

# Geometría Interactiva Aplicada al Estudio de Los Movimientos en el Plano

## Guía del Profesor



"El libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático, cuyos caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales sería imposible entender una sola palabra y se andaría siempre como en un laberinto oscuro."

Cratileo.



Autora: María José Sánchez Quevedo

## **ÍNDICE DE LA GUÍA DEL PROFESOR**

<b>PRESENTACIÓN.....</b>	<b>2</b>
<b>JUSTIFICACIÓN DIDÁCTICA.....</b>	<b>4</b>
<b>OBJETIVOS Y ALUMNOS.....</b>	<b>6</b>
<b>DESARROLLO DE LA UNIDAD.....</b>	<b>9</b>
<b>EVALUACIÓN.....</b>	<b>36</b>
<b>CONCLUSIONES.....</b>	<b>37</b>
<b>RECURSOS-BIBLIOGRAFÍA.....</b>	<b>38</b>

## 1. PRESENTACIÓN

Los profesores de Matemáticas, en muchas ocasiones, tenemos una gran dificultad para alcanzar objetivos que, podríamos considerar fundamentales como son:

- ***El desarrollo del razonamiento***
- ***La estimulación del pensamiento lógico***
- ***El desarrollo de la creatividad.***

Una de las posibles causas por las que éstos objetivos no son alcanzados podría estar relacionada con la tendencia curricular conocida como matemática moderna (de la década de los 60), en la que muchos profesores hemos sido educados, que ha favorecido que, en determinadas ocasiones, proporcionemos a nuestros alumnos una enseñanza basada en el carácter deductivo de la matemática que parte de unos axiomas básicos en contraposición a la enseñanza falsamente axiomática de la geometría.

En palabras de R.Thom (Modern Mathematics: does it exist? (1973):

***"Ellos, los bourbakistas, abandonaron un campo ideal para el aprendizaje de la investigación: La Geometría Euclídea, mina inagotable de ejercicios y la sustituyeron por las generalidades de los conjuntos y la lógica, materiales tan pobres, vacíos y frustrantes para la enseñanza como los que más. El énfasis puesto por los estructuralistas en la axiomática no es sólo una aberración pedagógica sino también matemática."***

El fracaso del movimiento conocido como la matemática moderna produce nuevos movimientos renovadores. Entre estos movimientos destacan los conocidos como: ***retorno a lo básico, la resolución de problemas y la matemática como actividad humana.***

Si aceptamos el principio de Puig Adam de que ***"para nuestros alumnos lo concreto empieza por el mundo observable"*** entonces habremos de aceptar que el ***"material"*** puede jugar un papel esencial en el mundo de la enseñanza matemática.

Bajo la palabra ***"material"*** se agrupan todos aquellos objetos o medios de comunicación que pueden ayudar a descubrir, entender o consolidar conceptos fundamentales en las diversas fases del aprendizaje. En éste sentido, *los materiales que nos ofrecen las Nuevas Tecnologías* posibilitan la ***interacción***, un factor esencial en el proceso de *enseñanza-aprendizaje*.

Desde mi punto de vista, la estrategia metodológica más adecuada para abordar el estudio de la Geometría en general debe estar basada en la utilización de recursos dinámicos que permitan, a los alumnos interactuar con los objetos matemáticos y, a los profesores, mostrar con rapidez los conceptos.

Las TIC hacen posible crear ambientes dinámicos a la vez que ayudan a poner a los alumnos en situación de "**querer descubrir**", aspectos que de por sí ya conforman unas buenas condiciones iniciales para el aprendizaje.

## 2. JUSTIFICACIÓN DIDÁCTICA

La forma en que enseñamos matemáticas, y geometría en particular, ha cambiado gracias a unos cuantos desarrollos importantes llevados a cabo en los últimos años. Después de más de un siglo de no poder ser accesibles a la mayoría de los estudiantes, ahora se tienen enfoques alternativos al planteamiento estrictamente

En 1989, el estadounidense Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM, *National Council of Teachers of Mathematics*) publicó sus *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Matemática Escolar* que convocan a hacer cambios significativos en la manera en que se enseñan las matemáticas. En la enseñanza de la geometría, los *Estándares* hacen un llamado a disminuir el énfasis en la presentación de la geometría como un sistema deductivo completo y en las demostraciones de dos columnas.

Con respecto al currículo, los *Estándares* proponen un aumento en la exploración abierta y en el planteamiento de conjeturas, y una mayor atención a temas de la geometría de transformaciones. En su convocatoria al cambio, los *Estándares* reconocen el impacto que las herramientas tecnológicas tienen en la forma en que se enseñan las matemáticas, al liberar al estudiante de tareas que le llevan mucho tiempo y darle los medios de ver y explorar relaciones interesantes.

Este planteamiento es consistente con la investigación hecha por los educadores matemáticos holandeses ***Pierre van Hiele y Dina van Hiele-Geldof***. A partir de observaciones en el aula, los Van Hiele determinaron que los estudiantes pasan por una serie de niveles de pensamiento geométrico:

- 1. Visualización**
- 2. Análisis**
- 3. Deducción informal**
- 4. Deducción formal**
- 5. Rigor**

En los textos estándares de geometría se espera que los estudiantes empleen la deducción formal desde el principio. Se hace poco para permitir a los estudiantes que visualicen las situaciones o para animarlos a que hagan conjeturas. Uno de los principales objetivos es llevar al estudiante a través de los tres primeros niveles, fomentando un proceso de descubrimiento que refleje de manera más estrecha la

forma en que se inventa la matemática: un matemático, primero, visualiza y analiza un problema, y hace conjeturas antes de intentar hacer una demostración.

La enseñanza de las matemáticas con el programa ***Cabri-Geometer´s-Plus*** y con la utilización de ***applets*** interactivos, permite a los estudiantes explorar relaciones de manera interactiva, de modo que sean capaces de ver los cambios efectuados en los diagramas matemáticos a medida que los manipulan.

### 3. OBJETIVOS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA Y ALUMNOS A LOS QUE VA DIRIGIDA

Siguiendo el contexto marcado en la introducción, la enseñanza de la Geometría se ha visto desplazada a un segundo plano debido quizás por una parte a la tendencia de una enseñanza de la matemática basada en el aprendizaje de ciertas habilidades mecánicas o bien a una enseñanza basada en el carácter deductivo de la matemática partiendo de unos axiomas básicos y por otra a la poca intensidad horaria de la asignatura de Matemática, en la Secundaria especialmente, que como consecuencia a dado lugar a una reducción notable de los contenidos y, en esta reducción, la Geometría y la Estadística se han visto muy mermadas.

Aparte de estos motivos, otros hechos han agravado esta situación, como por ejemplo, no coordinar convenientemente la enseñanza de la Geometría desde la primera etapa de Secundaria hasta el último año de bachillerato, la falta de material didáctico que ha habido en años pasados para apoyar a los docentes en la enseñanza de la misma, y hasta en algunos casos, la preparación del docente en esta Área de la Matemática.

Afortunadamente, durante el transcurso de estos últimos años, se ha tomado conciencia del gran nivel formativo que posee la Geometría, ya que permite trabajar a partir de objetos concretos, llegando a distintos niveles de conceptualización y por otra parte el advenimiento de las Nuevas Tecnologías nos han proporcionado nuevos materiales y formas de enseñar Matemática.

Surge entonces la necesidad de proporcionar, de manera amena y sencilla, unas herramientas que faciliten la visión de todos los procesos geométricos que diariamente se producen a nuestro alrededor, como decía Galileo:

***"nos van a permitir, si no salir del laberinto sí al menos saber en qué punto del mismo nos encontramos."***

Por todo esto he seleccionado la Geometría, dentro de la Matemática, como eje fundamental para desarrollar una unidad didáctica. Descubrir en la naturaleza, en las artes y en el entorno la geometría, me ha llevado a escoger, en concreto, el tema de:

## LOS MOVIMIENTOS EN EL PLANO

De nuevo las palabras de Galileo:

***"El libro de la naturaleza está escrito en lenguaje matemático, cuyos caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales sería imposible entender una sola palabra y se andaría siempre como en un laberinto oscuro"***

Invitan a mirar a nuestro alrededor y descubrir la geometría intrínseca en los objetos que nos rodean.

