitivamente compleja, no siempre tan diáfana como su redacción final parece indicar.

Morris Kline (Mathematics in Western Culture, Oxford Univ. Press, Oxford, 1964) proclama:

> *"La deducción como método para obtener conclusiones tiene muchas ventajas sobre el método de prueba-error, el razonamiento por inducción o la analogía... pero a pesar de estas ventajas no puede anular estas otras formas de razonar...".*
> *A efectos prácticos, la deducción verdadera es a veces superflua. Un grado alto de probabilidad puede ser suficiente."*

Pero más allá del alumbramiento de un teorema original, es preciso constatar que los teoremas tienen una evolución a lo largo de los años. Las demostraciones parecen vivir, a lo largo del tiempo, unos curiosos cambios:

- **La peor demostración suele ser la primera**
  Este parece un principio de una "ley matemática de Peter". Pero acostumbra a ser así. La primera demostración que se da de un teorema matemático acostumbra a ser una demostración en bruto, un argumento de urgencia con el que se ha descubierto el propio teorema. Acostumbra a ser larga, rocambolesca, abstracta, repleta de formalismos, etc. En este sentido cinco mil años de historia nos contemplan.

- **Las demostraciones mejoran con los años**
  Con el paso de los años y desde la confianza y la comprensión profunda del nuevo resultado, se simplifican pasos, se mejoran notaciones, se hallan visualizaciones que aclaran, se formulan demostraciones alternativas... y es frecuente que se acabe encontrando una demostración ideal e incluso un abanico de demostraciones alternativas para poder escoger.

- **La demostración ideal es una esperanza latente**
  La inmensa mayoría de los matemáticos confían en que a la larga "se encontrará" una demostración ideal (elegante, corta, leíble, divulgable,...) aunque saben que la espera puede ser larga. Permitan que cite aqui el reciente libro de M. Aigner y G.M. Ziegler "Proofs from de The BOOK" (Springer, New York, 1998), libro en el cual se recopilan grandes ejemplos de demostraciones maravillosas. Sus autores hacen con ello un homenaje a Paul Erdös a quien le gustaba decir que había "**demostraciones del LIBRO**", pensando religiosamente en la Biblia y creyendo que dichas demostraciones ilustres podían pertenecer ya al reino de los cielos.

- **Hay demostraciones aceptables por fe en la comunidad**
  La demostración larga y compleja del teorema de los cuatro colores donde interviene una enumeración exhaustiva de casos resuelta usando ordenador o la demostración de gran complicación de A. Wiles del último teorema de Fermat son ejemplos de admirables soluciones a grandes problemas pero cuyas demostraciones exigen a la mayoría de matemáticos un acto de fe en aquellos miembros de la comunidad que por su prestigio y competencia en el campo determinado avalan la bondad de la prueba.
  En definitiva los teoremas y sus demostraciones nunca son fríos enunciados inalterables sino los resultados de grandes ingenios humanos y evolucionables con los años.

¡Silencio! ¡Se demuestra!

Nuestro admirado George Pólya (Matemáticos y razonamiento plausible, Ed. Tecnos, Madrid, 1966) nos da unas reflexiones docentes relevantes sobre el tema de intuición-demostración:

> *"El resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición.*
> *Si esto es así, y yo lo veo, habrá un lugar para la intuición en la enseñanza de la matemática... ¡Enseñemos intuyendo!."*

y Pólya nos anima a favorecer heuristicamente el desarrollo de los argumentos intuitivos, a detectar errores de la intuición, a aproximarnos inductivamente a los problemas:

> *"Los hechos matemáticos se intuyen primero y después se prueban...*
> *hay que dar oportunidades al estudiante para hacer problemas en que*
> *primero intuya y luego pruebe..."*

En el mundo de la investigación educativa se han realizado grandes esfuerzos para estudiar científicamente el tema de las demostraciones contempladas desde un punto de vista docente y estudiantil. Grandes nombres de la Didáctica de la Matemática como N. Balacheff, T. Dreyfus, R. Duval, P. Ernest, E. Fischbein, G. Hanna, I. Kleiner, I. Lakatos, R.C. Moore, D. Tall, A. Sierpinska, V. Zack, nos permiten hoy reconocer las enormes dificultades existentes (incluso en niveles avanzados de finales de secundaria e inicio de universidad) para entender el tema de la demostración en toda su complejidad.

