1. SISTEMAS, MATRICES, DETERMINANTES

1. Responde razonadamente las siguientes preguntas para un sistema de ecuaciones lineales con m ecuaciones y n incógnitas:

   a) Si $m > n$, ¿puede el sistema ser compatible indeterminado?

   b) Si $m < n$, ¿puede el sistema ser compatible determinado?

   Solución: a) Sí, si algunas de las ecuaciones dependen de las otras (o sea, si aparecen filas de ceros al hacer el método de Gauss) puede que el rango de la matriz de coeficientes (r) sea menor que n y entonces, si el sistema es compatible, es indeterminado con $n - r$ grados de libertad (Rouché-Frobenius).

   Por ejemplo, si a dos ecuaciones como $x + y + z = 3$ y $2x + 3y + 4z = 9$ les añadimos otras que sean "combinaciones lineales suyas", por ejemplo su suma $3x + 4y + 5z = 12$ y su diferencia $x+2y+3z = 6$, queda un sistema con 4 ecuaciones ($m = 4$) y 3 incógnitas ($n = 3$) que es compatible indeterminado.

   b) No, porque el rango de la matriz de coeficientes (r) es a lo sumo igual al número de filas, o sea al número de ecuaciones ($r \leq m$). Por tanto el rango es menor que el número de incógnitas ($r < n$) y, en caso de ser compatible, es indeterminado con $n - r$ grados de libertad (Rouché-Frobenius).

o

2. Escribe tres sistemas de ecuaciones lineales con 3 ecuaciones y 2 incógnitas. Uno que sea incompatible, otro que sea compatible determinado y otro que sea compatible indeterminado.

   Solución: Ponemos dos ecuaciones con coeficientes no proporcionales, por ejemplo $x - y = 0$ y $x + y = 2$, lo que nos da una solución única $x = 1$, $y = 1$. Si añadimos una tercera ecuación "que respete esa solución", por ejemplo $2x + 3y = 5$, esta tercera ecuación sobra y el sistema es compatible determinado. En cambio, si la tercera ecuación "no respeta esa solución", por ejemplo $2x + 3y = 4$, el sistema es incompatible.

   Sólo será compatible indeterminado si las tres ecuaciones son proporcionales, por ejemplo $x+2y = 5$, $3x + 6y = 15$, $-2x - 4y = -10$.

o

3. Para una matriz A de tamaño arbitrario: ¿Qué significa que A sea escalonada por filas? ¿Qué significa que A sea escalonada reducida por filas?

   Solución: Llamando "pivote" de una fila no nula a su primera entrada no nula, A es escalonada si las filas nulas son las últimas, y el pivote de cada fila no nula está a la derecha del pivote de la fila anterior.

   Y es escalonada reducida si además cada pivote vale 1 y es el único elemento no nulo de su columna (hay ceros sobre los pivotes).

o

4. ¿Qué es el rango de una matriz? Enuncia el teorema de Rouché-Frobenius para un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas con matriz asociada $(A|B)$.

   Solución: El rango de una matriz A, denotado por $\mathrm{rg}(A)$, es el número de pivotes que tiene cualquier matriz escalonada por filas que sea equivalente por filas a la matriz[1].

   El teorema de Rouché-Frobenius dice que un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas con matriz asociada $(A|B)$ es compatible si y sólo si $rg(A) = rg(A|B)$, y en ese caso tiene $n - rg(A)$ grados de libertad (en particular, es compatible determinado si y sólo si $rg(A) = \mathrm{rg}(A|B) = n$).

—————— o ——————

5. Tenemos un sistema de ecuaciones con matriz $(A\,|\,B)$ que es compatible. ¿Qué relaciones hay entre los siguientes números?

   $N =$ n de incógnitas del sistema. $PAR =$ n de parámetros de los que dependen las soluciones. $\mathrm{rg}(A)$, $\mathrm{rg}(A|B)$ = rangos de las matrices A y $(A|B)$. GL = grados de libertad del sistema. P_A, $P_{(A|B)}$= n de pivotes en una forma escalonada de A y de $(A|B)$.

   Solución: En general $\mathrm{rg}(A) = P_A$ y $\mathrm{rg}(A|B) = P_{(A|B)}$, y por ser el sistema compatible ambos son iguales. En general se tiene $PAR = GL = N - \mathrm{rg}(A)$.

—————— o ——————

6. ¿Cómo se definen los "grados de libertad" que tiene un sistema compatible de ecuaciones lineales? ¿Cómo se relacionan con el número de incógnitas y con la matriz $(A|B)$ del sistema? ¿Cómo se relacionan con la dimensión de una variedad?

   Solución: Es el número mínimo de parámetros necesario para describir las soluciones del sistema, y se puede calcular como el número de incógnitas menos el rango de A (Rouché-Frobenius). La dimensión de una variedad coincide con los grados de libertad del sistema que la define (o sea, de sus ecuaciones implícitas).

—————— o ——————

7. Describe de forma concisa cómo se puede interpretar, en términos del sistema de ecuaciones lineales asociado a cierta matriz, la condición (para vectores de $\mathbb{R}^n$)

   $$\vec{b} \quad \text{es combinación lineal de} \quad \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$$

   Solución: La condición es cierta precisamente cuando es compatible el sistema con matriz asociada $(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\cdots\,\vec{a}_m\,|\,\vec{b})$, con los vectores puestos por columnas. En este caso, cada solución $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ del sistema da un juego de coeficientes para la expresión $\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_m\vec{a}_m$.

—————— o ——————

[1] También es el máximo número de filas linealmente independientes que tiene la matriz, o el tamaño del mayor determinante no nulo "que contiene" la matriz, pero no vimos esto expresamente en clase.

8. Tenemos n vectores-columna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ de $\mathbb{R}^m$, y nos preguntamos si otro vector-columna $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^m$ es o no es combinación lineal de aquéllos. Se pide:

   a) ¿Qué matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales usarías para obtener la respuesta?

   b) ¿Cuál es la relación entre la compatibilidad de ese sistema y la respuesta?

   c) Cuando la respuesta es afirmativa, ¿cómo obtendrías una expresión concreta de $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$?

   Solución: a) La matriz $(\vec{v}_1\, \vec{v}_2\, \cdots\, \vec{v}_n \,|\, \vec{v})$, con los vectores puestos por columnas.

   b) La respuesta es afirmativa (o sea, $\vec{v}$ es CL de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$) si y solo si el sistema es compatible.

   c) Tomaría una solución del sistema $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, y entonces $\vec{v} = r_1\vec{v}_1 + r_2\vec{v}_2 + \cdots + r_n\vec{v}_n$ es la expresión buscada de $\vec{v}$ como CL de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

——————— o ———————

9. Escribe las propiedades que conozcas relativas al producto de matrices. Señala también propiedades que en general no tiene esa operación.

   Solución: Ver los apuntes; el producto de matrices no es conmutativo ni cancelativo. Se pueden añadir propiedades como $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ cuando A y B son invertibles del mismo tamaño, o como $|AB| = |A| \cdot |B|$ cuando A y B son cuadradas del mismo tamaño.

——————— o ———————

10. Dada una matriz cuadrada A, ¿qué significa que A sea invertible? Enuncia todas las propiedades que conozcas que sean equivalentes a esa.

    Solución: Significa que existe otra matriz cuadrada B del mismo tamaño con $A = BA = I_n$ (donde n es el tamaño de las matrices). Una serie de condiciones equivalentes está en el Teorema 1.4.3.

——————— o ———————

11. Describe los tres tipos de operaciones elementales que se pueden hacer a las filas de una matriz, y di cuál es el efecto que tienen en el cálculo de determinantes de matrices cuadradas.

    Solución: Un tipo de operación elemental consiste en intercambiar dos filas, y su efecto es un cambio de signo en el determinante. Otro tipo consiste en multiplicar una fila por un escalar no nulo r, y el determinante de la matriz resultante es el de la inicial multiplicado por r. El tercer tipo consiste en sumar a una fila un múltiplo escalar de otra distinta, y no altera el determinante.

——————— o ———————

12. Enuncia todas las propiedades que conozcas relativas al cálculo de determinantes.

    Solución: El determinante es lineal en cada fila. Se puede "sacar factor común" de cualquier fila. Si hay dos filas proporcionales (en particular, si hay una fila nula) el determinante vale 0. Un intercambio de dos filas produce un cambio de signo en el determinante. Sumar a una fila un múltiplo de otra no altera el determinante. El determinante se puede calcular desarrollando por cualquier fila. Todo lo anterior cambiando "filas" por "columnas". Trasponer una matriz no altera su determinante ($|A^t| = |A|$). El determinante de un producto es el producto de los determinantes ($|AB| = |A||B|$). Un escalar b "sale del determinante" elevado al tamaño n de la matriz ($|bA| = b^n|A|$). El determinante de una matriz triangular superior o inferior es el producto de los elementos de la diagonal principal.

o

13. Enuncia todas las aplicaciones de los determinantes que conozcas.

    Solución: Determinar si una matriz es invertible, y calcular inversas. Resolver sistemas compatibles determinados (Cramer). Calcular rangos. Calcular áreas de paralelogramos y volúmenes de paralelepípedos. Calcular autovalores. Calcular productos vectoriales y mixtos. Calcular ecuaciones de planos en $\mathbb{R}^3$. Calcular la distancia de un punto a un plano en $\mathbb{R}^3$. Clasificar puntos críticos de funciones de varias variables (test de las derivadas segundas).

o

14. ¿Cómo se puede usar un determinante para calcular el área de un paralelogramo en $\mathbb{R}^2$?

    Solución: Si conocemos las coordenadas de los vectores correspondientes a dos lados adyacentes, el área es el valor absoluto del determinante que se obtiene al poner esas coordenadas por filas (o por columnas). Si lo que conocemos son las coordenadas de los vértices, podemos obtener las coordenadas de vectores correspondientes a dos lados adyacentes restando las de vértices adecuados.

o

15. Se considera un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con matriz ampliada $(A \,|\, B)$. Contesta:

    a) ¿Cuándo se puede resolver este sistema usando el método de Cramer?

    b) En ese caso, ¿cómo se calcula el valor de x_1 en la única solución del sistema?

    Solución: El sistema se puede resolver usando el método de Cramer cuando el número de ecuaciones coincide con el de incógnitas ($m = n$) y la matriz (cuadrada) A es invertible.

    Entonces el valor de x_1 en la única solución del sistema es $d/|A|$, donde d es el determinante de la matriz que se obtiene al sustituir la primera columna de A por la columna B.

o

16. Si A es una matriz $m \times n$ y X es una matriz-columna $n \times 1$, explica cómo se puede interpretar el producto AX en términos de las columnas de A. Aplica esa idea para encontrar de manera directa una solución no trivial de cada uno de los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales con matrices de coeficientes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 22 \\ 1 & 30 & 32 \\ 1 & 40 & 42 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 20 & 1 & 23 \\ 30 & 1 & 33 \\ 40 & 1 & 43 \end{pmatrix}$$

Solución: El producto AX (matriz-columna $m \times 1$) es una combinación lineal de las n columnas de A (todas de tamaño $m \times 1$) cuyos coeficientes son las n coordenadas del vector X en el orden correspondiente. O sea, si $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ y las columnas da A son $C_1, C_2, \dots, C_n$ entonces $AX = x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots + x_nC_n$.