Esta unidad didáctica va dirigida fundamentalmente para alumnos de **4º de E.S.O.** (o incluso de 3º) y en ella se estudian los movimientos en el plano enfocados de una manera muy **intuitiva** y **manipulativa**, intentando que los movimientos se **"vean"** antes de conceptualizarlos. En líneas generales se pretende que el alumno:

- sea capaz de crear situaciones atractivas de aprendizaje.
- aprecie el significado de sus propias acciones.
- prepare el camino a nociones matemáticamente valiosas

Más concretamente, los **alumnos al finalizar la unidad deben ser capaces de:**

- Identificar una transformación geométrica.
- Identificar propiedades comunes entre una figura y la que se obtiene mediante una transformación geométrica.
- Identificar y clasificar los distintos movimientos en el plano (traslaciones, simetrías centrales, simetrías axiales y giros).
- Determinar las distintas características de cada movimiento.
- Identificar los elementos invariantes de cada movimiento.
- Saber realizar cada uno de los movimientos: traslación, giro, simetría.
- Realizar la composición de dos movimientos de la misma naturaleza e identificar el resultado obtenido.
- Realizar el movimiento inverso.



- Utilizar de forma inteligente los applets para comprender mejor el significado de los movimientos en el plano.
- Utilizar el programa informático **Cabri Geometer's Plus** para realizar los applets que se proponen en la unidad así como para construir figuras donde se utilicen las isometrías.
- Entender qué son los mosaicos y cuáles son las condiciones que se tienen que cumplir para poder construirlos.
- Identificar en la construcción de mosaicos los distintos tipos de movimientos que se utilizan en su generación.
- Conocer los distintos tipos de mosaicos que hay y cómo se generan.
- Reconocer en la Naturaleza y en el Arte formas en las que se pueda identificar la relación con los movimientos.
- Conocer y valorar las distintas técnicas de construcción de mosaicos Escher.
- Ser capaz de "crear" sus propios mosaicos utilizando las diversas técnicas aprendidas.

En la elaboración de ésta unidad en formato página web se ha utilizado **Flash** para crear applets interactivos y **Cabriweb** para convertir ejercicios de **Cabri** en applets. **CABRI** al ser un programa de geometría dinámica favorece el desarrollo de los conceptos matemáticos permitiendo visualizar, experimentar, consultar propiedades, simular, descubrir regularidades, etc. Gracias a él se pueden salvar algunas de las dificultades que habitualmente surgen en el estudio de la geometría clásica, como la falta de dinamismo, la dificultad en la construcción, la falta de visión del problema en su conjunto etc.

Además con **CABRI** el alumno podrá realizar, con las indicaciones del profesor, sus propios applets interactivos y **reproducir** los que aquí se exponen. Como apoyo del programa se ofrece al final de la unidad una breve **guía**.

## 4. DESARROLLO DE LA UNIDAD

The screenshot shows a web browser window titled "Maria Jose UMASTER/tesina/tesina/index.html - Microsoft Internet Explorer". On the left, there is a navigation menu with a small button at the top left. A red circle highlights this button, with a red arrow pointing to it and the text "Ver u ocultar menú" (Show or hide menu). The main content area displays a hierarchical diagram titled "LOS MOVIMIENTOS EN EL PLANO". The diagram is organized as follows:

- LOS MOVIMIENTOS EN EL PLANO
  - son transformaciones
    - que conservan distancias y ángulos
  - se clasifican en
    - directos
      - son traslaciones
        - la composición de dos traslaciones es otra traslación
      - giros
        - la composición de dos giros es otro giro
    - inversos
      - son reflexiones y simetrías axiales
        - la composición de dos reflexiones
          - de ejes paralelos es una traslación
          - de ejes que se cortan es un giro
  - pueden utilizarse para hacer
    - Rosetones
    - Frisos
    - Mosaicos

La navegación por la unidad (saltando la presentación) comienza por la página "index.htm"

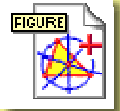
Se ha optado por un *diseño cómodo y sencillo* y que permita *optimizar* al máximo el tamaño de la ventana, para lo cuál dispone de un pequeño botón en el extremo superior izquierdo que permite *ver u ocultar el menú* de contenidos.

Comienza la unidad exponiendo un *esquema-resumen* de la misma para que así el alumno se haga una *idea global* de los conceptos que se van a tratar.

En cuanto a la estructura general del desarrollo de los contenidos de la unidad se sigue más o menos el siguiente esquema:

- Se presenta el concepto geométrico a tratar mediante una definición general del mismo y a continuación, de forma interactiva, en un apartado denominado "*Experimenta*" se muestran sus primeras características a través de applets con objeto de que el alumno tenga una primera impresión que le haga percibir de forma natural el objeto definido.

- A continuación se da la **definición** o **características** del concepto tratado de forma más rigurosa utilizando el lenguaje matemático.
- Se presentan diversas actividades interactivas también bajo el epígrafe de "**Cabri-Actividad**" para que el alumno construya su propio ejercicio y luego lo convierta en applet. Pulsando sobre el icono



Indicaciones para realizar la práctica

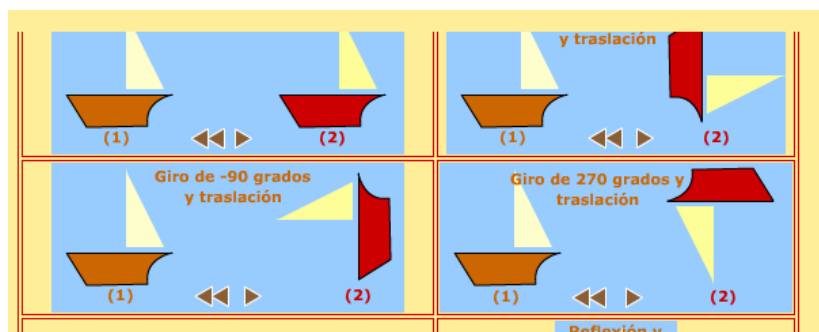
se dispone de las indicaciones para realizar la práctica.

- Al final se muestra un apartado denominado "**Recuerda**" en donde se hace hincapié de todo aquello que es fundamental para fijar los conocimientos.

Pasamos a describir cada uno de los apartados de la unidad:

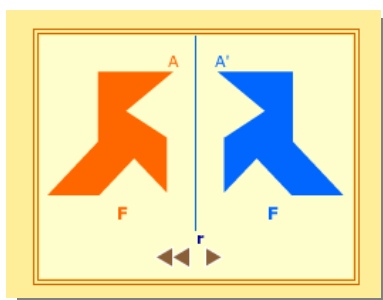
1. Una **transformación geométrica** es una relación que a cada punto del plano le hace corresponder otro punto, de ese modo las figuras se transforman en otras figuras. Para clarificar el concepto se presentan animaciones que muestran cómo el barco (1) se transforma hasta convertirse en el barco (2)

<b>Título</b>	<b>Transformaciones Geométricas</b> (barco)
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mostrar qué es y que no es una transformación geométrica.</li> <li>• Mostrar algunas transformaciones geométricas.</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b>



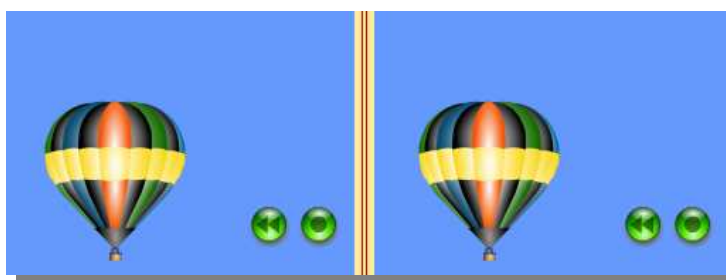
2. Elemento invariante en una transformación geométrica es el que se corresponde consigo mismo. En la siguiente animación aplicando a la pajarita **F** la reflexión que tiene como eje la recta  $r$  se obtiene la pajarita **F'**, que se llama homóloga de **F**.