Algunas de las cuestiones que han merecido especial atención son:
- ¿Qué diferencia hay entre justificar, argumentar, verificar o demostrar?
- ¿Qué importancia debe darse a la prueba experimental?
- ¿Qué aporta la visualización en las demostraciones?
- ¿Qué grado de rigor debe exigirse en cada nivel?
- ¿Qué debe evaluarse en el conocimiento de teoremas?
- ¿Qué es más importante que entienda el alumno en una demostración?
- ¿Qué tratamiento dan los libros y los profesores a las pruebas?
- ¿Qué tipo de estudiantes ven la necesidad de demostrar?
- ¿Qué tipo de convicción tienen los estudiantes ante las pruebas?
- ¿Qué tipo de redundancias deben ser permisibles en los estudiantes?
- ¿Qué debe valorarse más: computaciones, respuestas finales, relaciones, procedimientos, bases conceptuales?
- ¿Qué puede considerarse como tautológico?

• • •

En general, el nivel universitario incluye demostraciones, el nivel primario prepara a iniciarlas y en el nivel secundario no aparece este tema en muchos curricula, en muchos libros y en muchas clases. Por ejemplo, en el currículo japonés un 53% de temas están demostrados pero en el curriculo alemán solo un 10% de temas se someten a verificación.

La NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) ha publicado en el 2000 la revisión de los influyentes "Principios y Estándares para la Matemática Escolar". Los principios que guian la propuesta igualdad, la adecuación curricular, labor docente, aprendizaje significativo, la evaluación innovadora y el uso correcto de la tecnología. Y los estándares para cada ciclo educativo se especifican en relación a Números y operaciones; Álgebra; Geometría; Medida; Análisis de datos y Probabilidad; Resolución de Problemas; **Razonamiento y Demostración**; Comunicación; Conexiones y Representación. Es importante pues que se equipare el apartado de Razonamiento y Demostración a otros estándares como los citados y que además se considere **la necesidad del desarrollo continuado y progresivo** de dicho estándar fijando que dicho trabajo debería permitir a los estudiantes desarrollar la siguiente cuaterna de competencias:

- Reconocer que razonar y demostrar son aspectos fundamentales de las matemáticas.
- Formular e investigar conjeturas matemáticas.
- Desarrollar y evaluar argumentos matemáticos y demostraciones
- Seleccionar y usar varios tipos de razonamientos y métodos de demostración.

Las siete virtudes capitales de las demostraciones docentes

Las demostraciones que merecen integrarse en la docencia deberían reunir unas determinadas virtudes que a continuación intentaremos describir.

1ª virtud. La demostración debe ser ejemplar

Siguiendo una afortunada denominación del matemático inglés E.C. Zeeman, una demostración (o su correspondiente teorema) será noble cuando sea **ejemplificadora**, cuando "capture la quinta esencia de alguna **forma de hacer en matemáticas**". El teorema a demostrar debe ser útil y/o importante y el propio método de demostración debe iluminar una forma singular, creativa, de proceder, es decir, la demostración pasa a ser un modelo de procedimiento con el que se podrán abordar otras demostraciones.

El siguiente teorema es ejemplar y usual admitiendo interesantes demostraciones. Aquí veremos una muy antigua atribuida a Platón y una de preciosa de Tom Apostol del 2000.

Teorema: 2 *es un número irracional*

Demostración (Platón). Si 2 fuese racional representable en la forma 2 = m/n con m.c.d (m,n) = 1 resultaría $2n^2 = m^2$ y al ser m^2 par debería serlo m, es decir m =2K con K entero. Así $n^2 = 2K^2$, n^2 sería par y por tanto n también sería par, contradiciendo el hecho de que m y n no tenían factores comunes.