En la matriz A_1 es claro que $C_3 = C_2 + 2C_1$, o sea $2C_1 + C_2 - C_3 = \vec{0}$ (el vector columna $(0, 0, 0)^t$). Como la parte izquierda de esta igualdad es una combinación lineal de las columnas de A_1, podemos reescribirla como $A_1\vec{v} = \vec{0}$ donde $\vec{v} = (2, 1, -1)^t$. Este vector es una solución como la que se pide (no es la única, cualquier múltiplo no nulo de $\vec{v}$ serviría), dado que el sistema homogéneo considerado equivale a la ecuación matricial $A_1X = 0$.

Análogamente, en A_2 se cumple claramente $C_3 = C_1 + 3C_2$, o sea $C_1 + 3C_2 - C_3 = \vec{0}$, y por tanto $\vec{w} = (1, 3, -1)^t$ es una solución como la que se pide.

o

17. Encuentra "a ojo" una relación sencilla entre las columnas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 20 & 24 & 1 \\ 80 & 88 & 2 \\ 60 & 64 & 1 \end{pmatrix}$. Usa esa relación para discutir y resolver sin hacer operaciones (pero explicando el proceso) el sistema homogéneo con matriz $(A\,|\,0)$.

Solución: Si las columnas son C_1, C_2 y C_3, hay una relación evidente $C_2 = C_1 + 4C_3$. Por tanto el vector-columna $\vec{v} = (1, -1, 4)^t$ satisface $A\vec{v} = \vec{0}$, o sea es una solución del sistema, que por tanto es compatible con al menos 1 grado de libertad (tiene más soluciones que la trivial). Para tener 2 grados de libertad la matriz debería tener rango 1, o sea debería tener todas sus filas proporcionales, cosa que no ocurre. Por tanto tiene exactamente 1 grado de libertad, y sus soluciones son los múltiplos de $\vec{v}$.

Observación: también es clara la relación $F_2 = F_1 + F_3$ entre las filas, y permite hacer el mismo tipo de discusión del sistema (la relación nos dice que el rango no es 3, la no proporcionalidad nos dice que no es 1, por tanto el rango es 2 y hay 1 grado de libertad). Pero esta relación entre las filas <u>no nos da una solución</u>. Sí nos dice que el vector-fila $\vec{w} = (1, -1, 1)$ verifica $\vec{w}\,A = (0, 0, 0)$, pero esto no ayuda a encontrar una solución del sistema $AX = 0$ (donde X es un vector-columna).

o

18. En $\mathbb{R}^2$, expresa el vector $(25, 15)$ como combinación lineal de los vectores $(1, 2)$ y $(3, 1)$.

Solución: Buscamos a, b con $(25, 15) = a(1, 2) + b(3, 1) = (a + 3b, 2a + b)$, o sea con $a + 3b = 25$ y $2a + b = 15$, y resolviendo el sistema se obtiene $a = 4$, $b = 7$.

o

19. Encuentra el único valor de a tal que $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Para ese valor de a, expresa $\vec{u}$ como combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

Solución: $\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ si y sólo si el sistema con matriz ampliada $[\vec{v}\,\vec{w}|\vec{u}]$ es compatible. Hacemos operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 4 & -2 & a \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & a \\ 3 & 1 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -10 & a-8 \\ 0 & -5 & a-6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 6-a \\ 0 & 0 & 4-a \end{array}\right)$$

Por tanto, el valor pedido es $a = 4$. Los coeficientes de la combinación lineal son las soluciones del sistema; para hallarlas seguimos transformando la matriz con ese valor de a:

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2/5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 6/5 \\ 0 & 1 & 2/5 \end{array}\right)$$

Por tanto $\vec{u} = \dfrac{6}{5}\,\vec{v} + \dfrac{2}{5}\,\vec{w}$.

o

20. Discute y resuelve el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & + & t & = & 2 \\ 2x & - & y & - & z & - & t & = & 1 \\ -x & + & y & + & 2z & - & t & = & 0 \\ 3x & + & 2y & - & 4z & - & 3t & = & 1 \end{array}\right\}$$

Solución: Se puede observar que el determinante de la matriz de coeficientes no es cero y aplicar el método de Kramer, pero esto obliga a calcular 5 determinantes de tamaño 4×4. Se hacen menos cuentas con el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & -6 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -18 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 27 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

por tanto el sistema es compatible determinado, y ahora resolviendo de abajo hacia arriba o llegando a la forma escalonada reducida se obtiene la solución única $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$, $t = 1$.

o

21. Discute y resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales: $\left\{ \begin{array}{c} 2x+z=y+2t+7 \\ 3x=4y+z+8t+3 \\ 5x=7y+2z+14t+4 \end{array} \right\}$

Solución: La matriz del sistema con incógnitas x, y, z, t es $\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & -4 & -1 & -8 & 3 \\ 5 & -7 & -2 & -14 & 4 \end{array} \right)$.

Podemos manipularla de diversas formas para resolver el sistema. Veamos dos opciones (hay bastantes más igual de razonables y que requieren un trabajo similar en cuanto a cuentas):

Opción 1: Ponemos un 1 en la primera columna haciendo $F_2 - F_1$ y a partir de ahí hacemos un proceso estándar de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -2 & 7 \\ 3 & -4 & -1 & -8 & 3 \\ 5 & -7 & -2 & -14 & 4 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 1 & -2 & 7 \\ 1 & -3 & -2 & -6 & -4 \\ 5 & -7 & -2 & -14 & 4 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & -3 & -2 & -6 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & -2 & 7 \\ 5 & -7 & -2 & -14 & 4 \end{array} \right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & -3 & -2 & -6 & -4 \\ 0 & 5 & 5 & 10 & 15 \\ 0 & 8 & 8 & 16 & 24 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & -3 & -2 & -6 & -4 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 2 & 3 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right)$$

El sistema es pues compatible indeterminado con dos grados de libertad, y se resuelve asignando parámetros a las incógnitas sin pivote: con $z=\alpha$ y $t=\beta$ se obtiene $x=5-\alpha$ e $y=3-\alpha-2\beta$, por lo que la solución general la podemos expresar como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Opción 2: Como la tercera columna es especialmente cómoda, podemos reorganizar las incógnitas como z, x, y, t, reescribir la matriz con ese orden y hacer un proceso estándar de Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 2 & -1 & -2 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & -8 & 3 \\ -2 & 5 & -7 & -14 & 4 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 2 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & -10 & 10 \\ 0 & 9 & -9 & -18 & 18 \end{array} \right) \to$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 2 & -1 & -2 & 7 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 & 2 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

Al resolver hay que recordar el cambio de orden: asignamos parámetros a $y=\alpha$ y $t=\beta$, y en función de ellos despejamos $z=3-\alpha-2\beta$ y $x=2+\alpha+2\beta$, por lo que la solución general es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o

22. Discute y resuelve el sistema de ecuaciones lineales $\left\{ \begin{array}{c} 2x + y + 4t = 4 - z \\ 5x + 8y + 10t = 3z - 1 \\ 3x + 2y + z + 6t = 5 \end{array} \right\}$

Muestra tres soluciones que sean puntos no alineados.

¿Existe alguna solución en la que la tercera coordenada sea el doble de la segunda?

Solución: La matriz del sistema con incógnitas x, y, z, t es $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 5 & 8 & -3 & 10 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{array} \right)$.

Hay muchas formas de manipular la matriz para obtener una forma escalonada. Por ejemplo, podemos poner un 1 a la izquierda haciendo $F_3 - F_1$, y entonces pasamos esa tercera fila arriba para obtener:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 5 & 8 & -3 & 10 & -1 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & \mathbf{1} & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

Eliminando la última fila hemos llegado a una forma escalonada en la que vemos que el rango es 2 y no hay pivotes en la columna de términos independientes, por lo que el sistema es compatible con 2 grados de libertad (número de incógnitas menos rango).

Para resolverlo, vemos que en la columna de x y en la de z hay "unos que están solos" (marcados en negrita), lo que permite despejar directamente esas incógnitas en términios de las otras. Por tanto asignamos parámetros a esas otras, $y = \alpha$ y $t = \beta$ y tenemos $x = 1 - \alpha - 2\beta$ y $z = 2 + \alpha$, por lo que la solución general es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Para mostrar tres soluciones no alineadas basta con particularizar los parámetros (α, β) por ejemplo a los valores $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ para obtener los puntos $P = (1, 0, 2, 0)$, $Q = (0, 1, 3, 0)$ y $R = (-1, 0, 2, 1)$, que no están alineados pues $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{PR} = (-2, 0, 0, 1)$ no son proporcionales.

Finalmente, se pide una solución con $z = 2y$, o sea con $2 + \alpha = 2\alpha$, lo que equivale a $\alpha = 2$; como la condición no afecta a β, tomamos por ejemplo $\beta = 0$ para obtener el punto $(-1, 2, 4, 0)$.

o

23. ¿Para qué valores de b es posible expresar de varias formas distintas el vector $\begin{pmatrix} b+1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ b \\ -2 \end{pmatrix}$?

Solución: Se trata de ver cuándo es compatible indeterminado el sistema con matriz ampliada

$$(A \,|\, B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 2 & b+1 \\ -1 & 2 & b & 1 \\ b & 1 & -2 & 4 \end{array} \right)$$

Si $\mathrm{rg}(A) = 3$ entonces también $\mathrm{rg}(A|B) = 3$ y el sistema es compatible determinado, que no es lo que buscamos. Nos interesan por tanto solamente los valores con $\mathrm{rg}(A) < 3$, o sea con $|A| = 0$. Calculamos

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & b & 2 \\ -1 & 2 & b \\ b & 1 & -2 \end{vmatrix} = (b+1)(b+2)(b-3)$$

(se puede calcular por Sarrus para obtener $b^3 - 7b - 6$ y entonces factorizarlo usando Ruffini, o empezar haciendo algún cero, por ejemplo con $F_2 + F_1$, que da el factor común $b + 2$ y permite segur con $C_3 - C_2$).

Los valores interesantes de b son por tanto $b = -1$, $b = -2$ y $b = 3$. Para $b = -1$ se tiene

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

por lo que el sistema es incompatible y $b = -1$ **no** es uno de los valores pedidos. Para $b = -2$ se tiene

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

por lo que el sistema compatible indeterminado y $b = -2$ **sí** es uno de los valores pedidos. Para $b = 3$ se tiene

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \end{array}\right)$$

por lo que el sistema compatible indeterminado y $b = 3$ **también** es uno de los valores pedidos.

o

24. Discute este sistema de ecuaciones con incógnitas x, y, z, t en función de los valores de a y b.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 14 \\ -x & + & 4y & + & 5z & + & 10t & = & 22 \\ 7x & + & 8y & + & 13z & + & 14t & = & 62 \\ 3x & + & 3y & + & 5z & + & at & = & b \end{array}\right\}$$

Solución: Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 14 \\ -1 & 4 & 5 & 10 & 22 \\ 7 & 8 & 13 & 14 & 62 \\ 3 & 3 & 5 & a & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 14 \\ 0 & 6 & 8 & 14 & 36 \\ 0 & -6 & -8 & -14 & -36 \\ 0 & -3 & -4 & a-12 & b-42 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+\frac{1}{2}F_2]{\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 14 \\ 0 & 3 & 4 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & a-5 & b-24 \end{array}\right)$$

Por tanto, llamando $(A|B)$ a la matriz del sistema, se tiene:

- Para $a \neq 5$ se tiene $\mathrm{rg}(A) = 3$ y $\mathrm{rg}(A|B) = 3$, luego el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad.
- Para $a = 5$ y $b = 24$ se tiene $\mathrm{rg}(A) = 2$ y $\mathrm{rg}(A|B) = 2$, luego el sistema es compatible indeterminado con 2 grados de libertad.
- Para $a = 5$ y $b \neq 24$ se tiene $\mathrm{rg}(A) = 2$ y $\mathrm{rg}(A|B) = 3$, luego el sistema es incompatible.

o

25. Discute (indicando los grados de libertad cuando sea compatible) este sistema de ecuaciones con incógnitas x, y, z, t en función de los valores de a y b.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 3y & - & z & + & 2t & = & 4 \\ -x & + & y & + & 2z & + & 3t & = & 5 \\ 5x & + & 7y & - & 7z & & & = & 2 \\ 5x & + & 3y & - & 8z & + & at & = & b \end{array}\right\}$$

Solución: Aplicamos el método de Gauss de forma elemental:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -7 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & -8 & a & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & -8 & -2 & -10 & -18 \\ 0 & -12 & -3 & a-10 & b-20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+5 & b+7 \end{array}\right)$$

Por tanto, llamando $(A|B)$ a la matriz del sistema, se tiene:

- Para $a \neq -5$ se tiene $\text{rg}(A) = 3$ y $\text{rg}(A|B) = 3$, luego el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad.
- Para $a = -5$ y $b = -7$ se tiene $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A|B) = 2$, luego el sistema es compatible indeterminado con 2 grados de libertad.
- Para $a = -5$ y $b \neq -7$ se tiene $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A|B) = 3$, luego el sistema es incompatible.

o

26. Se pide, para el sistema homogéneo con matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix}$:

a) Discútelo según los valores de b, indicando los grados de libertad cuando proceda.

b) Resuélvelo para $b = -2$.