<b>Título</b>	<b>Pajarita</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar los elementos invariantes en una transformación geométrica.</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b>



3. A continuación se definen los movimientos como transformaciones geométricas que conservan las distancias y los ángulos

<b>Título</b>	<b>Globo</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar que los movimientos conservan el tamaño y la forma de las figuras</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b>

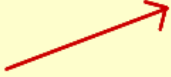


4. Tipos de movimientos.

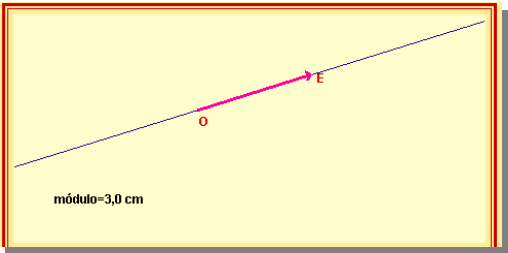
<b>Título</b>	<b>Sentido de orientación</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar lo que es el sentido del movimiento</li> </ul>

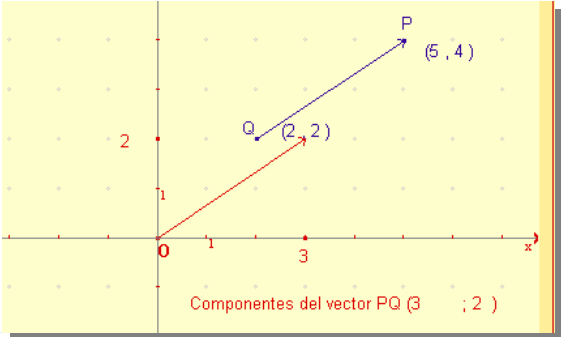
<b>Tecnología</b>	Flash <div data-bbox="820 241 1098 427" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <p style="text-align: center; color: red; font-weight: bold;">Sentido de orientación</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p>+ positivo (antihorario)</p> <p>■ ▶</p> </div> <div style="text-align: center;">  <p>- negativo (horario)</p> <p>■ ▶</p> </div> </div> </div>
<b>Título</b>	<b>Ejemplos de movimientos</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar algunos ejemplos de movimientos</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	Flash <div data-bbox="580 609 1337 904" style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px auto;"> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="flex: 1;">  </div> <div style="flex: 1; padding-left: 20px;"> <p>Este movimiento, que es una <b>traslación</b> de vector <math>v</math>, es directo porque la orientación <math>ABCD</math> es la misma que <math>A'B'C'D'</math>.</p> </div> </div> </div>

5. Dado que el estudio de los movimientos está muy relacionado con “vectores” se dedica un apartado para ello destacando las propiedades a través de animaciones:

<b>Título</b>	<b>Caracterización de un vector</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Distinguir lo que es la dirección, sentido y módulo de un vector</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	Flash <div data-bbox="603 1317 1216 1615" style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px auto; width: fit-content;"> <p style="text-align: center; color: red; font-weight: bold;">CARACTERÍSTICAS DE UN VECTOR</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="flex: 1;"> <p>Origen</p> <p>Dirección</p> <p>Sentido</p> <p>Módulo</p> </div> <div style="flex: 1; text-align: center;">  </div> </div> </div>

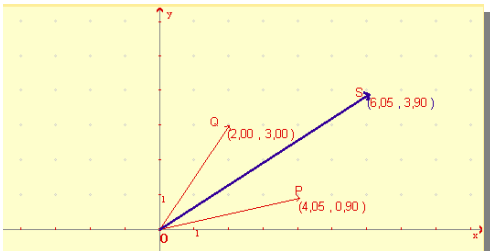
<b>Título</b>	<b>Vector libre</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entender el concepto de vector libre</li> </ul>

<b>Tecnología</b>	<b>Actividad</b> <b>Cabri-Plus</b>	
-------------------	---------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------

<b>Título</b>	<b>Componentes de un vector</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Asociar el vector con otro equipolente</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Actividad</b> <b>Cabri-Plus</b>
	


<b>Título</b>	<b>Clasificación de vectores</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Saber reconocer los vectores que son equipolentes</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b>
	

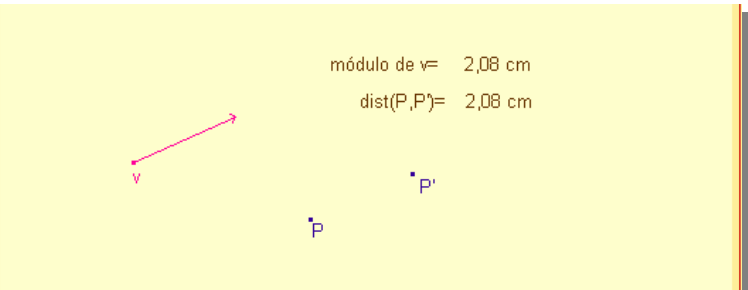
<b>Título</b>	<b>Suma de vectores</b>
---------------	-------------------------

<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Aprender a sumar vectores a través de la regla del paralelogramo</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Actividad Cabri-Plus</b> 

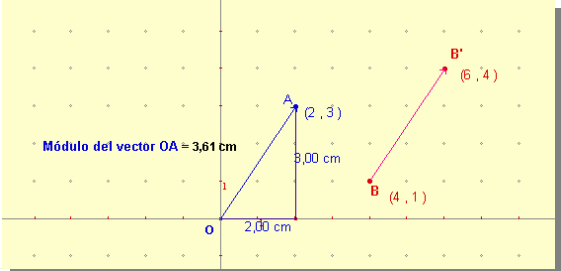
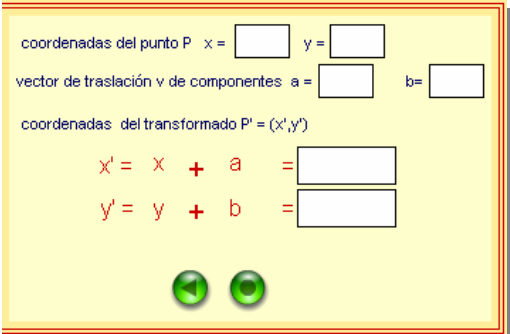
6. Definido lo que es un movimiento y los tipos que hay se procede a realizar un estudio exhaustivo de cada uno de ellos, de este modo se dedica un apartado para:

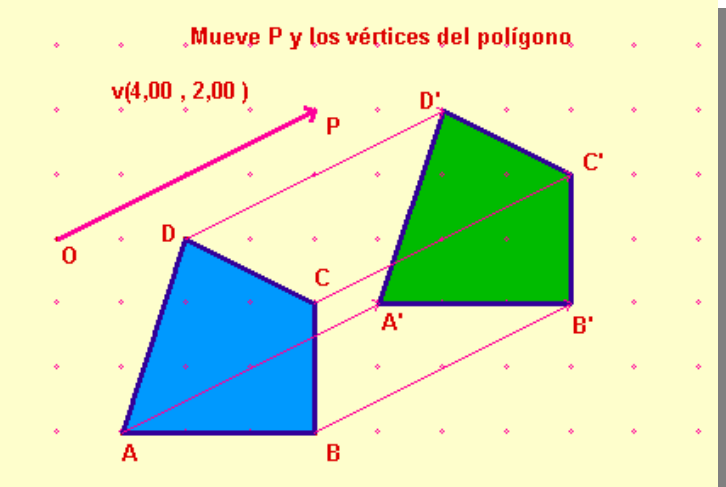
- **LAS TRASLACIONES**

<b>Título</b>	<b>Coche</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconocer los elementos característicos de una traslación</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b> 

<b>Título</b>	<b>Traslación de un punto respecto de un vector</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entender el trasladado de un punto</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Actividad Cabri-Plus</b> 

<b>Título</b>	<b>Coordenadas del punto trasladado</b>
---------------	-----------------------------------------

<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Saber cómo se obtienen las coordenadas del punto trasladado</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Actividad</b> <b>Cabri-Plus</b> 
<b>Título</b>	<b>Herramienta para determinar las coordenadas</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Obtener fácilmente las coordenadas del punto trasladado</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b> 

<b>Título</b>	<b>Figura trasladada</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entender cómo se traslada una figura</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Actividad</b> <b>Cabri-Plus</b> 

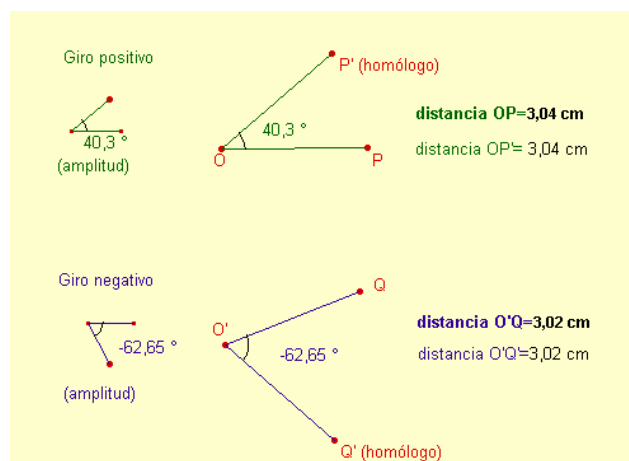


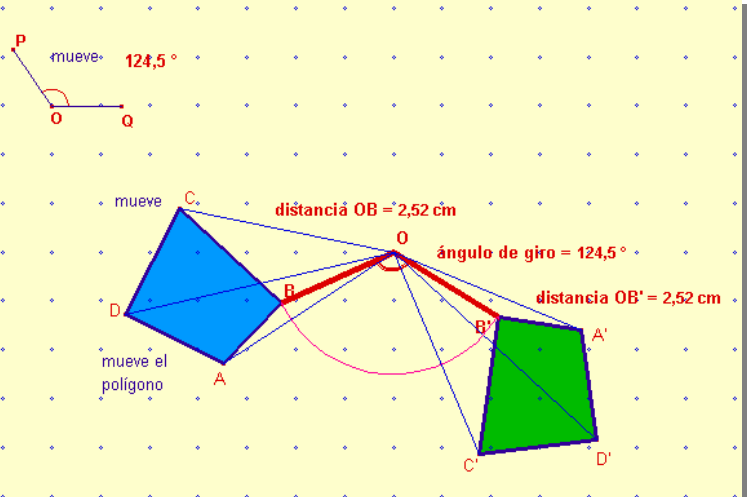
• **LOS GIROS**

<b>Título</b>	<b>Molino</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Reconocer el sentido positivo y el negativo de giro</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	Flash