Demostración (Tom Apostol, 2000). Por el teorema de Pitágoras $\sqrt{2}$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de catetos 1. Si fuese racional, $\sqrt{2}$ = m/n, el triángulo rectángulo de catetos n y hipotenusa $n\sqrt{2}$ = m tendría los tres lados enteros. De todos los triángulos rectángulos con lados enteros debe haber uno T que es mas pequeño posible. Pero fijado T, se podría construir otro T' de lados enteros semejante a T y más pequeño que T, contradiciendo la definición de T:

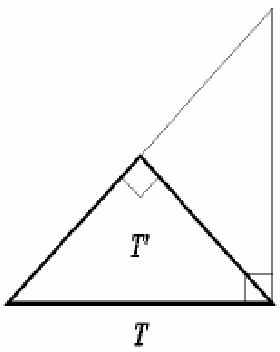

Figura 1

2ª virtud: La demostración debe ser necesaria

Aquello que se trata de demostrar puede ser intuitivamente obvio o incomprensible. En este caso su demostración no merece consideración docente. Serán aquellos hechos que superan la evidencia los que más se van a beneficiar de su propia demostración. Así pues la necesidad demostrativa deberá estar relacionada con la posibilidad de **iluminar**, **recalcar** o **profundizar** en el propio hecho que se trata de justificar.

Aquí tiene dos teoremas importantes cuyo resultado es bueno de conocer pero cuyas demostraciones puede ahorrarse.

Teorema de Jordan: *Toda curva continua cerrada en el plano, que no se cruza a sí misma, divide el plano en una parte interior y en otra exterior.*

Es bueno que se haga notar la dificultad de demostrar este hecho tan intuitivo: se está predicando una propiedad relativa a infinitas curvas.

Teorema de los círculos: *Un círculo no es nunca la reunión finita de una familia de círculos contenidos en él.*

Evidente... si lo piensa 30 segundos. Pero de demostración complicada si se sienta a formalizar dicha propiedad .El siguiente enunciado necesita demostración. No es evidente en absoluto...

Teorema (R. Courant y H. Robbins). *Dadas tres rectas cualesquiera en el espacio (de forma que ningún par de ellas sean paralelas o concurrentes, no siendo las tres a la vez paralelas a un plano), existen infinitas rectas en el espacio que se apoyan en las tres dadas.*

Demostración. Dadas r_1, r_2, r_3, considere un plano cualquiera π que contenga a r_1 el cual cortará a r_2 y r_3 en dos puntos P_2, P_3. Entonces la recta determinada por P_2 y P_3 cortará a r_1 y se apoya en las tres rectas. Como π era cualquiera, habrá infinitas rectas.

En un nivel básico el argumento dado es suficiente. En un nivel más avanzado puede demostrar que el conjunto de rectas encontradas forma una interesante superficie reglada: el hiperboloide de una hoja.

3ª virtud: La demostración debe ser rigurosa.

La demostración matemática totalmente completa, formalizada y rigurosa existe como "ideal" cognitivo pero, tal como reconocen P.J. Davis y R. Hersh, pocas veces se encuentra escrita o explicada en detalle. La omisión de cálculos rutinarios, la cita de otros resultados que no se reproducen de nuevo, la ocultación de pasos tediosos o la llamada a recursos intuitivos, analógicos, metafóricos o heurísticos convierten a menudo la publicación o explicación de un teorema en un curioso **discurso retórico** pensado más para especialistas que para estudiantes o personas no iniciadas.

Así pues, el concepto de rigor en docencia debe ser siempre relativo a la formación previa, a aquello que es posible entender. Incluso podríamos decir que hay un tipo de rigor que debe ser función del nivel educativo. Así en una visión en espiral de la docencia, (volver a pasar por los mismos conceptos pero cada vez desde más arriba) el rigor debería ir "aumentando" al ir revisitando resultados.

Cabe remarcar, además, que en la docencia matemática es posible "elegir bien" las premisas o resultados previos de los cuales partir para hacer una demostración y por tanto no necesariamente debe plantearse una "larga" cadena deductiva que exigiría un enorme rigor en muchos pasos.

Recordemos por ejemplo el famoso teorema de Euclides:

Teorema (Euclides) Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.