Solución: (a) Como el sistema es homogéneo, siempre es compatible, por lo que sólo hay que indicar si es determinado o indeterminado, indicando los grados de libertad en este último caso.

Una opción: Operamos por filas usando como pivote el 1 de abajo a la izquierda:

$$\begin{pmatrix} b & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1-b & 1-b^2 \\ 0 & b-1 & 1-b \\ \mathbf{1} & 1 & b \end{pmatrix}$$

Si $b = 1$ las dos primeras filas se anulan y el rango de A es 1, por lo que el sistema es indeterminado con 2 grados de libertad. Si $b \neq 1$, podemos dividir cada una de las dos primeras filas por $1 - b$ y luego usar el pivote de arriba a la izquierda para obtener

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1+b \\ 0 & -1 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1+b \\ 0 & 0 & 2+b \\ \mathbf{1} & 1 & b \end{pmatrix}$$

Si $b = -2$ una fila se anula y quedan 2 pivotes, luego el sistema es indeterminado con 1 grado de libertad. Si $b \neq -3$ (y $b \neq 1$) entonces hay 3 pivotes y el sistema es determinado.

Otra opción: Empezamos sumando a la primera fila las otras dos para obtener $(b+2\ \ b+2\ \ b+2)$.

Si $b=-2$ entonces la primera fila se anula y queda la siguiente matriz, en la que aplicamos Gauss para obtener 2 pivotes, luego el sistema es compatible con 1 grado de libertad:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & -2 & 1 \\ 0 & \mathbf{3} & -3 \end{pmatrix}$$

Si $b \neq -2$ dividimos la primera fila por $b+2$ y restamos a cada fila la primera:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & b-1 & 0 \\ 0 & 0 & b-1 \end{pmatrix}$$

Si $b=1$ queda una única fila no nula y el rango de A es 1 (2 grados de libertad), y si $b \neq 1$ (y $b \neq -3$) quedan 3 pivotes y el sistema es determinado.

Otra opción: Se calcula el determinante de A, que vale $b^3-3b+2=(b-1)^2(b+2)$. Entonces para $b \neq 1$ y $b \neq -2$ el determinante no es nulo y el sistema es determinado. Para $b=1$ y $b=-2$ se trabaja con la matriz concreta de modo sencillo para obtener ls mismos resultados que antes.

(b) Para resolverlo cuando $b=-2$ podemos aprovechar algunas de las manipulaciones anteriores; por ejemplo en la primera opción vemos que nos queda

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{1} & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} & -1 \\ \mathbf{1} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y haciendo $z=\alpha$ vemos que las soluciones son las ternas (α,α,α) con α un número cualquiera.

———————— o ————————

27. Se pide, para el sistema homogéneo con matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ b & 1 & 1 \\ b+1 & b+1 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Discútelo según los valores de b, indicando los grados de libertad cuando proceda.

b) Resuélvelo para el valor de b para el cual tiene un grado de libertad.

Solución: Como el sistema es homogéneo, siempre es compatible, por lo que sólo hay que indicar si es determinado o indeterminado, indicando en este caso los grados de libertad que serán $3-\mathrm{rg}(A)$ (número de incógnitas menos el rango de la matriz). Operamos por filas:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & b \\ b & 1 & 1 \\ b+1 & b+1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-(b+1)F_1]{F_2-bF_1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & b \\ 0 & 1-b & 1-b^2 \\ 0 & 0 & 2-b^2-b \end{pmatrix}$$

La expresión $2-b^2-b=-(b^2+b-2)$ se anula para $b=1$ y para $b=-2$. Para valores de b distintos de estos la matriz tiene tres pivotes en la diagonal, por lo $\mathrm{rg}(A)=3$ y el sistema es compatible determinado, con solución única $(0,0,0)$ al ser homogéneo. Para $b=1$ se anulan las dos últimas filas, por lo que $\mathrm{rg}(A)=1$ y así el sistema es indeterminado con 2 grados de libertad. Finalmente, para $b=-2$ hay pivotes en las dos primeras filas, por lo que $\mathrm{rg}(A)=2$ y así el sistema es indeterminado con 1 grado de libertad. Para resolverlo en este caso basta con sustituir $b=-2$

en la última expresión, eliminar la última fila que se anula, y terminar con una aplicación estándar del método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 \end{pmatrix}$$

Asignando un parámetro a la incógnita sin pivote, $z = \lambda$, se obtiene $x = \lambda$ e $y = \lambda$ y por tanto las soluciones del sistema son las ternas $(x, y, z) = (\lambda, \lambda, \lambda) = \lambda(1, 1, 1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Otra opción consiste en calcular el determinante de A que vale (usando Sarrus)

$$2 + b + 1 + b^3 + b^2 - b^2 - b - b - 1 - 2b \;=\; b^3 - 3b + 2 \;=\; (b-1)^2(b+2)$$

(para la última factorización se observa que 1 es raíz, se divide el polinomio por Ruffini, etcétera). Para valores distintos de 1 y de -2 el determinante no se anula, luego el rango de A es 3 y el sistema es determinado, y para esos dos valores concretos se analizan los sistemas correspondientes.

—————————— o ——————————

28. Se pide, para el sistema de ecuaciones lineales $\left\{ \begin{array}{c} 2x + y + 3z + 4t = 14 \\ 4x + 3y + z + 2t = 12 \\ 2x + 3y + mz - 8t = -18 \end{array} \right\}$

(a) Discútelo según los valores de m.

(b) Para $m = 0$, da tres soluciones distintas del sistema que sean puntos alineados.

(c) Para algún valor de m que haga al sistema compatible con 2 grados de libertad, da tres soluciones distintas del sistema que sean puntos NO alineados.

Solución: (a) La matriz del sistema con incógnitas x, y, z, t es $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 14 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 3 & m & -8 & -18 \end{array}\right)$.

Como en la primera columna todas las entradas son pares, podemos usar el 2 como pivote cómodo para poner ceros debajo, y el resto de la manipulación para obtener una forma escalonada es estándar:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 & 14 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 12 \\ 2 & 3 & m & -8 & -18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 & 14 \\ 0 & \mathbf{1} & -5 & -6 & -16 \\ 0 & 2 & m-3 & -12 & -32 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 & 14 \\ 0 & \mathbf{1} & -5 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & \mathbf{m+7} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para $m = -7$ se anula la última fila y quedan 2 pivotes, ninguno en la columna de términos independientes, por lo que el sistema es compatible con 2 grados de libertad (incógnitas menos rango). Para $m \neq -7$ quedan 3 pivotes, ninguno entre los términos independientes, por lo que el sistema es compatible con 1 grado de libertad.

(b) En particular, para $m = 0$ el conjunto de soluciones es una recta (1 grado de libertad) y por tanto cualesquiera tres soluciones estarán alineadas. Lo resolvemos dividiendo la tercera fila por 7 y poniendo ceros sobre los pivotes para llegar a una forma escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 & 14 \\ 0 & \mathbf{1} & -5 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & 1 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 5 & 15 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Asignando un parámetro a la incógnita sin pivote, $t = \alpha$, el resto “se despejan solas”: $x = 15 - 5\alpha$, $y = -16 + 6\alpha$, $z = 0$, por lo que la solución general es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

y haciendo $\alpha = 0, 1, 2$ obtenemos las soluciones alineadas $P = (15, -16, 0, 0)$, $Q = (10, -10, 0, 1)$ y $R = (5, -4, 0, 2)$.

(c) Para el único valor que hace al sistema compatible con 2 grados de libertad, $m = -7$, la última fila desaparece y tenemos entonces

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & 1 & 3 & 4 & 14 \\ 0 & \mathbf{1} & -5 & -6 & -16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & 0 & 8 & 10 & 30 \\ 0 & \mathbf{1} & -5 & -6 & -16 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 4 & 5 & 15 \\ 0 & \mathbf{1} & -5 & -6 & -16 \end{array}\right)$$

Asignando parámetros a las incógnitas sin pivote, $z = \beta$ y $t = \gamma$, se obtiene $x = 15 - 4\beta - 5\gamma$, $y = -16 + 5\beta + 6\gamma$, por lo que la solución general es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Para mostrar tres soluciones no alineadas basta con particularizar los parámetros (β, γ) a los valores $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ para obtener los puntos $P = (15, -16, 0, 0)$, $Q = (11, -11, 1, 0)$ y $R = (10, -10, 0, 1)$, que no están alineados pues $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son justo los vectores que aparecen en la solución general, que no son proporcionales.

o

29. Dado el sistema de ecuaciones lineales con incógnitas x, y, z

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & ay & + & (3-2a)z & = & -3 \\ (a-1)x & & & + & (1-a)z & = & 1 \\ (a-1)x & + & ay & + & z & = & 1 \end{array} \right\}$$

discútelo en función de los valores de a, y resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Solución: El determinante de la matriz de coeficientes puede calcularse así

$$\begin{vmatrix} 3 & a & 3-2a \\ a-1 & 0 & 1-a \\ a-1 & a & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & a & 3-2a \\ a-1 & 0 & 1-a \\ a-4 & 0 & 2a-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & a & 6-2a \\ a-1 & 0 & 0 \\ a-4 & 0 & 3a-6 \end{vmatrix} = -a(a-1)(3a-6)$$

(en la primera igualdad se hace $F_3 + F_1$ y en la segunda $C_3 + C_1$). Por tanto, para $a \neq 0, 1, 2$ el determinante no es nulo y el sistema es compatible determinado.

Para $a = 1$ y $a = 2$ salen sistemas incompatibles, porque aparece un pivote en la matriz ampliada:

$$a = 1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad a = 2 : \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{6} \end{array}\right)$$

Para $a = 0$ resolvemos por Gauss (no ponemos la 3 fila porque sale igual que la 2)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 0 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible con 1 grado de libertad y se resuelve fácilmente: $(x, y, z) = (-1, 0, 0) + \alpha(0, 1, 0)$.

o

30. Dado el sistema con incógnitas x, y, z, t y matriz ampliada

$$(A \,|\, B) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & p+1 \\ 1 & p & -1 & p^2-2 & p \\ p & 1 & 1 & p+2 & 1 \end{array}\right)$$

discútelo en función de los valores del parámetro p, y resuélvelo para $p = 1$ y para el único valor de p que lo hace compatible con 2 grados de libertad.