<b>Título</b>	<b>Puntos homólogos al variar el ángulo de giro</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Comprobar que se mantiene la distancia entre el centro de giro y el punto homólogo.</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Actividad</b> <b>Cabri-Plus</b>



<b>Título</b>	<b>Figura girada</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entender cómo se gira una figura</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<p><b>Actividad</b></p> <p><b>Cabri-Plus</b></p>  <p>The screenshot shows a grid background with a blue quadrilateral ABCD and a green quadrilateral A'B'C'D'. A center point O is marked. A red arc indicates a rotation of 124.5 degrees around O. Labels include 'mueve' (move) for the center and 'mueve el polígono' (move the polygon) for the rotation. Distances OB = 2,52 cm and OB' = 2,52 cm are shown. A small inset diagram shows a point P being rotated to Q by 124,5 degrees.</p>

<b>Título</b>	<b>Centro de giro</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Saber cómo se obtiene el centro de giro</li> </ul>

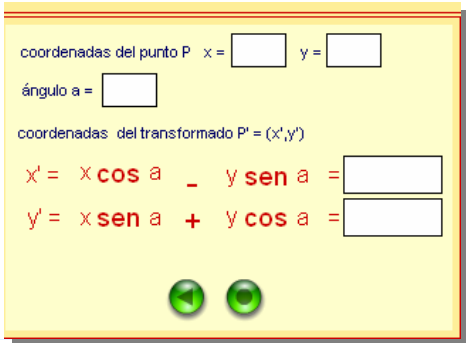
<b>Tecnología</b>	<b>Actividad</b>	
	<b>Cabri-Plus</b>	

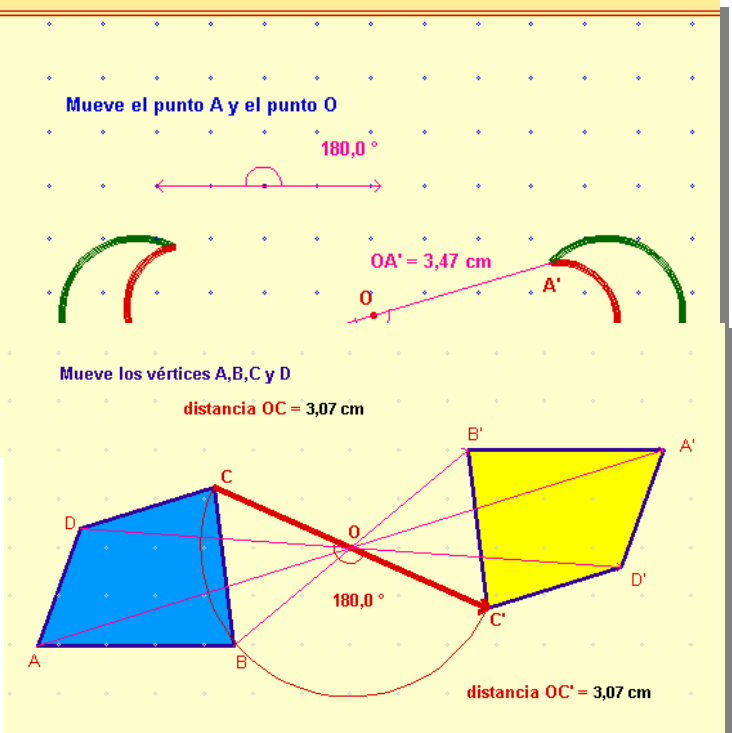
<b>Título</b>	<b>Coordenadas de un giro de centro el origen de coordenadas y amplitudes 90°, 180°, 270° y 360°</b>
---------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------

<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Relacionar las coordenadas de un punto <b>P</b> y la de sus transformado por el giro</li> </ul>
------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

<b>Tecnología</b>	<b>Actividad</b>	
	<b>Cabri-Plus</b>	

<b>Título</b>	<b>Cuadro para determinar las coordenadas</b>
---------------	-----------------------------------------------

<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Obtener fácilmente las coordenadas del punto girado</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<p><b>Flash</b></p> 

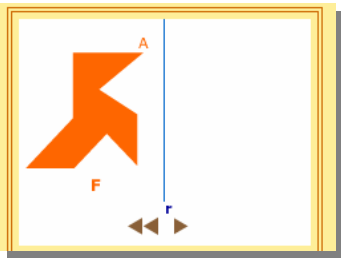
<b>Título</b>	<b>Centro de simetría de una figura</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Reconocer el centro de simetría de una figura</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<p><b>Actividad Cabri-Plus</b></p> 

<b>Título</b>	<b>Figuras invariantes</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar figuras invariantes</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	Flash

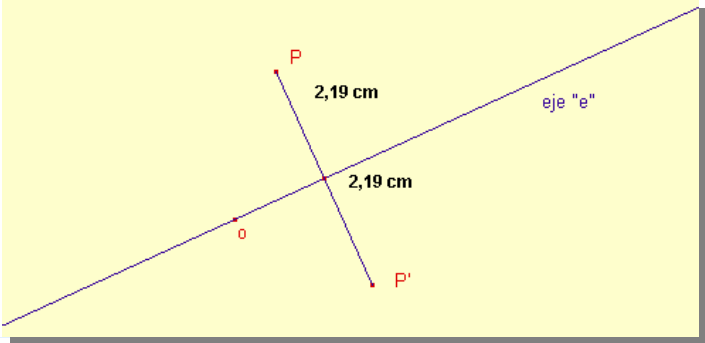
<b>Título</b>	<b>Giros en figuras respecto de su centro</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar figuras invariantes</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	Actividad Cabri-Plus

• **LAS SIMETRÍAS**

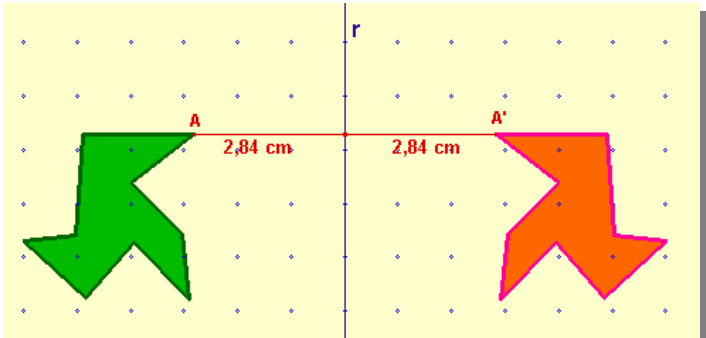
<b>Título</b>	<b>Características de las simetrías axiales</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar que las simetrías axiales cambian la orientación</li> </ul>

<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b>	
-------------------	--------------	------------------------------------------------------------------------------------

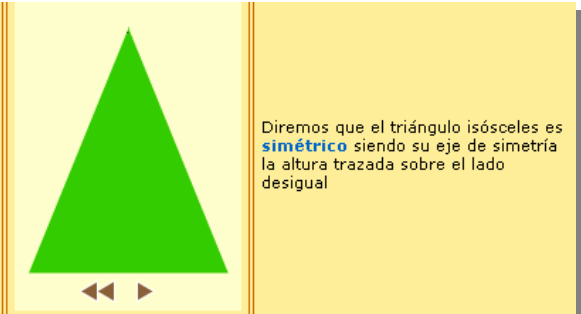
<b>Título</b>	<b>El simétrico de un punto</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar que los puntos simétricos <b>P</b> y <b>P'</b> están a la misma distancia del eje de simetría siendo el segmento que los une perpendicular al mismo.</li> </ul>

<b>Tecnología</b>	<b>Actividad Cabri-Plus</b>	
-------------------	-----------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------

