Profs. Claudio del Pino & Cristian Mardones

1. Determinantes

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. El determinante de A es un número que se denotará $\det(A)$ o también $\mid A \mid$. Definiremos primeramente el determinante de una matriz de orden 1, de orden 2, de orden 3 y de orden n.

Definición 1.1

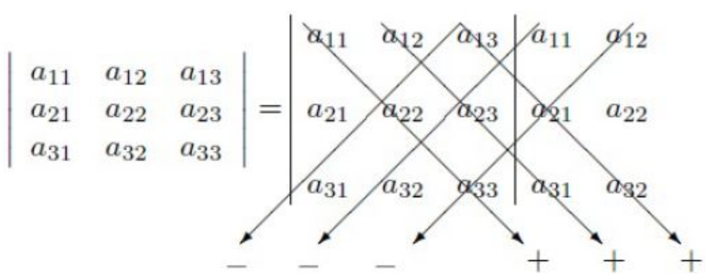
1. Sea $A = [a]$ de orden 1. Se define: $\det(A) = a$.
2. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. El determinante de A, denotado $\det(A)$ o $\mid A \mid$, se define:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

3. Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. El determinante de A, denotado $\det(A)$ o $\mid A \mid$, se define:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

Nota: Un método rápido para calcular un determinante de orden 3 consiste en agregar a la derecha las dos primeras columnas y luego calcular seis productos de tres números, y luego sumar los tres primeros números obtenidos y restar los otros tres, como se muestra a continuación:



Ejemplo 1.1

1. $\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 6 - (-2)\cdot 4 = -18 - (-8) = -18 + 8 = -10$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & 5 \\ -2 & 8 & -12 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot(-12)+(-1)\cdot 5\cdot(-2)+2\cdot 7\cdot 8-2\cdot 1\cdot(-2)-3\cdot 5\cdot 8-(-1)\cdot 7\cdot(-12) = -114$

Definición 1.2 *Sea* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), n > 1$.

1. El *menor* del elemento a_{ij} , denotado M_{ij} es el determinante de la matriz A_{ij} de orden $(n-1)\times(n-1)$, donde A_{ij} es la matriz que resulta de A eliminando la fila i y la columna j de A.

2. El *cofactor* del elemento a_{ij} , denotado A_{ij} es el número:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|M_{ij}|$$

Esto es, el cofactor ij de A se obtiene tomando el determinante del menor ij y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Observe que:

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i+j \text{ es par} \\ -1 & \text{si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

Observación 1.1 (Patrón de signos para cofactores)

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}_{4\times 4} \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{n\times n}$$

Ejemplo 1.2 Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, se tiene:

- $A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} = (-1)^{3+2}\cdot|M_{32}| = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -8$

- $A_{24} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix} = (-1)^{2+4}\cdot|M_{24}| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 5 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -192$

Definición 1.3 (Determinante de $n \times n$)

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $n > 1$. Entonces el determinante de A, o sea $|A|$, está dada por:

$$\mathbf{det}(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j}|M_{1j}|$$

donde $|A_{1j}|$ es el determinante de la submatriz, de orden $n-1$, obtenida desde A al eliminar la primera fila y la j- ésima columna. Aquí se trabajó con la primera fila, también se puede usar otra fila.

También se puede trabajar por columnas:

$$\mathbf{det}(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + \ldots + a_{n1}A_{n1}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1}|M_{i1}|$$

donde $|A_{i1}|$ es el determinante de la submatriz, de orden $n-1$, obtenida desde A al eliminar la primera columna y la i- ésima fila. Aquí se trabajó con la primera columna, también se puede usar otra columna.

Ejemplo 1.3

1.

$$\begin{aligned} \mathbf{det}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

2. Calcular el $\mathbf{det}(A)$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

Solución:

$$\begin{aligned}
|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 9 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{11}A_{13} + a_{14}A_{14} \\
&= 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 6 \\ 2 & 4 & 8 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 6 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (-92) - 3 \cdot (-70) + 5 \cdot (2) - 2 \cdot (-16) \\
&= 160
\end{aligned}$$

Propiedades 1.1

1. $|I_n| = 1$.

   Ejemplo 1.4

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

2. Si $A = (a_{ij})$ es matriz triangular de orden n, entonces $|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$$

3. $|A^t| = |A|$, para toda matriz A de orden n.
4. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$, donde A y B son matrices cuadradas de orden n.
   Luego, $|A^m| = |A|^m$, para todo $m \in \mathbb{N}$.
5. $|\alpha\, A| = \alpha^n\, |A|$, para toda matriz A de orden n.
6. $|A + B| \neq |A| + |B|, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
7. Si cualquier fila (o columna) de A es un vector cero, entonces $|A| = 0$.