Solución: Hacemos operaciones elementales en las filas de la matriz para escalonarla:

$$(A \,|\, B) \xrightarrow[F_3 - pF_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & p+1 \\ 0 & p-1 & -1 & p^2-4 & -1 \\ 0 & 1-p & 1 & 2-p & 1-p-p^2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 + F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & p+1 \\ 0 & p-1 & -1 & p^2-4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & p^2-p-2 & -p-p^2 \end{array}\right)$$

Esta última matriz tiene un pivote claro en la 1 fila, y también uno en la 2 fila (que está en la 2 o en la 3 columna). En cuanto a la 3 fila, como las raíces de $p^2 - p - 2$ son 2 y -1, para $p \neq 2$ y $p \neq -1$ hay un pivote (en la 4 columna) y por tanto $\mathrm{rg}(A) = 3$; como sólo hay 3 filas, también es $\mathrm{rg}(A \,|\, B) = 3$ y por tanto para esos valores el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad.

Para $p = 2$ la última fila es $(0\,0\,0\,0 \,|\, -6)$ y por tanto el sistema es incompatible.

Por último, para $p = -1$ la última fila es nula, luego se tiene $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A \,|\, B) = 2$ y por tanto el sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad.

Para este valor se pide resolver: lo sustituimos en la última matriz

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

y haciendo ahora $y = \alpha$ y $t = \beta$ se tiene directamente $x = -\alpha - 2\beta$ y $z = 1 - 2\alpha - 3\beta$, por lo que la solución general la podemos expresar como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

También se pide resolver para $p = 1$: sustituyendo en la última matriz general se tiene

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - 3F_3]{F_1 - 2F_3} \left(\begin{array}{cccc|r} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right)$$

Haciendo $y = \alpha$ se tiene directamente $x = -\alpha$ y $z = -2$ y $t = 1$, por lo que la solución general es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o

31. Se pide, para el sistema con incógnitas x, y, z, t y matriz ampliada

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -7 & 9 \\ -2 & 4 & -6 & 8 & -10 \\ 5 & -7 & 9 & 2p^2-29 & 2p+19 \\ 1 & 3 & -7 & p^2+2 & p-12 \end{array}\right)$$

a) Discútelo en función de los valores del parámetro p. **b)** Resuélvelo para $p = 4$. **c)** Resuélvelo para el único valor de p que lo hace compatible con 2 grados de libertad.

Solución: a) Hacemos operaciones elementales por filas hasta llegar a una matriz escalonada:

$$(A\,|\,B) \xrightarrow{F_i - bF_1} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -3 & 5 & -7 & 9 \\ 0 & -2 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & 8 & -16 & 2p^2+6 & 2p-26 \\ 0 & 6 & -12 & p^2+9 & p-21 \end{array}\right) \xrightarrow[\frac{1}{2}F_3]{-\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -3 & 5 & -7 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 4 & -8 & p^2+3 & p-13 \\ 0 & 6 & -12 & p^2+9 & p-21 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4-6F_2]{F_3-4F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -3 & 5 & -7 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & p^2-9 & p+3 \\ 0 & 0 & 0 & p^2-9 & p+3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4-F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -3 & 5 & -7 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & p^2-9 & p+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si $p \neq \pm 3$ hay 3 pivotes, ninguno en la columna de términos independientes y por tanto el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad (4 incógnitas, 3 pivotes).

Si $p = 3$ entonces aparece un pivote en la última columna, por lo que el sistema es incompatible.

Si $p = -3$ entonces la tercera fila se anula y quedan dos pivotes, ninguno en la última columna, por lo que el sistema es compatible indeterminado con 2 grados de libertad.

b) Sabemos que habrá 1 grado de libertad. Sustituimos $p = 4$ en la última matriz (y dividimos la última fila por 7), y a su vez llevamos esta hasta una forma escalonada reducida:

$$(A\,|\,B) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -3 & 5 & -7 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-3F_3]{F_1+7F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -3 & 5 & 0 & 16 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+3F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right)$$

Ahora basta con asignar un parámetro a la incógnita sin pivote, digamos $z = \alpha$, y tenemos ya despejadas $x = \alpha - 5$, $y = 2\alpha - 7$ y $t = 1$, por lo que las soluciones en términos del parámetro α son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Sustituimos $p = -3$ (y eliminamos la fila de ceros) para obtener

$$(A\,|\,B) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & -3 & 5 & -7 & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 3 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1+3F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 3 & -4 \end{array}\right)$$

Si asignamos parámetros a las incógnitas sin pivote, digamos $z = \beta$ y $t = \gamma$, tenemos ya despejadas $x = -3 + \beta - 2\gamma$ e $y = -4 + 2\beta - 3\gamma$, por lo que las soluciones en términos de esos parámetros son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

o

32. Dado el sistema con incógnitas x, y, z, t y matriz ampliada

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & b+2 \\ 1 & b+1 & -1 & b^2+2b-1 & b+1 \\ b+1 & 1 & 1 & b+3 & 1 \end{array}\right)$$

discútelo en función de los valores del parámetro b, y resuélvelo para $b = 2$ y para el único valor de b que lo hace compatible con 2 grados de libertad.

Solución: Hacemos operaciones elementales en las filas de la matriz para escalonarla:

$$(A\,|\,B) \xrightarrow[F_3-(b+1)F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & b+2 \\ 0 & b & -1 & b^2+2b-3 & -1 \\ 0 & -b & 1 & 1-b & -b^2-3b-1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & b+2 \\ 0 & b & -1 & b^2+2b-3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b^2+b-2 & -b^2-3b-2 \end{array}\right)$$

La última matriz tiene pivotes en las filas 1 y 2 (para $b = 0$ el pivote sería el siguiente 1). En cuanto a la 3 fila, como las raíces de $b^2 + b - 2$ son 1 y -2, para $b \neq 1$ y $b \neq -2$ hay un tercer pivote y por tanto $\text{rg}(A) = 3$; como sólo hay 3 filas, también es $\text{rg}(A\,|\,B) = 3$ y por tanto para esos valores el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad.

Para $b = 1$ la última fila es $(0\,0\,0\,0\,|\,-6)$ y por tanto el sistema es incompatible.

Por último, para $b = -2$ la última fila es nula, luego se tiene $\text{rg}(A) = \text{rg}(A\,|\,B) = 2$ y por tanto el sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad.

Para este valor ($b = -2$) se pide resolver: lo sustituimos en la última matriz

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \mathbf{1} & 3 & 1 \end{array}\right)$$

En vista de las columnas 1 y 3 , las incógnitas x, z "se despejan solas", así que asignamos parámetros a las otras dos: $y = \alpha$, $t = \beta$, con lo que se tiene directamente $x = -\alpha - 2\beta$ y $z = 1 - 2\alpha - 3\beta$, por lo que la solución general la podemos expresar como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

También se pide resolver para $b = 2$: sustituyendo en la última matriz de la primera parte se tiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & \mathbf{1} & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+5F_3]{F_1-2F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & \mathbf{1} & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{array}\right)$$

Haciendo $y = \alpha$ se tiene directamente $x = 10 - \alpha$, $z = 2\alpha - 14$ y $t = -3$, luego la solución general es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -14 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

——— o ———

33. Discutir y resolver en función del parámetro a el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y = 1 \\ x + (1+a)y + az = 1 + a \\ 2x + (2+2a)y + (1+a)z = 2 + a \end{array} \right\}$$

Solución: Aplicando el método de Gauss a la matriz del sistema se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1+a & a & 1+a \\ 2 & 2+2a & 1+a & 2+a \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-2F_2]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & a & a \\ 0 & 2a & 1+a & a \end{array}\right)$$

Para $a = 0$ queda el sistema con matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$, que es compatible indeterminado con un grado de libertad, y su conjunto de soluciones puede describirse como $(x, y, z) = (1 - \lambda, \lambda, 0)$. Para $a \neq 0$ podemos continuar con el método de Gauss dividiendo la segunda fila por a:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2a & 1+a & a \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-2aF_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & -a \end{array}\right)$$

Para $a = 1$ el sistema es incompatible, en vista de la última fila. Para otros casos ($a \neq 0$, $a \neq 1$) es compatible determinado con solución única

$$z = \frac{a}{a-1} \qquad y = 1 - z = \frac{-1}{a-1} \qquad x = 1 - y = \frac{a}{a-1} \qquad \rightsquigarrow \qquad (x, y, z) = \frac{1}{a-1}(a, -1, a)$$

——— o ———

34. Discute (no hay que resolver) en función de los valores de b el sistema de 4 ecuaciones lineales con 4 incógnitas que tiene la siguiente matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b & 0 & b-1 \\ 1 & -b-1 & -2 & 1 & 3-2b \\ -2 & b+2 & 2-b & -2 & 2b-4 \end{array}\right)$$

Solución: Hacemos un proceso estándar de Gauss:

$$(A\,|\,B) \xrightarrow[F_4+2F_1]{F_3-F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & b & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & b & 0 & b-1 \\ 0 & -b & -b-2 & 0 & 2-2b \\ 0 & b & b+2 & 0 & 2b-2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+F_3]{F_3+bF_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -1 & b & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & b & 0 & b-1 \\ 0 & 0 & b^2-b-2 & 0 & b^2-3b+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto hay al menos dos pivotes en A, y habrá un tercero cuando $b^2 - b - 2 = (b-2)(b+1)$ no sea nulo. Por tanto:

- Si $b = -1$ entonces la tercera fila es $(0\ 0\ 0\ 0\ |\ 6)$, por lo que el sistema es incompatible.

- Si $b = 2$ entonces la tercera fila es nula, por lo que $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 2$ y en consecuencia el sistema es compatible con 4-2=2 grados de libertad.

- Si $b \neq 2$ y $b \neq -1$ entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 3$, por lo que el sistema es compatible con 4-3=1 grado de libertad.

o

35. Dado el sistema con incógnitas x, y, z, t y matriz ampliada

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & b \\ 1 & b-1 & -1 & b^2-2b-1 & b-1 \\ b-1 & 1 & 1 & b+1 & 1 \end{array}\right)$$

discútelo en función de los valores del parámetro b, y resuélvelo para algún valor de b que lo haga compatible con 1 grado de libertad.

Solución: Hacemos operaciones elementales estándar en las filas de la matriz para escalonarla:

$$(A\,|\,B) \xrightarrow[F_3-(b-1)F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & b \\ 0 & b-2 & -1 & b^2-2b-3 & -1 \\ 0 & 2-b & 1 & 3-b & 1+b-b^2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & b \\ 0 & b-2 & -1 & b^2-2b-3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b^2-3b & b-b^2 \end{array}\right)$$

En la primera fila hay un pivote (1 columna) y en la segunda también (2 o 3 columna). Por tanto $\text{rg}(A)$ vale 3 cuando $b^2 - 3b \neq 0$ (o sea, cuando $b \neq 0$ y $b \neq 3$). En estos casos también es $\text{rg}(A|B) = 3$ (sólo hay 3 filas) y por tanto el sistema es compatible con 1 grado de libertad (4 incógnitas y rango 3).

Para $b = 0$ la última fila se anula, luego $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = 2$ y el sistema es compatible con 2 grados de libertad (4 incógnitas y rango 2). Para $b = 3$ el sistema es incompatible en vista de su última fila.