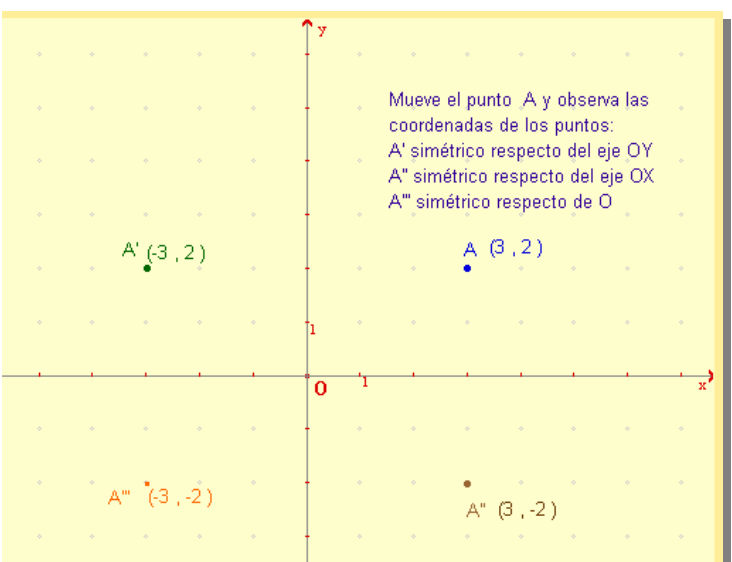
<b>Título</b>	<b>Simetría axial de una figura</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar que al aplicar la simetría a una figura los puntos simétricos <b>A</b> y <b>A'</b> están a la misma distancia del eje de simetría</li> </ul>

<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b>	
-------------------	--------------	--------------------------------------------------------------------------------------

<b>Título</b>	<b>Ejes de simetría de una figura</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar que una figura puede tener varios ejes de simetría</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	Flash




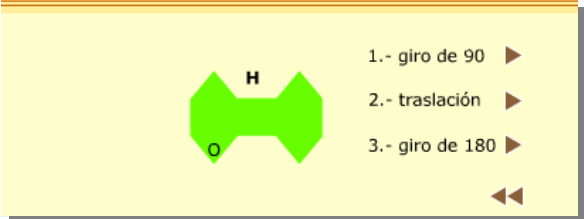
<b>Título</b>	<b>Simetrías en el plano cartesiano</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar como varían las coordenadas de sus respectivos simétricos.</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	Actividad Cabri-Plus

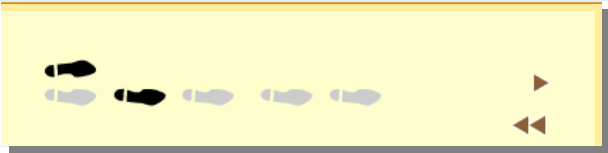


7. Llegado a este punto de la unidad suponemos que el alumno ya se encuentra bastante familiarizado con los movimientos por lo que se aborda el tema, un poco más complejo, de la “composición de movimientos”, aspecto muy interesante y de bastante aplicación. Pienso que las distintas animaciones que se proponen hacen comprender muy bien el efecto que sobre una figura

tiene la aplicación de dos movimientos consecutivos así como reconocer el movimiento conjunto resultante.

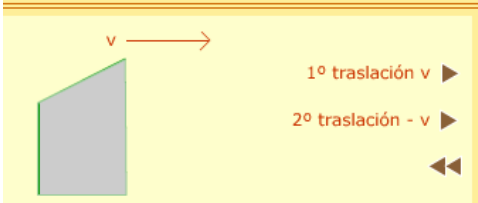
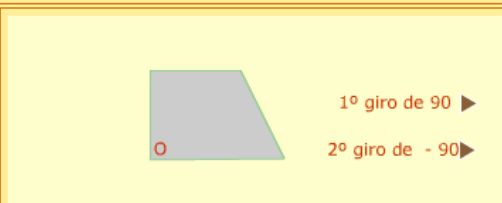
<b>Título</b>	<b>La composición de movimientos (con un triángulo)</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mostrarr un friso</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b> 

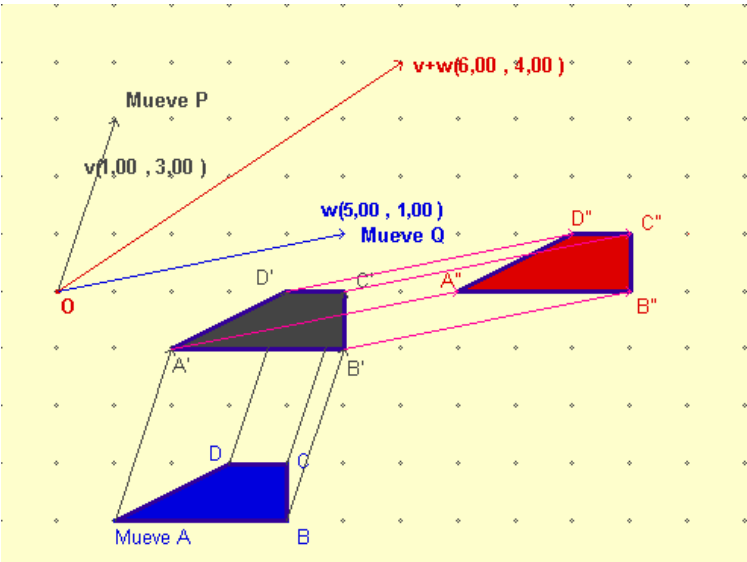
<b>Título</b>	<b>La composición de movimientos (con el hueso)</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mostrar un mosaico</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b> 

<b>Título</b>	<b>La composición de movimientos (simetría con deslizamiento, la huella)</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mostrar una simetría con deslizamiento</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b> 

<b>Título</b>	<b>Movimientos inversos</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Asociar un movimiento con su inverso</li> </ul>

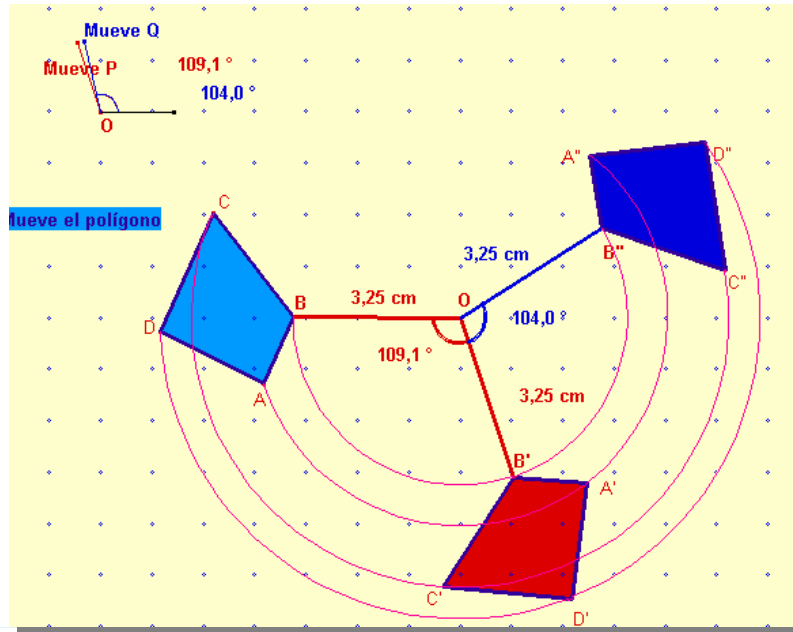


<b>Tecnología</b>	 <p>1º traslación <math>v</math> ▶ 2º traslación <math>-v</math> ▶▶</p>	 <p>1º giro de <math>90</math> ▶ 2º giro de <math>-90</math> ▶▶</p>
	<b>Flash</b>	

<b>Título</b>	<b>Composición de dos traslaciones</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Visualizar la composición de traslaciones</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Actividad</b> <b>Cabri-Plus</b> 

<b>Título</b>	<b>Composición de dos giros del mismo centro</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entender el movimiento de se obtiene al componer</li> </ul>