Este resultado, llamado en tiempos medievales "pons asinorum", indicaba el nivel de ciertos alumnos avanzados si éstos eran capaces de "demostrar" con rigor la igualdad de los ángulos (descomponer el triángulo en dos triángulos mediante la bisectriz-mediatriz desde el ángulo superior a la base, demostrar la congruencia de los dos triángulos,...) y al final llegar a la igualdad de ángulos. Si alguien considera hoy como "definición" de triángulo isósceles el que tiene dos lados iguales y sus correspondientes ángulos opuestos también iguales entonces la necesidad del teorema anterior desaparece.

A menudo en clase podemos distinguir lo que es un "rigor redundante" de lo que es un rigor imprescindible". Es el segundo tipo el que merece atención especial. El siguiente ejemplo es un bonito y sorprendente resultado que exige de forma natural un rigor de procedimiento.

Teorema (J. Bronowski y D. Pedoe). El número entero más pequeño N tal que al colocar la primera cifra al final resulta un nuevo número que es 3/2 del inicial, es: **N = 1.176.470.588.235.294**

Demostración. La escritura $N = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ le permite imponer la condición $a_{n-1} \ldots a_1 a_0 a_n = (3/2) a_n \ldots a_0$ y usando potencias de diez establecer que

$$(3 \cdot 10^n - 2) a_n = 17\,(10^{n-1}\, a_{n-1} + \ldots + a_0)$$

La divisibilidad necesaria de $3 \cdot 10^n$ - 2por 17 le lleva a que n = 15 y con $a_{15} = 1$ obtiene el número deseado. Es inmediato (si no usa calculadora) verificar que el número obtenido satisface la propiedad requerida.

4ª virtud: Tanto la demostración como el resultado deben ser entendibles.

Aquí reivindicamos el hecho de que no solo se trata de "entender" el relato demostrativo, ir viendo los pasos y los argumentos, sino que también se trata de "entender" plenamente lo que el resultado "significa", cuáles son sus consecuencias, qué cosas son equivalentes, qué implicaciones tendría el que no fuese cierto, etc.

En particular, las denominadas demostraciones sin palabras, deberán ir acompañadas siempre de argumentos orales o escritos que puedan ayudar a hacer comprensible tanto el resultado como el método de demostración

Teorema (Pitágoras) *Un triángulo es rectángulo si y solo si el área del cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados sobre los catetos.*

Demostración *(Leonardo da Vinci)*

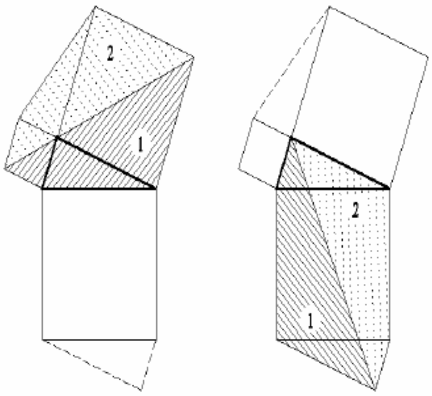

Figura 2

5ª virtud: La demostración debe ser elegante.

El concepto de elegancia matemática de una demostración engloba tres requerimientos: que la argumentación sea (esquemáticamente) **clara** facilitando un seguimiento; que la demostración sea **minimalista** al requerir los mínimos recursos posibles que permitan llegar a la conclusión deseada y que la demostración sea **breve** y, en particular, finalizable en un tiempo relativamente corto.

Problema. Tiene un tablón de madera rectangular y no posee cinta métrica. Plantee diferentes estrategias para lograr marcar en el tablón su división en tres partes iguales rectangulares para dividir en tres el lado corto.

Solución. Por ejemplo con la ayuda de un papel y un lápiz puede hacer una tira de papel dividida en 12 partes y que sea más larga que el lado corto del tablón. Colocando la tira inclinadamente dos veces se podrá marcar los puntos de división correspondientes a las marcas 4ª y 8ª de la tira de papel. Esto marcará dos pares de puntos en el tablón que permitirán por el teorema de Thales dividir el tablón en tres partes iguales.