Lo resolvemos para $b = 2$, sustituyendo en la última matriz y haciendo más operaciones elementales hasta llegar a una forma escalonada reducida:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-3F_3]{F_1-2F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right)$$

Asignando un parámetro a la incógnita sin pivote, $y = \alpha$, se tiene $x = -\alpha$, $z = -2$ y $t = 1$, luego las soluciones son los $(x, y, z, t) = (-\alpha, \alpha, -2, 1) = (0, 0, -2, 1) + \alpha(-1, 1, 0, 0)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

o

36. Dado el sistema con incógnitas x, y, z, t y matriz ampliada

$$(A\,|\,B) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & b+2 \\ 1 & b+1 & -1 & b^2+2b-1 & b+1 \\ b+1 & 1 & 1 & b+3 & 1 \end{array}\right)$$

discútelo en función de los valores del parámetro b, y resuélvelo para $b = 2$ y para el único valor de b que lo hace compatible con 2 grados de libertad.

Solución: Hacemos operaciones elementales en las filas de la matriz para escalonarla:

$$(A\,|\,B) \xrightarrow[F_3-(b+1)F_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & b+2 \\ 0 & b & -1 & b^2+2b-3 & -1 \\ 0 & -b & 1 & 1-b & -b^2-3b-1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3+F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & b+2 \\ 0 & b & -1 & b^2+2b-3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b^2+b-2 & -b^2-3b-2 \end{array}\right)$$

La última matriz tiene pivotes en las filas 1 y 2 (para $b = 0$ el pivote sería el siguiente 1). En cuanto a la 3 fila, como las raíces de $b^2 + b - 2$ son 1 y -2, para $b \neq 1$ y $b \neq -2$ hay un tercer pivote y por tanto $\mathrm{rg}(A) = 3$; como sólo hay 3 filas, también es $\mathrm{rg}(A\,|\,B) = 3$ y por tanto para esos valores el sistema es compatible indeterminado con un grado de libertad.

Para $b = 1$ la última fila es $(0\,0\,0\,0\,|\,-6)$ y por tanto el sistema es incompatible.

Por último, para $b = -2$ la última fila es nula, luego se tiene $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A\,|\,B) = 2$ y por tanto el sistema es compatible indeterminado con dos grados de libertad.

Para este valor ($b = -2$) se pide resolver: lo sustituimos en la última matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & \mathbf{1} & 3 & 1 \end{array}\right)$$

En vista de las columnas 1 y 3 , las incógnitas x, z "se despejan solas", así que asignamos parámetros a las otras dos: $y = \alpha$, $t = \beta$, con lo que se tiene directamente $x = -\alpha - 2\beta$ y $z = 1 - 2\alpha - 3\beta$, por lo que la solución general la podemos expresar como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

También se pide resolver para $b = 2$: sustituyendo en la última matriz de la primera parte se tiene

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & \mathbf{1} & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2+5F_3]{F_1-2F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & \mathbf{1} & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 \end{array}\right)$$

Haciendo $y = \alpha$ se tiene directamente $x = 10 - \alpha$, $z = 2\alpha - 14$ y $t = -3$, luego la solución general es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -14 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o

37. Discute el siguiente sistema de ecuaciones con incógnitas x, y, z, t en función de los valores de a y b, y resuélvelo en el caso compatible indeterminado con 2 grados de libertad.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & + & 4t & = & 1 \\ -x & + & 4y & + & 5z & - & 2t & = & -5 \\ 3x & & & + & z & + & 10t & = & 7 \\ 3x & + & 3y & + & 5z & + & at & = & b \end{array}\right\}$$

Solución: Aplicamos el método de Gauss a la matriz $(A|B)$ del sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & 1 & 10 & 7 \\ 3 & 3 & 5 & a & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & -8 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & a-12 & b-3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4+\frac{1}{2}F_2]{\frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-11 & b-5 \end{array}\right)$$

- Para $a \neq 11$ se tiene $\operatorname{rg}(A) = 3$ y $\operatorname{rg}(A|B) = 3$, luego el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad (4 incógnitas menos 3 pivotes).
- Para $a = 11$ y $b \neq 5$ se tiene $\operatorname{rg}(A) = 2$ y $\operatorname{rg}(A|B) = 3$, luego el sistema es incompatible.
- Para $a = 11$ y $b = 5$ se tiene $\operatorname{rg}(A) = 2$ y $\operatorname{rg}(A|B) = 2$, luego el sistema es compatible indeterminado con 2 grados de libertad (4 incógnitas menos 3 pivotes).

Para resolverlo en este último caso, podemos por ejemplo seguir aplicando Gauss (tras eliminar la tercera fila) con pivotes en las incógnitas con coeficientes más cómodos, en este caso x y t:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & \mathbf{1} & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-4F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & -10 & -13 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 4 & \mathbf{1} & -2 \end{array}\right)$$

Asignando parámetros a las incógnitas sin pivote ($y = \alpha$ y $z = \beta$) se despejan directamente las otras dos $x = 9 + 10\alpha + 13\beta$ y $t = -2 - 3\alpha - 4\beta$, lo que nos da la solución

$$(x, y, z, t) = (9+10\alpha+13\beta, \alpha, \beta, -2-3\alpha-4\beta) = (9, 0, 0, -2)+\alpha(10, 1, 0, -3)+\beta(13, 0, 1, -4) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

o

38. Discute (no hace falta resolver) el sistema de ecuaciones lineales con la siguiente matriz ampliada en función de los valores de a y de b:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 5 & -3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 7 & 1 \\ 8 & -6 & -1 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & a & b \end{array}\right)$$

Solución: La entrada más cómoda es el -1. Como no hace falta resolver, podemos intercambiar columnas sin problemas, así que lo llevamos al principio con $C_1 \leftrightarrow C_3$ y $F_1 \leftrightarrow F_3$; el resto es un proceso estándar de Gauss:

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 7 & 1 \\ -1 & -6 & 8 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 7 & a & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{-1} & -6 & 8 & -5 & 9 \\ 3 & -2 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 4 & 3 \\ 7 & -3 & 7 & a & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{-1} & -6 & 8 & -5 & 9 \\ 0 & -20 & 28 & -8 & 28 \\ 0 & -15 & 21 & -6 & 21 \\ 0 & -45 & 63 & a-35 & b+63 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{3}F_3]{\frac{1}{4}F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{-1} & -6 & 8 & -5 & 9 \\ 0 & -5 & 7 & -2 & 7 \\ 0 & -5 & 7 & -2 & 7 \\ 0 & -45 & 63 & a-35 & b+63 \end{array}\right) \xrightarrow[elim\, F_3]{F_4-9F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{-1} & -6 & 8 & -5 & 9 \\ 0 & -5 & 7 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & a-17 & b \end{array}\right)$$

Con la notación habitual se tiiene, usando el teorema de Rouché-Frobenius:

- Si $a \neq 17$ entonces $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B) = 3$, por lo que el sistema es compatible con 1 grado de libertad.

- Si $a = 17$ y $b \neq 0$ entonces $\operatorname{rg}(A) = 2$ y $\operatorname{rg}(A|B) = 3$, por lo que el sistema es incompatible.

- Si $a = 17$ y $b = 0$ entonces $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B) = 2$, por lo que es compatible con 2 grados de libertad.

o

39. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de los parámetros a y b (no se pide resolverlo pero sí indicar, cuando sea compatible indeterminado, los grados de libertad):

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & az & = & a \\ x & + & y & + & bz & = & b \\ ax & + & by & + & z & = & a \end{array} \right\}$$

Solución: Escribimos la matriz del sistema y vamos haciendo operaciones por filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 1 & 1 & b & b \\ a & b & 1 & a \end{array}\right) \xrightarrow[F_3-aF_1]{F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & b-a & b-a \\ 0 & b-a & 1-a^2 & a-a^2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & b-a & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & 0 & b-a & b-a \end{array}\right)$$

Si $b \neq a$ el rango de la matriz de coeficientes es 3, igual que el número de incógnitas, luego el sistema es compatible determinado (con solución única $(x,y,z) = \left(\frac{1-a}{b-a}, \frac{a-1}{b-a}, 1\right)$).

Si $b = a$ el sistema queda así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & a-a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & a \\ 0 & 0 & (1+a)(1-a) & a(1-a) \end{array}\right)$$

Entonces, si $a \neq \pm 1$ el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada valen 2, luego el sistema es compatible indeterminado con 1 grado de libertad.

Si $a = 1$ el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada valen 1, luego el sistema es compatible indeterminado con 2 grados de libertad.

Si $a = -1$ la última ecuación es $0x + 0y + 0z = -2$ y el sistema es por tanto incompatible.

o

40. Discute (no hace falta resolver) el sistema de ecuaciones lineales con la siguiente matriz ampliada en función de los valores de a y de b:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 9 & -3 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & -6 & 8 & -1 & 10 \\ 10 & -2 & 4 & 3 & 2 \\ a & -3 & 7 & 7 & b \end{array}\right)$$

Solución: Como no hace falta resolver, podemos intercambiar columnas sin problemas, así que llevamos el -1 a la primera columna con $C_1 \leftrightarrow C_4$ y el resto es un proceso estándar de Gauss:

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -3 & 5 & 9 & 4 \\ -1 & -6 & 8 & 6 & 10 \\ 3 & -2 & 4 & 10 & 2 \\ 7 & -3 & 7 & a & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{-1} & -6 & 8 & 6 & 10 \\ 2 & -3 & 5 & 9 & 4 \\ 3 & -2 & 4 & 10 & 2 \\ 7 & -3 & 7 & a & b \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{-1} & -6 & 8 & 6 & 10 \\ 0 & -15 & 21 & 21 & 24 \\ 0 & -20 & 28 & 28 & 32 \\ 0 & -45 & 63 & a+42 & b+70 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{4}F_3]{\frac{1}{3}F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{-1} & -6 & 8 & 6 & 10 \\ 0 & -5 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & -5 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & -45 & 63 & a+42 & b+70 \end{array}\right) \xrightarrow[elim\, F_3]{F_4 - 9F_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{-1} & -6 & 8 & 6 & 10 \\ 0 & -5 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & a-21 & b-2 \end{array}\right)$$

Con la notación habitual se tiene, usando el teorema de Rouché-Frobenius:

- Si $a \neq 21$ entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 3$, por lo que el sistema es compatible con 1 grado de libertad.

- Si $a = 21$ y $b \neq 2$ entonces $\text{rg}(A) = 2$ y $\text{rg}(A|B) = 3$, por lo que el sistema es incompatible.

- Si $a = 21$ y $b = 2$ entonces $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 2$, por lo que es compatible con 2 grados de libertad.

o

41. Encuentra los valores de a y de b para los que el sistema de ecuaciones lineales con incógnitas x, y, z, t y matriz

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 5 & -14 & 9 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 8 & 7 \\ 4 & -1 & 16 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & a & b \end{array}\right)$$

es compatible indeterminado con 2 grados de libertad, y calcula sus soluciones en ese caso.