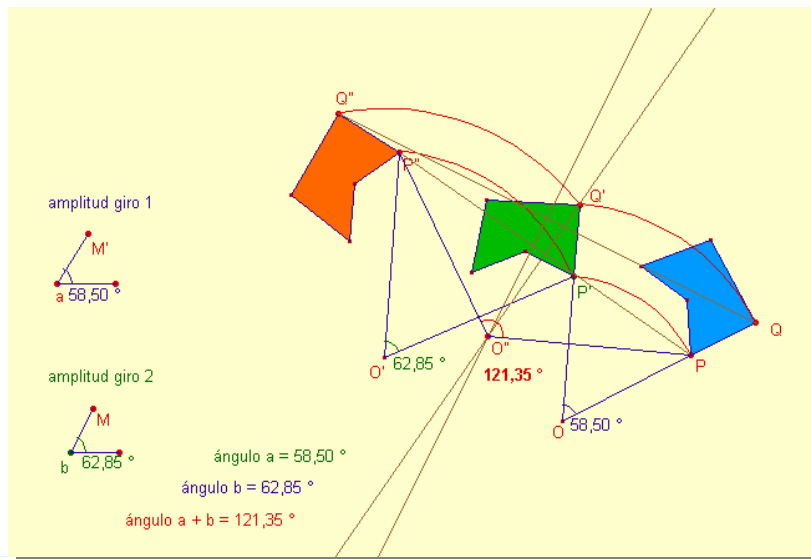
**Tecnología**    **Actividad Cabri-Plus**

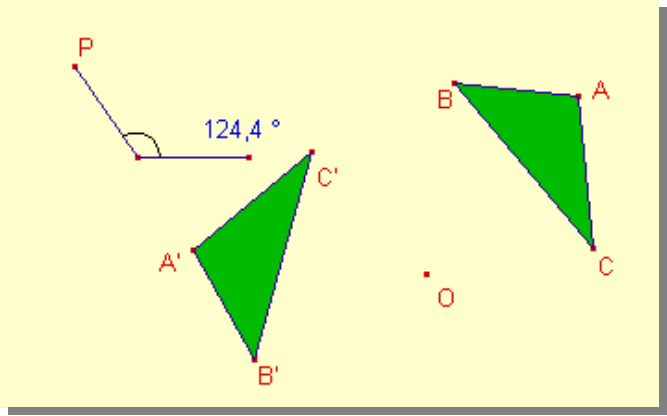


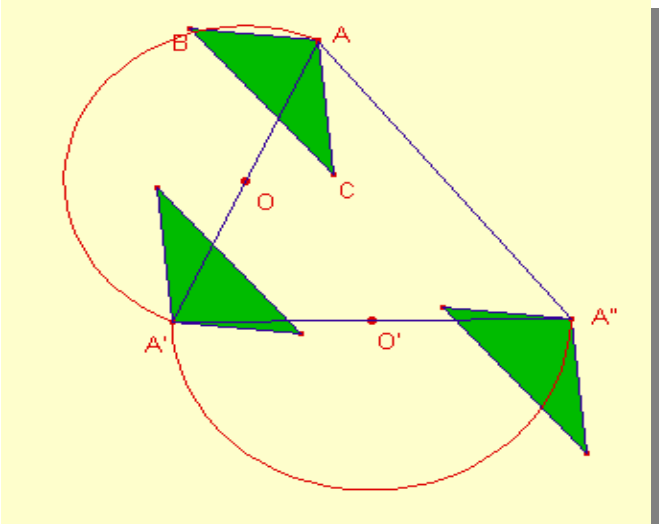
**Título**    **Composición de dos giros de distinto centro**

- Objetivos**
- Entender el movimiento de se obtiene al componer

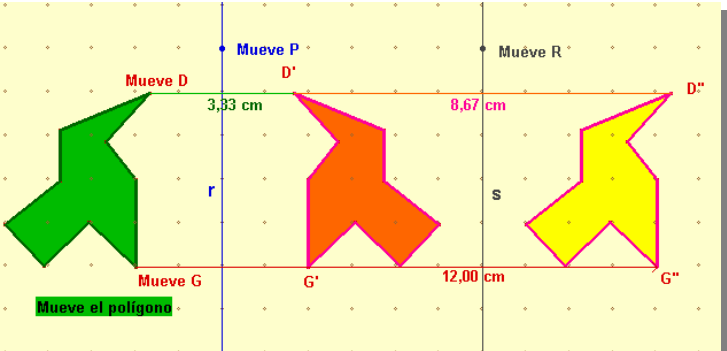
**Tecnología**    **Actividad Cabri-Plus**

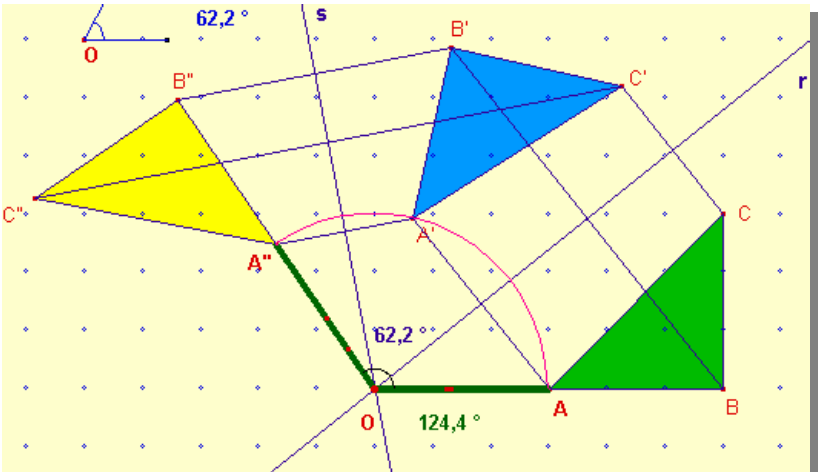


<b>Título</b>	<b>Composición de simetrías centrales del mismo centro</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entender el movimiento de se obtiene al componer</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Actividad Cabri-Plus</b>
	

<b>Título</b>	<b>Composición de simetrías centrales de distinto centro</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entender el movimiento de se obtiene al componer</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Actividad Cabri-Plus</b>
	

<b>Título</b>	<b>Composición de dos simetrías de ejes paralelos</b>
---------------	-------------------------------------------------------

<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entender el movimiento de se obtiene al componer</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<p><b>Flash</b></p> 

<b>Título</b>	<p><b>Composición de dos simetrías de ejes secantes</b></p>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entender el movimiento de se obtiene al componer</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<p><b>Actividad Cabri-Plus</b></p> 

<b>Título</b>	<p><b>Descomposición de un giro en la composición de dos simetrías axiales</b></p>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entender el proceso de descomposición</li> </ul>

<b>Tecnología</b>	<b>Actividad Cabri-Plus</b>	
-------------------	-----------------------------	--


<b>Título</b>	<b>Reflexión en deslizamiento</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entender la <b>reflexión en deslizamiento</b> es un movimiento que es composición de una traslación y una reflexión, en la que el eje es paralelo al vector de la traslación</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Actividad Cabri-Plus</b>

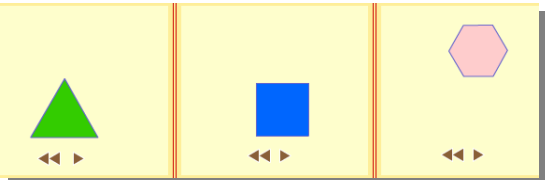
8. Pasamos, quizás, a la parte más atractiva, visualmente hablando, de la unidad como es la interesante **aplicación de los movimientos a la construcción de Mosaicos**. El arte árabe y los grabados de Escher son un estupendo ejemplo de ello. Se muestran bastantes animaciones que hacen ver al alumno como de una forma relativamente "sencilla" partiendo de figuras básicas como el triángulo, cuadrado o hexágono se obtienen figuras muy curiosas con las que además podemos recubrir todo el plano.

<b>Título</b>	<b>Recorrido por la Alhambra</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Recordar que todas las culturas han utilizado traslaciones, giros y simetrías en sus manifestaciones artísticas.</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<p>Flash</p> 

<b>Título</b>	<b>Definición de Mosaico 1</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Mostrar diversas formas de recubrir el plano mediante teselas. Con el triángulo: mediante rotaciones, reflexiones</li> </ul>

<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b>	
-------------------	--------------	------------------------------------------------------------------------------------

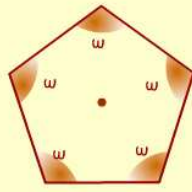
<b>Título</b>	<b>Definición de Mosaico 2</b>	
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar diversas formas de recubrir el plano mediante teselas. Con cuadriláteros</li> </ul>	
<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b>	

<b>Título</b>	<b>Mosaicos regulares</b>	
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ver las posibilidades de formación de mosaicos regulares utilizando un solo polígono regular</li> </ul>	
<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b>	

<b>Título</b>	<b>Mosaicos semiregulares</b>	
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entender que para realizar un mosaico en el que se utilicen "k" polígonos regulares de igual lado que concurran en un vértice, hemos de tener en cuenta, cuál es el valor de los ángulos interiores de un polígono regular, por lo cuál se muestra un applet. A continuación, en el siguiente applet, se deduce y se muestra, qué grupos de "k" polígonos se pueden utilizar para formar mosaicos regulares</li> </ul>	

**Tecnología Flash**

Consideremos, por ejemplo, un pentágono regular. Para averiguar el valor del ángulo interior  $w$  vamos a ver, en primer lugar, cuál es la suma de los ángulos interiores:  $S = w + w + w + w + w = 5 \cdot w$



Teniendo en cuenta que el ángulo interior de un polígono regular de  $n$  lados es:

$$\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$$

y si en un vértice han de concurrir " $k$ " polígonos será:

$$\frac{n_1-2}{n_1} \cdot 180^\circ + \frac{n_2-2}{n_2} \cdot 180^\circ + \dots + \frac{n_k-2}{n_k} \cdot 180^\circ = 360^\circ$$

$$1 - \frac{2}{n_1} + 1 - \frac{2}{n_2} + \dots + 1 - \frac{2}{n_k} = 2$$

$$k-2 = 2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k} \right)$$

$$\left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k} \right) = \frac{k-2}{2}$$

Como  $n_i$  son números naturales, se encuentran **17 soluciones distintas** que cumplen estas ecuaciones. Por tanto, se han encontrado 17 modelos en los que concurren varios polígonos regulares en un vértice.