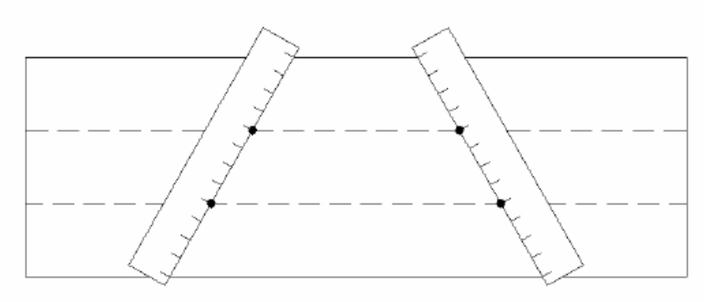

Figura 3

6ª virtud: La demostración debe mantener la atención, captar el interés y la participación.

Esta virtud es, claramente un gran objetivo docente. Ya sea porque el resultado es sorprendente o intrigante o porque el desarrollo de la demostración es ameno, disfrutable, debemos procurar que la **vivencia** del propio hecho demostrativo sea deleitable.

Quizás deberíamos prescindir de la escenificación ritual de presentar los teoremas con sus nombres lógicos ("Teorema", "Proposición", "Corolario", "Escolio", ...) y romper el relato deductivo perfectamente ordenado y acabado. Podemos dar más importancia al desarrollo inductivo, a los procedimientos heurísticos, a ir estableciendo conjeturas, refutándolas o refinándolas... hasta dar con el resultado. Aquí pueden notar algo importante: **las demostraciones se pueden hacer corresponder con las resoluciones de problemas.**

Observen la siguiente forma de incitar a demostraciones planteando un problema:

Problema (Pólya). Considerar las cuatro proposiciones siguientes (I) - (IV), que no son necesariamente verdaderas:

(I) Si un polígono inscrito en un círculo es equilátero, es también equiangular.
(II) Si un polígono inscrito en un círculo es equiangular, es también equilátero.
(III) Si un polígono circunscrito en un círculo es equilátero, es también equiangular.
(IV) Si un polígono circunscrito en un círculo es equiangular, es también equilátero.

Establecer cuáles de las cuatro proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas, dando una prueba en cada caso. ¿Qué ocurre con los cuadriláteros y los pentágonos? ¿Puede usted intuir, o quizás incluso probar, enunciados más comprensivos?

Una aproximación intuitiva inmediatamente nos alerta de que (II) es falsa para un rectángulo y (III) lo es para un rombo. (I) y (IV) son verdaderas en general (¡pruébelo!). Al reconsiderar (II) y (III) para pentágonos descubrimos su validez lo cual nos anima a explorar (II) y (III) para polígonos con un número impar de lados (¿qué ocurrirá en general?)

7ª virtud: La demostración en clase debe ser escenificada, cuidando tanto su presentación como su dinámica

Las demostraciones pueden prepararse con esmero. La existencia de buenas imágenes, modelos, esquemas, material manipulativo, etc, pueden ser determinantes en el momento de elegir un teorema para ser demostrado. Pero también mil detalles como planear un debate previo, cuidar la velocidad de escribir o exponer transparencias, la claridad de la voz, el uso de elementos audiovisuales, etc, pueden ser elementos determinantes del éxito docente.

Siguiendo una idea de Dana Angluin, también referenciada por P.J. Davis y R. Hersl, existen formas docentes de substituir la demostración formal en clase mediante el uso ingenioso de una serie de estrategias retóricas como las siguientes:

- Demostración de un ejemplo o de un caso particular.
- Demostración por intimidación afirmando en "trivialidad".
- Demostración por cita de autoridad eminente o publicación.
- Demostración por agotamiento explicando extensamente una parte.

...

Pero a nosotros nos interesan formas positivas de llevar a cabo demostraciones.

Problema. *Diseñe un algoritmo para dividir un pastel entre 3 personas de forma que la repartición final sea aceptable para los tres.*

Algoritmo 1º: El 1º divide el pastel en 3 trozos que le parecen equivalentes. A continuación el 2º y el 3º, independientemente, juzgan que parte preferiría cada uno. Entonces la parte rechazada tanto por el 2º como por el 3º se la queda el 1º. Se reúnen ahora los otros dos trozos y el 2º corta y el 3º elige.
Algoritmo 2º (J.Selfridge y J.Conway,1960): El 1º divide el pastel en 3 trozos. A continuación el 2º puede recortar uno de estos trozos. El 3º elige...y luego el 2º y finalmente el 1º.