Solución: La columna más cómoda es la segunda, así que la intercambiamos con la primera recordando que **ahora el orden de las incógnitas es** y, x, z, t. Además hacemos $F_1 \leftrightarrow F_3$ para poner arriba el -1 y le cambiamos el signo a su fila. Después ponemos ceros bajo el pivote del modo estándar:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 5 & -14 & 9 & 12 \\ 3 & 2 & 1 & 8 & 7 \\ 4 & -1 & 16 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & a & b \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_1 \leftrightarrow F_3 \\ -F_1}]{C_1 \leftrightarrow C_2} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & -4 & -16 & -7 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 8 & 7 \\ 5 & 2 & -14 & 9 & 12 \\ 3 & 5 & 3 & a & b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_4 - 3F_1]{\substack{F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 5F_1}} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & -4 & -16 & -7 & -2 \\ 0 & 11 & 33 & 22 & 11 \\ 0 & 22 & 66 & 44 & 22 \\ 0 & 17 & 51 & a+21 & b+6 \end{array}\right)$$

Ahora eliminamos la tercera fila (es el doble de la segunda), dividimos la segunda por 11 y seguimos:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & -4 & -16 & -7 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 17 & 51 & a+21 & b+6 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 17F_1} \left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & -4 & -16 & -7 & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a-13 & b-11 \end{array}\right)$$

La matriz ya está escalonada y por tanto podemos discutir el sistema: Para $a = 13$ y $b = 11$ es compatible con dos grados de libertad, y es el único caso (para $a \neq 13$ es compatible con 1 grado de libertad, y para $a = 13$ y $b \neq 11$ es incompatible). Para esos valores, eliminamos la tercera fila (nula) y hacemos $F_1 + 4F_2$ para poner un 0 encima del pivote, obteniendo:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{1} & 0 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Ahora asignamos parámetros a las incógnitas sin pivote ($z = \alpha$, $t = \beta$) y expresamos las otras dos en función de estos parámetros, recordando que habíamos intercambiado el orden de x e y. Así tenemos $y = 2 + 4\alpha - \beta$ y $x = 1 - 3\alpha - 2\beta$ y por tanto la solución general es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 3\alpha - 2\beta \\ 2 + 4\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

No está de más comprobar que al sustituir (x, y, z, t) por $(1, 2, 0, 0)$ se obtiene una solución del sistema dado, y que al sustituirlo por $(-3, 4, 1, 0)$ y por $(-2, -1, 0, 1)$ se obtiene una solución del sistema homogeneizado.

o

42. Dado el sistema con incógnitas x, y, z, t y con la siguiente matriz ampliada, discútelo en función de los valores de a y b, y resuélvelo para el caso $a = 1,\ b = 0$ y para el caso $a = 4,\ b = 2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (b+2)(b^2-1)(b^2+1) & 3+a^2-b^2 \end{array}\right)$$

Solución: Antes de nada podemos asegurar que el sistema nunca será compatible determinado, pues $\mathrm{rg}(A) \leq 3$ (hay 3 filas) y hay 4 incógnitas.

Si hacemos $F_2 - F_1$ obtenemos la matriz equivalente

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b+2)(b^2-1)(b^2+1) & 3+a^2-b^2 \end{array}\right)$$

que ya está escalonada, luego permite calcular rangos contando pivotes. Llamamos A a la matriz de coeficientes (a la izquierda de la raya) y B a la última columna (términos independientes).

Segunda fila: Hay un pivote (que está en A) si y solo si $a \neq 1$, y nunca lo hay en B. Por tanto esta fila nunca va a provocar que el sistema sea incompatible, pero sí afectará a los grados de libertad.

Tercera fila: Como b^2+1 nunca es nulo, hay un pivote en A si y solo si $b \neq -2$ y $b \neq \pm 1$; estos casos son compatibles (no hay pivote en B). Cuando no hay pivote en A ($b = -2$ o $b = \pm 1$) tenemos que ver si lo hay en B, para lo que distinguimos dos casos: Si $b = \pm 1$, en la última columna queda $2 + a^2$, que nunca es nulo, y por tanto hay un pivote en B (sistema incompatible). Si $b = -2$, en la última columna queda $a^2 - 1$, y por tanto hay pivote en B salvo que sea $a = \pm 1$.

En resumen, poniendo "Inc" en los casos incompatibles y "n GL" en los casos compatibles indeterminados con n grados de libertad, se tiene:

	$a = 1$	$a = -1$	otros valores de a
$b = -2$	3 GL	2 GL	Inc
$b = \pm 1$	Inc	Inc	Inc
Otros valores de b	2 GL	1 GL	1 GL

Para el caso $a = 1$ y $b = 0$ (con 2 grados de libertad, según lo anterior) la matriz queda

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[elimF_2]{-F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Asignamos parámetros a las incógnitas sin pivote ($y = \alpha$, $z = \beta$) y despejamos fácilmente las otras: $x = 4 - \alpha - \beta$, $t = -2$. En definitiva, las soluciones son

$$(x, y, z, t) = (4, 0, 0, -2) + \alpha(-1, 1, 0, 0) + \beta(-1, 0, 1, 0) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Para el caso $a = 4$ y $b = 2$ (con 1 grado de libertad, según lo anterior) la matriz queda

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{60} & 15 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1/4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-(F_2+F_3)} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 7/4 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1/4 \end{array}\right)$$

Parametrizamos la incógnita sin pivote ($z = \lambda$) y despejamos las otras: $x = 7/4 - \lambda$, $y = 0$, $t = 1/4$. En definitiva, las soluciones son

$$(x, y, z, t) = (7/4, 0, 0, 1/4) + \lambda(-1, 0, 1, 0) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

o

43. Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función de los parámetros a, b y c, y resuélvelo **sólo** para los valores que lo hacen compatible indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 5z & = & a \\ x & + & cy & + & 2z & = & b \\ 2x & + & y & + & 7z & = & 3 \end{array}\right\}$$

Solución: Transformemos la matriz del sistema mediante operaciones elementales:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & a \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & c & 2 & b \end{array}\right) \xrightarrow[-(F_3-F_1)]{-(F_2-2F_1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & a \\ 0 & 1 & 3 & 2a-3 \\ 0 & 1-c & 3 & a-b \end{array}\right) \xrightarrow{F_3-(1-c)F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & a \\ 0 & 1 & 3 & 2a-3 \\ 0 & 0 & 3c & 3-a-b-3c+2ac \end{array}\right)$$

Si $c \neq 0$ el sistema es compatible determinado. Si $c = 0$ la matriz de coeficientes tiene rango 2, y la matriz ampliada tiene rango 3 (sistema incompatible) si $3-a-b \neq 0$ y rango 2 (sistema compatible indeterminado con un grado de libertad) si $3-a-b=0$. En este caso la matriz queda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & a \\ 0 & 1 & 3 & 2a-3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3-a \\ 0 & 1 & 3 & 2a-3 \end{array}\right)$$

y la solución puede darse en función de un parámetro λ así: $x = 3-a-2\lambda \quad y = 2a-3-3\lambda \quad z = \lambda$.

o

44. Se dispone de suficientes monedas de 2, 5 y 10 céntimos. Encuentra todas las formas que hay de obtener 94 céntimos juntando 18 de esas monedas, asegurándote de que no hay más formas que las que propones.

Solución: Si x, y, z designan el número de monedas de 2, 5 y 10 céntimos, las condiciones del problema son $x+y+z=18$ y $2x+5y+10z=94$. Esto nos lleva al sistema con la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 2 & 5 & 10 & 94 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 3 & 8 & 58 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & -4 \\ 0 & 3 & 8 & 58 \end{array}\right)$$

cuya solución depende de un parámetro: $z = \alpha \qquad y = (58-8\alpha)/3 \qquad x = (5\alpha-4)/3$.

Los valores x, y, z deben ser enteros no negativos. Para que no sean negativos tiene que ocurrir que:

$$\alpha \geq 0 \qquad 58-8\alpha \geq 0 \;\text{ o }\; \alpha \leq 58/8 = 7{,}25 \qquad 5\alpha - 4 \geq 0 \;\text{ o }\; \alpha \geq 4/5 = 0{,}8$$

y como además han de ser enteros quedan 7 opciones para $z = \alpha$, que ponemos en una tabla junto con los correspondientes valores de x:

$z=\alpha$	1	2	3	4	5	6	7
$x=(5\alpha-4)/3$	$1/3$	$6/3=2$	$11/3$	$16/3$	$21/3=7$	$26/3$	$31/3$

Las únicas con valores enteros se dan para $\alpha = 2$ y para $\alpha = 5$; para estas $y = 18-x-z$ también es entero, y se tienen por tanto estas dos soluciones:

- $2 \times$ 10 $\quad 14 \times$ 5 $\quad 2 \times$ 2 Monedas: 2+14+2=18 Dinero: 20+70+4=94
- $5 \times$ 10 $\quad 6 \times$ 5 $\quad 7 \times$ 2 Monedas: 5+6+7=18 Dinero: 50+30+14=94

o

45. Se dispone de suficientes monedas de 2, 5 y 10 céntimos. Encuentra todas las formas que hay de obtener 96 céntimos juntando 18 de esas monedas, asegurándote de que las formas que propones son correctas y de que no hay más posibilidades.

Solución: Si x, y, z designan el número de monedas de 2, 5 y 10 céntimos, las condiciones del problema son $x+y+z=18$ y $2x+5y+10z=96$. Esto nos lleva al sistema con la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 2 & 5 & 10 & 96 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 3 & 8 & 60 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & -6 \\ 0 & 3 & 8 & 60 \end{array}\right)$$

cuya solución depende de un parámetro: $z=\alpha \qquad y=(60-8\alpha)/3 \qquad x=(5\alpha-6)/3.$

Los valores x, y, z deben ser enteros no negativos. Para que no sean negativos tiene que ocurrir que:

$$\alpha \geq 0 \qquad 60-8\alpha \geq 0 \quad \text{o} \quad \alpha \leq 60/8 = 7,5 \qquad 5\alpha - 6 \geq 0 \quad \text{o} \quad \alpha \geq 6/5 = 1,2$$

y como además han de ser enteros quedan 6 opciones para $z=\alpha$, que ponemos en una tabla junto con los correspondientes valores de x:

$z=\alpha$	2	3	4	5	6	7
$x=(5\alpha-6)/3$	$4/3$	$9/3=3$	$14/3$	$19/3$	$24/3=8$	$29/3$

Las únicas con valores enteros se dan para $\alpha=3$ y para $\alpha=6$; para estas $y=18-x-z$ también es entero, y se tienen por tanto las soluciones $(x,y,z)=(3,12,3)$ y $(x,y,z)=(8,4,6)$, o sea:

- 3 monedas de 2, 12 de 5 y 3 de 10. Monedas: 3+12+3=18. Dinero: 6+60+30=96.
- 8 monedas de 2, 4 de 5 y 6 de 10. Monedas: 8+4+6=18. Dinero: 16+20+60=96.

o

46. Encuentra todas las formas posibles de juntar 3,14€ con 38 monedas de 2, 5 y 10 céntimos. (Además de dar todas las posibilidades válidas, hay que justificar que no hay más).