Algunas de estas soluciones admiten dos formas distintas de ordenarlos, por lo que al final se consiguen **21 modelos de vértices posibles**.

**Título Los Mosaicos Uniformes**

- Objetivos**
- Entender las distintas agrupaciones posibles que dan lugar a mosaicos uniformes.

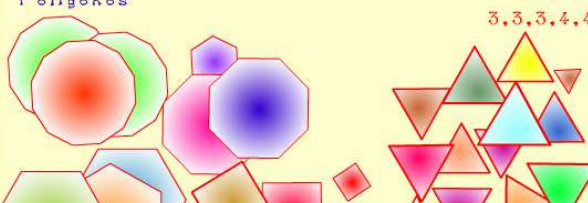
**Tecnología Flash**

MOSAICOS UNIFORMES

Mosaico Tipo


- 3,6,3,6
- 3,3,4,3,4
- 4,6,12
- 3,3,3,3,6
- 4,8,8
- 3,12,12
- 3,4,6,4
- 3,3,3,4,4

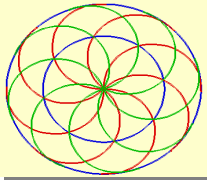
Polígonos




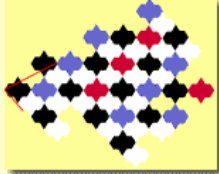

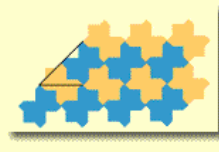
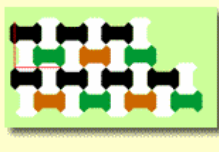


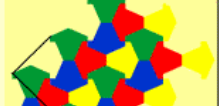
**Título Los Mosaicos No Uniformes**




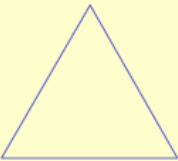
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entender las distintas agrupaciones posibles que dan lugar a los mosaicos denominados <b>no uniformes</b> haciendo ve que se caracterizan porque son necesarios vértices de más de un tipo para poder recubrir el plano.</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<p><b>Flash</b></p> <div data-bbox="539 445 1343 1025" style="border: 1px solid black; padding: 10px; background-color: #ffffcc;"> <p style="text-align: center;"><b>MOSAICOS NO UNIFORMES</b></p> <p>Existen también otras configuraciones de polígonos regulares tales que las suma de sus ángulos es <math>360^\circ</math>. Pero que a diferencia de los mosaicos semiregulares anteriores, esta disposición no puede repetirse indefinidamente en el plano sin que haya solapamiento ni huecos. Son también mosaicos semiregulares pero <b>son no uniformes</b>. Son necesarios vértices de más de un tipo para poder recubrir el plano.</p> <p>Solamente hay <b>7</b> mosaicos de este tipo.</p> <p style="text-align: center;"></p> </div>

<b>Título</b>	<b>Los Rosetones</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Entender como se obtienen los rosetones</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<p><b>Actividad Cabri-Plus</b></p> <div data-bbox="863 1290 1086 1491" style="border: 1px solid black; padding: 5px; background-color: #ffffcc;"> <p style="font-size: small; text-align: center;">Cambia de tamaño las circunferencias</p>  </div>

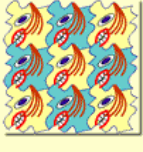
<b>Título</b>	<b>Los Mosaicos Nazaríes</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estudio a fondo de los Mosaicos Nazaríes. Se presentan 11 animaciones de Flash en las que va detallando minuciosamente la construcción de: el avión, estrellas (3), el hueso, la aguja, trapecios (2), el pétalo, rombos, la pajarita</li> </ul>

<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b>	<p><i>" Todo allí es delicado y bello, pintado y decorado como obra de hadas, hadas que sin duda conocían los goces y estímulos de los espíritus románticos ".</i></p> <p><i>" Cuentos de la Alhambra "</i> Washington Irving</p>	<p><i>El avión</i></p> 	<p><i>Estrellas</i></p> 
		<p><i>Estrellas</i></p> 	<p><i>Estrellas</i></p> 	<p><i>El hueso</i></p> 
		<p><i>La aguja</i></p> 	<p><i>Trapezios</i></p> 	<p><i>Trapezios</i></p> 

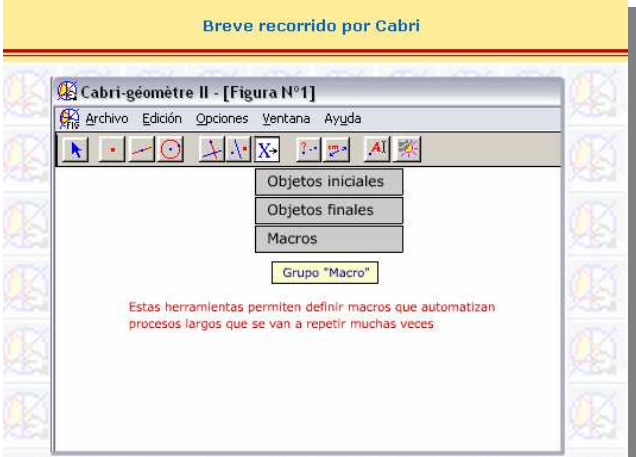
<b>Título</b>	<b>Los Mosaicos de Maurits Cornelius Escher</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar un recorrido por la obra de Escher observando en la misma que las formas geométricas abstractas se transforman en motivos concretos y reconocibles por todos</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b>
	<p style="text-align: center;"><i>Maurits Cornelius Escher</i></p> <p style="text-align: right;"><i>"En vano me esfuerzo,"</i></p> <p style="text-align: right;"><i>Escher nació un 17 de Junio de 1898 en Leeuwarden (Holanda).</i></p> 

<b>Título</b>	<b>Reglas para la construcción de los Mosaicos de Escher</b>	
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Estudiar algunas de las técnicas de Escher basadas en polígonos regulares consistentes en "<b>deformar</b>" algunos lados de los polígonos y llevar los cambios a los otros lados mediante translaciones, rotaciones o reflexiones. Se presentan 4 animaciones en las que se analiza minuciosamente el proceso de construcción, con cada una de las reglas, para obtener las siguientes figuras: la pajarita, los reptiles, los peces, los pájaros</li> </ul>	
<b>Tecnología</b>	<b>Flash</b>	<div style="border: 1px solid black; padding: 10px;"> <p style="text-align: center; color: blue; font-weight: bold;">EJEMPLO 1: LA PAJARITA</p> <p style="text-align: center; color: red;">Se deforma la mitad de un lado y se añade en el mismo lado mediante un giro de <math>180^\circ</math> con centro en el punto medio del lado ►</p>  </div>

<b>Título</b>	<b>Galería de Mosaicos de Escher</b>	
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mostrar el proceso de construcción de otros Mosaicos de Escher para que a partir de aquí el alumno sea capaz de crear los suyos propios</li> </ul>	

<b>Tecnología</b>	<b>GALERÍA DE MOSAICOS ESCHER</b>		
	<i>"En vano me esfuerzo por creer que algo tan obvio como dibujar figuras que se complementan mutuamente no se le hubiera ocurrido a alguien antes"</i>	 Traslación de un lado del cuadrado	 Traslación de dos lados del cuadrado
	 Traslación de lados de un paralelogramo	 Traslación de tres lados de un hexágono	 Rotación de un lado de un cuadrado
	 Rotación de un lado de un rombo	 Rotación de un lado de un hexágono	 Rotación de los lados de un hexágono

**Flash**

<b>Título</b>	<b>Herramientas de del programa CABRI-GEOMETER'S PLUS</b>
<b>Objetivos</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Descripción de las herramientas del programa</li> </ul>
<b>Tecnología</b>	<p><b>Flash</b></p> 

**9. Los alumnos pueden realizar sus propias construcciones**

Tal y como se ha mostrado, las actividades-cabri se pueden realizar con las orientaciones del profesor utilizando el programa de Geometría interactiva Cabri Plus. El profesor puede perfectamente dirigir la actividad para que sea el alumno el que construya "su propio" ejercicio y luego lo transforme en applet con la herra-

mienta Cabriweb, por ello se muestra un breve recorrido por Cabri que ofrece una visión general de las estupendas y potentes herramientas que ofrece.