Ejemplo 1.5

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ *b)* $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

8. Si la matriz A tiene dos filas (o columnas) iguales, su determinante es igual a 0.

Ejemplo 1.6

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$ *b)* $\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \\ -1 & 6 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

9. Si la fila i o la columna de j de A se multiplica por un escalar $c \Longrightarrow |A|$ se multiplica por c. Es decir, si se denota por B esta nueva matriz, entonces:

$$|B| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{i1} & c \cdot a_{i2} & \dots & c \cdot a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 1.7

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = 16$. Si se multiplica la 2^{da} fila por 4, se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 12 & 4 & 16 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow |B| = 4 \cdot |A| = 64$$

10. Sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \alpha_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} + \alpha_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} + \alpha_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} + \alpha_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \text{ entonces}$$

$$|C| = |A| + |B|$$

En otras palabras, supongamos que A, B, C son idénticas excepto por la columna j y que la la columna j de C es la columna de las j ésimas columnas de A y B, entonces $|C| = |A| + |B|$. Análogamente para las filas.

Ejemplo 1.8

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ y $C = \begin{bmatrix} 1 & -1-6 & 2 \\ 3 & 1+2 & 4 \\ 0 & -2+4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Entonces $|A| = 16, |B| = 108 \Longrightarrow |C| = 124 = |A| + |B|$

11. El intercambio de cualesquiera 2 filas (o columnas) distintas de A tiene el efecto de multiplicar $|A|$ por -1.

Ejemplo 1.9

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$. Al intercambiar las filas 1 y 3 se obtiene $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y al intercambiar las columnas 1 y 2 de A se obtiene $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Entonces $|A| = 16 \Longrightarrow |B| = |C| = -16$.

12. Si una fila (columna) de A es múltiplo escalar de otra fila (columna), entonces $|A| = 0$

Ejemplo 1.10

a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ -4 & 6 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2\cdot(-2) & -3\cdot(-2) & 5\cdot(-2) \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3\cdot 4 \\ -1 & 1 & 0 & 3\cdot 1 \\ 0 & 2 & 9 & 3\cdot 2 \\ 7 & 3 & 6 & 3\cdot 3 \end{vmatrix} = 0$

13. Si se suma un múltiplo escalar de una fila (columna) de A a otra fila (columna) de A, entonces el determinante no cambia.

Ejemplo 1.11 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow |A| = 16$

Si se multiplica la 3^{ra} fila por 4 y se suma la 2^{da} fila, se obtiene una nueva matriz B dada por:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3+4\cdot 0 & 1+4\cdot -2 & 4+5\cdot 4 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 24 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \Longrightarrow |B| = 16 = |A|$$

1.1. Cálculo de determinantes usando operaciones elementales filas

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Considerar la operación elemental fila $E_{ij}(\alpha)$.

$$A \longrightarrow \ldots E_{ij}(\alpha) \ldots \longrightarrow D \quad \Longrightarrow \quad |A| = |D|$$

El determinante de una matriz se puede calcular también, usando matrices elementales filas.

Ejemplo 1.12

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 7 & 1 & 5 \\ -2 & 8 & -12 \end{vmatrix} \overrightarrow{[E_{12}(1)]} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 10 & 0 & 7 \\ -2 & 8 & -12 \end{vmatrix} \overrightarrow{[E_{13}(8)]} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 10 & 0 & 7 \\ 22 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{aligned} &= -1\cdot A_{12} = -1\cdot(-1)^{1+2}\cdot|M_{12}| \\ &= -1\cdot -1\cdot \begin{vmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -1\cdot -1\cdot(40-154) \\ &= -114 \end{aligned}$$

2. Determinantes e inversas

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$.

1. **¿Cuándo A es invertible?**

$$\boxed{A \text{ es invertible} \iff |A| \neq 0 \iff \rho(A) = n}$$

2. **Matriz Adjunta**: Sea $A = (aij)$ una matriz de orden n, $n > 1$. La matriz adjunta de A denotada $\mathbf{adj}(A)$ es la matriz de orden n definida por:

$$\mathbf{adj}(A) = (A_{ij})^t,$$

donde A_{ij} es la matriz de los cofactores.

3. **Matriz inversa**: Sea A una matriz de orden n.

$$A \text{ es invertible} \iff \begin{cases} |A| \neq 0 \\ \text{y} \\ A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\mathbf{adj}(A) \end{cases}$$

Ejercicio 2.1 *Sea* $A = \begin{bmatrix} -2 & m & 1 \\ m & 5 & 3 \\ -5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

a) ¿Para qué valores de m la matriz A es invertible?

b) Para $m = 1$, determinar la adjunta de A.

c) Para $m = 1$ hallar A^{-1}.

Solución:

a) A es invertible, para $m \neq -1$ y $m \neq -\dfrac{7}{5}$

b) $\mathbf{adj}(A) = \begin{bmatrix} 16 & -2 & -2 \\ -20 & -5 & 7 \\ 28 & 1 & -11 \end{bmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{24} & -\frac{7}{24} \\ -\frac{7}{6} & -\frac{1}{24} & \frac{11}{24} \end{bmatrix}$