Solución: Si x, y, z designan el número de monedas de 2, 5 y 10 céntimos, las condiciones del problema son $x+y+z=38$ y $2x+5y+10z=314$. Esto nos lleva al sistema con la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 38 \\ 2 & 5 & 10 & 314 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 38 \\ 0 & 3 & 8 & 238 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & -124 \\ 0 & 3 & 8 & 238 \end{array}\right)$$

cuya solución depende de un parámetro: $z=\alpha \qquad y=\dfrac{238-8\alpha}{3} \qquad x=\dfrac{5\alpha-124}{3}.$

Los valores x, y, z deben ser enteros no negativos. Para que no sean negativos tiene que ocurrir que:

$$\alpha \geq 0 \qquad 238-8\alpha \geq 0 \quad \text{o} \quad \alpha \leq \frac{238}{8} = 29,75 \qquad 5\alpha - 124 \geq 0 \quad \text{o} \quad \alpha \geq \frac{124}{5} = 24,8$$

y como además han de ser enteros quedan 5 opciones para $z=\alpha$, que ponemos en una tabla junto con los correspondientes valores de x:

$z=\alpha$	25	26	27	28	29
$x=(5\alpha-124)/3$	$1/3$	$6/3=2$	$11/3$	$16/3$	$21/3=7$

Las únicas con valores enteros se dan para $\alpha=26$ y para $\alpha=29$; para estas $y=38-x-z$ también es entero, y se tienen por tanto estas dos soluciones:

- $26 \times$ 10 $\quad 10 \times$ 5 $\quad 2 \times$ 2 Monedas: 26+10+2=38 Dinero: 260+50+4=314
- $29 \times$ 10 $\quad 2 \times$ 5 $\quad 7 \times$ 2 Monedas: 29+2+7=38 Dinero: 290+10+14=314

o

47. Se dispone de suficientes monedas de 2, 5 y 10 céntimos. Encuentra todas las formas posibles de las que se pueden juntar 20 de esas monedas para obtener 108 céntimos.

Solución: Si llamamos x, y, z a las posibles cantidades de monedas de 2, 5 y 10 céntimos, respectivamente, las condiciones nos llevan a un sistema de dos ecuaciones en las incógnitas x, y, z con la siguiente matriz, a la que aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 2 & 5 & 10 & 108 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 3 & 8 & 68 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & -8 \\ 0 & 3 & 8 & 68 \end{array}\right)$$

Las soluciones del sistema las podemos dejar en función de un parámetro $z = \alpha$:

$$x = \frac{5\alpha - 8}{3} \qquad y = \frac{68 - 8\alpha}{3} \qquad z = \alpha$$

Pero sólo nos interesan las soluciones con sus tres entadas enteras y positivas (o nulas). Para tener $x \geq 0$ debe ser $\alpha \geq 2$, y para tener $y \geq 0$ debe ser $\alpha \leq 8$. Como además $z = \alpha$ debe ser entero sólo consideramos $\alpha = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, que sólo dan valores enteros para x e y cuando $\alpha = 4$ y $\alpha = 7$.

Por tanto hay 2 soluciones del sistema con esas condiciones, que son $(4, 12, 4)$ y $(9, 4, 7)$. O sea, hay exactamente dos formas de obtener 108 céntimos con 20 monedas: tomando 4 de 2, 12 de 5 y 4 de 10 (8+60+40=108 céntimos), y tomando 9 de 2, 4 de 5 y 7 de 10 (18+20+70=108 céntimos).

o

48. Se dispone de suficientes monedas de 2, 5 y 10 céntimos. Encuentra todas las formas posibles de las que se pueden juntar 20 de esas monedas para obtener 110 céntimos.

Solución: Si llamamos x, y, z a las posibles cantidades de monedas de 2, 5 y 10 céntimos, respectivamente, las condiciones nos llevan a un sistema de dos ecuaciones en las incógnitas x, y, z con la siguiente matriz, a la que aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 2 & 5 & 10 & 110 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 0 & 3 & 8 & 70 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & -10 \\ 0 & 3 & 8 & 70 \end{array}\right)$$

Las soluciones del sistema las podemos dejar en función de un parámetro $z = \alpha$:

$$x = \frac{5\alpha - 10}{3} \qquad y = \frac{70 - 8\alpha}{3} \qquad z = \alpha$$

Pero sólo nos interesan las soluciones con sus tres entadas enteras y no negativas. Para tener $x \geq 0$ debe ser $\alpha \geq 2$, y para tener $y \geq 0$ debe ser $\alpha \leq 8$. Como además $z = \alpha$ debe ser entero sólo consideramos $\alpha = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, que dan valores enteros para x e y cuando $\alpha = 2$, $\alpha = 5$ y $\alpha = 8$.

Por tanto hay 3 soluciones del sistema con esas condiciones, que son $(0, 18, 2)$, $(5, 10, 5)$ y $(10, 2, 8)$. O sea, hay exactamente tres formas de obtener 110 céntimos con 20 monedas: tomando 0 de 2, 18 de 5 y 2 de 10 (0+90+10=110 céntimos), tomando 5 de 2, 10 de 5 y 5 de 10 (10+50+50=110 céntimos), y tomando 10 de 2, 2 de 5 y 8 de 10 (20+10+80=110 céntimos).

o

49. Se dispone de suficientes monedas de 2, 5 y 10 céntimos. Encuentra todas las formas que hay de obtener 119 céntimos juntando 19 de esas monedas, asegurándote de que no hay más formas que las que propones.

Solución: Si x, y, z designan el número de monedas de 2, 5 y 10 céntimos, las condiciones del problema son $x+y+z=19$ y $2x+5y+10z=119$. Esto nos lleva al sistema con la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 19 \\ 2 & 5 & 10 & 119 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 19 \\ 0 & \mathbf{3} & 8 & 81 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{3} & 0 & -5 & -24 \\ 0 & \mathbf{3} & 8 & 81 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible con un grado de libertad, y sus soluciones se pueden obtener asignando un parámetro ($z=\alpha$) y despejando entonces $x=\frac{5\alpha-24}{3}=-8+\frac{5}{3}\,\alpha$ e $y=\frac{81-8\alpha}{3}=27-\frac{8}{3}\,\alpha$.

Pero sólo nos sirven las soluciones en las que x, y, z son enteros no negativos.

Para que sean enteros, α debe ser múltiplo de 3.

Para $x \geq 0$ tiene que ser $5\alpha-24 \geq 0$, o sea $\alpha \geq 24/5$, y como α debe ser entero se tiene $\alpha \geq 5$.

Análogamente, $y \geq 0$ implica $81-8\alpha \geq 0$, o sea $\alpha \leq 81/8$, y por tanto $\alpha \leq 10$.

Por tanto α debe ser un múltiplo de 3 entre 5 y 10, por lo que sólo quedan dos opciones, con $\alpha=6$ y $\alpha=9$, que dan lugar a las dos únicas soluciones del problema:

- **2** monedas de 2c, **11** de 5c y **6** de 10c. Monedas=2+11+6=19 Dinero=4+55+60=119
- **7** monedas de 2c, **3** de 5c y **9** de 10c. Monedas=7+3+9=19 Dinero=14+15+90=119

o

50. Se dispone de suficientes monedas de 2, 5 y 10 céntimos. Encuentra todas las formas que hay de obtener 121 céntimos juntando 21 de esas monedas, asegurándote de que no hay más formas que las que propones.

Solución: Si x, y, z designan el número de monedas de 2, 5 y 10 céntimos, las condiciones del problema son $x+y+z=21$ y $2x+5y+10z=121$. Esto nos lleva al sistema con la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 219 \\ 2 & 5 & 10 & 121 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 21 \\ 0 & \mathbf{3} & 8 & 79 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{3} & 0 & -5 & -16 \\ 0 & \mathbf{3} & 8 & 79 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible con un grado de libertad, y sus soluciones se pueden obtener asignando un parámetro a la tercera incógnita ($z=\alpha$) y despejando entonces $x=(5\alpha-16)/3$ e $y=(79-8\alpha)/3$.

Pero sólo nos sirven las soluciones en las que x, y, z son enteros no negativos. Para $x \geq 0$ tiene que ser $5\alpha-16 \geq 0$, o sea $\alpha \geq 16/5$, y como $\alpha=z$ debe ser entero se tiene $\alpha \geq 4$. Análogamente, $y \geq 0$ implica $\alpha \leq 9$.

Quedan pues 6 opciones para $z=\alpha$ (enteros entre 4 y 9). Las ponemos en una tabla con los correspondientes valores de x para seleccionar las opciones con valores enteros:

$z=\alpha$	4	**5**	6	7	**8**	9
$x=(5\alpha-24)/3$	4/3	9/3 = **3**	14/3	19/3	24/3 = **8**	29/3

Los valores (enteros) de y se obtienen entonces como $y=21-x-z$, lo que nos da finalmente las dos únicas soluciones:

- **3** monedas de 2c, **13** de 5c y **5** de 10c. Monedas: 3+13+5=21 Dinero: 6+65+50=121
- **8** monedas de 2c, **5** de 5c y **8** de 10c. Monedas: 8+5+8=21 Dinero: 16+25+80=121

o

51. Un restaurante tiene mesas pequeñas (4 plazas), medianas (6 plazas) y grandes (10 plazas), que le dan una capacidad total de 176 personas. Hoy tiene 76 clientes que ocupan un tercio de las mesas pequeñas, dos quintos de las medianas y la mitad de las grandes. Si en estas mesas ocupadas no quedan sitios vacíos, ¿cuántas mesas hay de cada tipo? ¿Hay una respuesta única?

Solución: Llamemos x, y, z al número de mesas pequeñas, medianas y grandes, respectivamente[2]. Entonces los datos nos dicen que

$$4x + 6y + 10z = 176 \qquad \frac{1}{3}4x + \frac{2}{5}6y + \frac{1}{2}10z = 76$$

y se trata de encontrar las soluciones de este sistema que sean enteros positivos. Manipulemos la matriz del sistema (en el primer paso ya dividimos la 1 ecuación por 2 y multiplicamos la 2 por 15):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 88 \\ 20 & 36 & 75 & 1{,}140 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-10F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 88 \\ 0 & 6 & 25 & 260 \end{array}\right) \xrightarrow{2F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & -15 & -84 \\ 0 & 6 & 25 & 260 \end{array}\right)$$

Asignando un parámetro α a la incógnita z tenemos

$$x = \frac{15\alpha - 84}{4} \qquad y = \frac{260 - 25\alpha}{6} \qquad z = \alpha$$

Sólo nos sirven valores enteros de α. Para que además x e y sean positivos debe ser $6 \leq \alpha \leq 10$, y para que además sean enteros sólo sirve $\alpha = 8$. Esta es por tanto la única posibilidad, y en definitiva se tiene $x = 9$, $y = 10$, $z = 8$.

o

52. En un restaurante hay menús de los tipos A, B y C con precios 7, 12 y 18 euros. Entran 16 personas, cada una pide un menú y la cuenta asciende a 155 euros. ¿Cuántos menús de cada tipo pidieron? ¿Hay una respuesta única?

Solución: Si x, y, z designan el número de menús de 7, 12 y 18 euros, las condiciones del problema son $x + y + z = 16$ y $7x + 12y + 18z = 155$. Esto nos lleva al sistema con la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 7 & 12 & 18 & 155 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-7F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 16 \\ 0 & 5 & 11 & 43 \end{array}\right) \xrightarrow{5F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & -6 & 37 \\ 0 & 5 & 11 & 43 \end{array}\right)$$

cuya solución depende de un parámetro: $z = \alpha \qquad y = \dfrac{43 - 11\alpha}{5} \qquad x = \dfrac{37 + 6\alpha}{5}$.

Como y no puede ser negativo, se tiene $11\alpha \leq 43$, y como $z = \alpha$ debe ser entero y positivo sólo sirven los valores $\alpha = 0, 1, 2, 3$. De ellos, el valor de y sólo es entero para $\alpha = 3$, y esta es por tanto la única posibilidad. Sustituyéndola tenemos $x = 11$, $y = 2$, $z = 3$, que es la única solución del problema.

o

[2] Hay simplificaciones razonables en vista del enunciado, como llamarles $3x$, $5y$ y $2z$, o como tomar más adelante $z = 2\alpha$.