## **5. EVALUACIÓN DE LA UNIDAD**

Uno de los objetivos fundamentales de la unidad es el mostrar cómo las Matemáticas y, en especial la Geometría, envuelve el mundo que nos rodea. En éste sentido pienso que, lo más interesante de la aplicación desarrollada no es la adquisición de conocimientos en cuanto a los contenidos estrictamente teóricos y de

expresión del lenguaje matemático como tal, sino que más bien, el objetivo de la aplicación es desarrollar la capacidad para relacionar aspectos geométricos relacionados con los movimientos en el plano y la posibilidad de descubrir o crear objetos geométricos nuevos, que pueden ser construidos en función de las técnicas aprendidas, por ejemplo, en la construcción de mosaicos.

En este sentido el manejo el software Cabri-Plus y de Flash me han resultado de gran utilidad en el descubrimiento de las relaciones geométricas.

Por todo lo anterior, pienso que, en líneas generales, he alcanzado los objetivos marcados al inicio del Proyecto que se centraban en:

- ***El desarrollo del razonamiento***
- ***La estimulación del pensamiento lógico***
- ***El desarrollo de la creatividad.***

He mostrado la aplicación a mis compañeros del Departamento y les ha parecido muy interesante, por lo que, en el próximo curso 05-06, se pondrá en práctica la unidad dentro de la programación de 4º de ESO, tanto en la opción A y B.

## **6. CONCLUSIONES**

En lo que respecta a las Matemáticas, es de todos conocido, que recientes estudios sobre el nivel académico de nuestros estudiantes ponen claramente de manifiesto el lamentable lugar que ocupa el conocimiento matemático de los alumnos

españoles a nivel de Europa, pese a su importancia en el desarrollo de la inteligencia y el pensamiento científico y tecnológico tan necesario en la actualidad, en la era del conocimiento.

Es casi una aceptación que los estudiantes parecen “temer” a las matemáticas y no encuentran su utilidad práctica ni su razón de ser. Son seguramente varias las razones educativas de este problema, pero uno de ellas sin duda se relaciona directamente con el manejo didáctico de las matemáticas en el aula. A veces porque los profesores no relacionamos las matemáticas con circunstancias significativas de la vida cotidiana y otras porque no hay un conocimiento profundo que permita ayudar en el aprendizaje del alumno.

Por ello pienso que la utilización de las nuevas tecnologías puede ser una ayuda significativa para el aprendizaje eficiente de las matemáticas y particularmente de la geometría. . Hoy disponemos de programas que buscan superar las propias limitaciones de la enseñanza de la matemática y la geometría, buscando que éstas se vuelvan asequibles al estudiante, que partan de las necesidades del mismo y que le ayuden a aprender. Pero a pesar de todo debemos de desarrollar materiales educativos a modo de “lecciones interactivas”.

Ahora bien, el aprendizaje no es sólo una cuestión de técnicas sino que también requiere de la receptividad por parte del alumno. Esta receptividad se verá favorecida en un entorno en el que se valoren positivamente el esfuerzo y la creatividad y que asuma que debe adaptarse a las necesidades específicas de aprendizaje de los individuos. Como profesores **debemos prepararnos** para aumentar el grado de personalización o individualización de nuestra actividad como uno de los frentes para conseguir mayor eficacia en el trabajo.

En resumen creo que la utilización de las TIC ejerce un efecto positivo en la enseñanza, en cuanto que favorece la asimilación y aplicación de conceptos en el proceso de aprendizaje de los alumnos y mejora el proceso de enseñanza del profesor. Contribuye a aumentar la eficacia de ambos procesos mejorando los resultados y aumentando la motivación de profesores y alumnos y la satisfacción personal de ambos por la realización de un trabajo efectivo y acorde en metodología con los tiempos en que vivimos.

## 7. RECURSOS UTILIZADOS-BIBLIOGRAFÍA

**a. Bibliografía:**

- Cabri Géometre II Plus: (Carrillo de Albornoz y Llamas, 2004, 1-268)
- Carmen Flores, Adolfo López, Ladislao Navarro, Jose María Vázquez, Jose María Vicente: "Matemáticas 3º de ESO": (Servicio de Publicaciones de la Saem Thales, 2000, 150-176)
- Jose María Arias Cabezas, Idelfonso Maza Sáez: "Matemáticas 3º de ESO": (Algaida, 2002, 208-225)
- Flash MX 2004 ActionScript (Derek Franklin y Makar, 2004)
- Ausubel-Novak-Hanesian (1983) *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. México: 2º Edición. Trillas.
- Beléndez (1996) "Algunas consideraciones en torno al proceso enseñanza-aprendizaje de las ciencias". *Revista Ínter universitaria de Formación del Profesorado*, 27, 189-203
- Domingo J. Gallego y Catalina M. Alonso. (1999). *Multimedia en la Web*. Madrid: Dykinson.
- J.A. Mora y J. Rodrigo. "Mosaicos Actividades" Colección :2 puntos. Proyecto Sur Editorial S.L. Granada 1993.
- N.C.T.M. "Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática". Adden C. Alsina y otros "Invitación a la didáctica de la Geometría" Colec. Matemáticas: Cultura y aprendizaje n° 12. Ed. Síntesis. Madrid 1987
- C. Alsina y otros "Simetría dinámica" Colec. Matemáticas: Cultura y aprendizaje n° 13 Ed. Síntesis. Madrid 1989
- Martínez y J. Rivaya. "Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la Geometría". Colec. Matemáticas: Cultura y aprendizaje n° 16. Ed. Síntesis. Madrid 1989.
- Series. "Geometría en el ciclo Medio". S.A.E.M. Thales . Sevilla 1995.

**b. Buscadores:**



- [www.enc.org](http://www.enc.org)  
[http://www.itrc.ucf.edu/l\\_plans/](http://www.itrc.ucf.edu/l_plans/)  
[www.thegateway.org/](http://www.thegateway.org/)
- [www.redemat.com](http://www.redemat.com)  
[www.matematicas.net](http://www.matematicas.net)

**c. Direcciones web visitadasric**

- <http://homepage.mac.com/efithian/Geometry/>
- <http://comp.uark.edu/~cgstraus/symmetry.unit/index.html>
- <http://www.mathsnet.net/transformations/index.html>
- <http://www.math.com/tables/oddsends/vectordefs.htm>
- <http://www.math.com/students/wonders/tessellations.html>
- <http://www.bbc.co.uk/apps/ifl/schools/gigaquiz?path=ks3bitesize/symmetry1&infile=symmetry1>
- <http://www.bbc.co.uk/apps/ifl/schools/gigaquiz?path=ks3bitesize/trans1&infile=trans1>
- <http://www15.addr.com/~dscher/>
- <http://www.terra.es/personal/joseantm/>
- <http://www.bbc.co.uk/education/mathsfile/shockwave/games/bathroom.html>
- <http://www.math.csusb.edu/courses/m129/vector.html>
- [http://www.pntic.mec.es/Descartes/3\\_eso/Movimientos\\_en\\_el\\_plano/Movimi0.htm](http://www.pntic.mec.es/Descartes/3_eso/Movimientos_en_el_plano/Movimi0.htm)
- <http://cerezo.pntic.mec.es/~agarc170/paginas/movi.htm>
- <http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/mptras1.htm>
- <http://roble.pntic.mec.es/~jarran2/cabriweb/moviplano/moviplano.htm>
- <http://roble.cnice.mecd.es/~jarran2/enlaces/CabriII.htm>
- <http://www.educa.rcanaria.es/matematicas/Geometria/Actividades/inicio.htm>

**d. Software:**

- Editor HTML: Macromedia Dreamweaver MX
- Editor Gráfico: Macromedia Fireworks MX
- Animaciones: Macromedia Flash MX
- Cabri II Plus transformados en Applets mediante la herramienta Cabriweb