Y se pueden estudiar diversos algoritmos alternativos. En este tipo de problemas la demostración de la validez del método usado simplemente consiste en argumentar la razón por la cual cada participante debe contentarse con la parte recibida...y será conveniente que se visualice el pastel con un pastel de verdad.

Teorema (Liu Hiu ,263Dc, y Zu Gengzhi 200 años después pero 1000 años antes que Bonaventura Cavalieri(1598-1647)). El volumen de la esfera de radio R es $V = (4\pi /3)R^3$

Demostración. Obsérvense las siguientes imágenes:

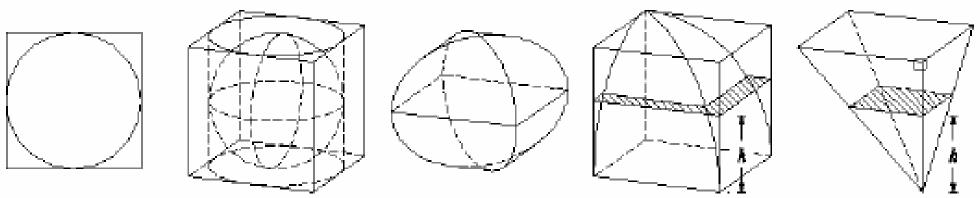

Figura 5

La razón entre el área del círculo y el del cuadrado circunscrito es π /4. Por ello dado un cubo de lado d con un cilindro inscrito y en él una esfera inscrita resulta que la razón entre el volumen del cilindro y el de la esfera es de π /4. Análogamente, la razón entre el volumen de la esfera y el volumen de la figura intersección de los dos cilindros es también π /4. Hasta aquí llegó Liu Hiu. Dos siglos después Zu Gengzhi supo hallar el volumen de esta figura intersección de dos cilindros de ejes perpendiculares considerando el volumen complementario de dicha figura en el cubo circunscrito y notar, vía secciones planas, que dicho volumen es equivalente al de una pirámide recta de base cuadrada de lado y altura el diámetro de la esfera.

El gran teorema de su vida

Y llegados a este último apartado es procedente remarcar las conclusiones de lo dicho. El tema de las demostraciones es anecdótico a nivel social, es una característica genuina de la creatividad matemática y es un reto docente. No es solo conocer resultados sino aprender a razonar y saberlo hacer de maneras múltiples, desde la intuición a la deducción, desde la exploración heurística al razonamiento inductivo. Es algo, además, muy propio de la enseñanza de las matemáticas y que por tanto merece una especial atención como objetivo docente.

Pero permitan que, como en otras ocasiones, les transmita una reflexión humanística sobre nuestra dimensión humana al tratar este tema de las demostraciones y los teoremas. No podemos reducir el tema a una cuestión aséptica, puramente profesional y técnica. También argumentando lógicamente, justificando, demostrando, presentando resultados, etc. podemos incorporar nuestro entusiasmo, nuestra pasión por el tema. No sólo es buscar la verdad. También se trata de buscar el interés y la pasión. ¿Cual es el gran teorema de nuestra vida? El gran teorema para todos nosotros, la gente de la educación matemática **es demostrar cada día que como matemáticos, como docentes y como personas apostamos con entusiasmo por la formación matemática y personal de nuestros alumnos y alumnas** Y esta demostración no es sencilla al incluir elementos muy diversos (conocimientos, técnicas didácticas, estados emocionales) y por ser, necesariamente, diaria. Nosotros con el teorema de nuestra propia vida deseamos, a la vez, transmitir resultados y técnicas pero también una formación personal. Deseamos decir a estos chicos y chicas que el **rigor** del pensamiento deben aplicarlo a su vida personal, que los **argumentos** deben guiar sus relaciones con los demás, que el **razonamiento** debe ser el motor del futuro social. Que el valor añadido al aprender matemáticas es esta posibilidad de transferir a la vida cotidiana los principios básicos de esta materia.

¡Gracias por demostrar cada día su entusiasmo por las matemáticas y su amor por la gente joven!