53. En un restaurante hay tres tipos de menús con precios 8, 11 y 15 euros. Entran 17 personas, cada una pide un menú y la cuenta asciende a 179 euros. ¿Cuántos menús de cada tipo pidieron? (debes dar todas las posibilidades y justificar que no hay más).

Solución: Si x, y, z designan el número de menús de 8, 11 y 15 euros, las condiciones del problema son $x+y+z=17$ y $8x+11y+15z=179$. Esto nos lleva al sistema con la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 17 \\ 8 & 11 & 15 & 179 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-8F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 17 \\ 0 & 3 & 7 & 43 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 3 & 7 & 43 \end{array}\right)$$

cuya solución depende de un parámetro: $\quad z=\alpha, \quad y=\dfrac{43-7\alpha}{3}, \quad x=\dfrac{8+4\alpha}{3}.$

Por las condiciones del problema, los tres valores deben ser números naturales (enteros no negativos). Para que sea $z \geq 0$ debe ser $\alpha \geq 0$ y esto garantiza que $x \geq 0$. Para que sea $y \geq 0$ debe ser $7\alpha \leq 43$, por lo que solo sirven los valores $\alpha = 0,1,2,3,4,5,6$. De ellos, y solo es entero para $\alpha = 1$ y para $\alpha = 4$, y el de x se deduce entonces de $x+y+z=17$. Por tanto hay exactamente dos posibilidades: $(x,y,z)=(4,12,1)$ y $(x,y,z)=(8,5,4)$.

o

54. En un restaurante hay tres tipos de menús con precios 8, 11 y 15 euros. Entran 18 personas, cada una pide un menú y la cuenta asciende a 197 euros. ¿Cuántos menús de cada tipo pidieron? (debes dar todas las posibilidades y justificar que no hay más).

Solución: Si x, y, z designan el número de menús de 8, 11 y 15 euros, las condiciones del problema son $x+y+z=18$ y $8x+11y+15z=197$. Esto nos lleva al sistema con la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 8 & 11 & 15 & 197 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-8F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 3 & 7 & 53 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 53 \end{array}\right)$$

cuya solución depende de un parámetro: $\quad z=\alpha, \quad y=\dfrac{53-7\alpha}{3}, \quad x=\dfrac{1+4\alpha}{3}.$

Por las condiciones del problema, los tres valores deben ser números naturales (enteros no negativos). Para que sea $z \geq 0$ debe ser $\alpha \geq 0$ y esto garantiza que $x \geq 0$. Para que sea $y \geq 0$ debe ser $7\alpha \leq 53$, por lo que solo sirven los valores $\alpha = 0,1,2,3,4,5,6,7$. De ellos, y solo es entero para $\alpha = 2$ y para $\alpha = 5$, y el de x se deduce entonces de $x+y+z=17$. Por tanto hay exactamente dos posibilidades: $(x,y,z)=(3,13,2)$ y $(x,y,z)=(7,6,5)$.

o

55. En una tienda venden camisetas a 16€ y pantalones a 20€, y además tienen una oferta: camiseta más pantalón por 25€. Si hoy han vendido 34 prendas y han recaudado 504€, ¿cuántas veces han aplicado la oferta?

Solución: Llamemos por ejemplo x al número de camisetas que han vendido "sueltas", y al número de pantalones que han vendido "sueltos", y z al número de veces que han aplicado la oferta[3]. Entonces el número total de prendas vendidas es $34 = x + y + 2z$, y el dinero recaudado es $504 = 16x + 20y + 25z$. Se trata pues de encontrar las soluciones de ese sistema que sean enteros positivos. Manipulemos la matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 34 \\ 16 & 20 & 25 & 504 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-16F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 34 \\ 0 & 4 & -7 & -40 \end{array}\right) \xrightarrow{4F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 15 & 176 \\ 0 & 4 & -7 & -40 \end{array}\right)$$

Asignando un parámetro α a la incógnita z tenemos

$$x = \frac{176 - 15\alpha}{4} \qquad y = \frac{7\alpha - 40}{4} \qquad z = \alpha$$

Sólo nos sirven valores enteros de α. Para que además x sea positivo se requiere $176 \geq 15\alpha$, y por tanto $\alpha \leq 11$. Para que además y sea positivo debe ser $7\alpha \geq 40$, y por tanto $\alpha \geq 6$. De los valores $\alpha = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ el único que da valores enteros para x e y es $\alpha = 8$. Como $\alpha = z =$ número de veces que se ha aplicado la oferta, la respuesta es 8.

o

56. Un grupo de 55 personas entra a un local en el que entrada cuesta 3 euros a los niños, 6 a los jubilados y 10 a los adultos. Si el coste total de las entradas es de 200 euros, ¿cuántos niños, ancianos y adultos componen el grupo? Debes dar todas las respuestas posibles con un método que muestre que no hay más que las que propones.

Solución: Si llamamos x, y, z al número de niños, jubilados y adultos, respectivamente, las condiciones son $x + y + z = 55$ y $3x + 6y + 10z = 200$; resolvemos el sistema lineal:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 55 \\ 3 & 6 & 10 & 200 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 55 \\ 0 & \mathbf{3} & 7 & 35 \end{array}\right) \xrightarrow{3F_1-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{3} & 0 & -4 & 130 \\ 0 & \mathbf{3} & 7 & 35 \end{array}\right)$$

Asignando un parámetro a la incógnita sin pivote ($z = \lambda$) se obtiene $y = \dfrac{35 - 7\lambda}{3}$, $x = \dfrac{130 + 4\lambda}{3}$.
Esas son todas las soluciones del sistema, pero para el problema solo sirven las que tengan valores enteros y no negativos. En particular debe ser $\lambda (= z) \geq 0$ y esto ya implica $x \geq 0$. Para tener $y \geq 0$ debe ser $\lambda \leq 5$. Por tanto los únicos valores posibles para λ son los enteros entre 0 y 5, pero de ellos solo el 2 y el 5 dan valores enteros. Así pues, hay exactamente dos posibilidades:

Para $\lambda = 2$ se obtiene $(x, y, z) = (46, 7, 2)$, o sea 2 adultos, 7 jubilados y 46 niños.

Para $\lambda = 5$ se obtiene $(x, y, z) = (50, 0, 5)$, o sea 5 adultos y 50 niños.

o

57. Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

[3] Hay otras formas de tomar las variables, por ejemplo $x =$ número total de pantalones, $y =$ número total de camisetas y $z =$ número de veces que han aplicado la oferta. Entonces las ecuaciones son $34 = x + y$ y $504 = 16(x - z) + 20(y - z) + 25z = 16x + 20y - 11z$ y se procede de forma similar, pero hay que añadir las restricciones $z \leq x$ y $z \leq y$.

Solución: Usando el método de Gauss-Jordan se tiene:

$$(A\,|\,I_4) \;=\; \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow{int.filas} \left(\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{1}&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&\mathbf{1}&0&0&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&1&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4-F_1]{F_3-F_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&\mathbf{1}&0&1&0&-1&0\\ 0&0&-1&1&0&-1&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_4+F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&\mathbf{1}&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&1&1&-1&-1&1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1-F_3}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&0&0&0&-1&1&1&0\\ 0&1&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&1&0&-1&0\\ 0&0&0&1&1&-1&-1&1 \end{array}\right) \quad\rightsquigarrow\quad A^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} -1&1&1&0\\ 0&0&1&0\\ 1&0&-1&0\\ 1&-1&-1&1 \end{pmatrix}$$

o

58. Encuentra los valores de b para los que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 2&b&0&-3\\ 3&0&b&0\\ 4&0&0&b+3 \end{pmatrix}$ es invertible.

Solución: Basta con encontrar los valores para los que el determinante no es nulo. Una forma de calcular el determinante (entre otras posibilidades, como desarrollar por una fila o columna con dos ceros, o como empezar con $bF_1 - (F_2 + F_3 + F_4)$ haciendo aparte el caso $b = 0$) consiste en hacer operaciones elementales y desarrollar por filas o columnas así:

$$A = \begin{vmatrix} 1&1&1&1\\ 2&b&0&-3\\ 3&0&b&0\\ 4&0&0&b+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&0&0&0\\ 2&b-2&-2&-5\\ 3&-3&b-3&-3\\ 4&-4&-4&b-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-2&-2&-5\\ -3&b-3&-3\\ -4&-4&b-1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} b-9&-2&-5\\ b-9&b-3&-3\\ b-9&-4&b-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-9&-2&-5\\ 0&b-1&2\\ 0&-2&b+4 \end{vmatrix} = (b-9)(b^2+3b-4+4) = (b-9)(b+3)b$$

Por tanto la matriz es invertible para todos los valores de b excepto para $b = 9$, $b = -3$ y $b = 0$.

o

59. Encuentra los valores del parámetro b para los que la siguiente matriz NO es invertible.

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1&1-b&3&2\\ 2&6&b&2\\ -2&b+4&0&-1\\ 1&b+7&3&2 \end{pmatrix}$$

Solución: Se trata de encontrar los valores que anulan al determinante. Para calcularlo se pueden usar operaciones elementales por ejemplo para poner ceros debajo del primer 1. Pero es mejor si se observa que las filas 1 y 4 se parecen mucho; comenzamos restándolas:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1-b & 3 & 2 \\ 2 & 6 & b & 2 \\ -2 & b+4 & 0 & -1 \\ 1 & b+7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1-b & 3 & 2 \\ 2 & 6 & b & 2 \\ -2 & b+4 & 0 & -1 \\ 0 & 2b+6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (2b+6)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & b & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

El determinante 3×3 se puede hacer por Sarrus sin problemas, o por ejemplo poniendo un cero más en la última fila (haciendo $C_1 - 2C_3$):

$$|A| = 2(b+3)\begin{vmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -2 & b & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(b+3)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & b \end{vmatrix} = 2(b+3)(3b-6) = 6(b+3)(b-2)$$

Por tanto la matriz NO es invertible para $b = -3$ y para $b = 2$.

o

60. Encuentra los valores del parámetro b para los que la siguiente matriz es invertible.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & b-2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3-b & 6 & b+2 & b+5 \end{pmatrix}$$

Solución: Se trata de encontrar los valores que NO anulan al determinante. Para calcularlo se puede empezar restando las columnas 1 y 4 , que se parecen mucho. Pero también es sencillo si se hace un proceso estándar de poner ceros debajo del primer 1:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & b-2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3-b & 6 & b+2 & b+5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & b-8 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2b & 8-b & 2b+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-8 & 6 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2b & 8-b & 2b+2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(b+1)\begin{vmatrix} b-8 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 6(b+1)\begin{vmatrix} b-8 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6(b+1)(b-4)$$

Por tanto la matriz es invertible para cualquier valor de b distinto de -1 y de 4.

o

61. Calcula el determinante de la siguiente matriz, simplifícalo cuanto puedas y determina los valores de los parámetros a y b para los que se anula:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Solución: Lo mejor es observar que la matriz tiene "una mitad con a's y una mitad con b's" y tratarlas por separado. Empezamos por ejemplo con $F_1 - F_2$ y $F_4 - F_3$ y luego $C_2 - C_1$ y $C_3 - C_4$:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & a-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-b & 1 \\ 0 & 0 & b-1 & b-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera fila sale $(a-1)$ por un determinante con ceros bajo la diagonal que vale $(1-a)(1-b)(b-1)$. Por tanto $|A| = (a-1)(1-a)(1-b)(b-1) = (a-1)^2(b-1)^2$, y en consecuencia el determinante se anula cuando $a = 1$ (para cualquier b) y cuando $b = 1$ (para cualquier a).

o