Capítulo 4

Números Complejos

4.1 Nociones Básicas

En este capítulo mostraremos los números complejos, e introduciremos los principales representaciones de ellos su forma cartesiana y su forma polar. Cada una de ellas nos permite resolver problemas algebraicos de mejor manera.

Definición 4.1.1 Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, se define la suma y multiplicación como sigue

$$\begin{aligned} (a, b) + (c, d) &= (a + c, b + d) \\ (a, b) \cdot (c, d) &= (ac - bd, ad + cb) \end{aligned}$$

$\Diamond$

por ejemplo tenemos

$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$

Notación: Emplearemos la notación

$$(a, b) = a + bi$$

llamada forma **binomial de número complejo**, además tenemos los acuerdos habituales, es decir, si anteponemos un cero se omite la expresión y si no hay número delante de la i se subentiende que es un uno, como por ejemplo

i $(1, 1) = 1 + 1i = 1 + i$

ii $(0, 1) = 0 + 1i = i$

iii $(-1, 0) = -1 + 0i = -1$

Reescribiendo el ejemplo anterior tenemos

$$\begin{aligned} (0, 1) \cdot (0, 1) &= (-1, 0) \\ i \cdot i &= -1 \\ i^2 &= -1 \end{aligned}$$

Proposición 4.1.2 *El conjunto* $\mathbb{R}^2$ *con la suma y multiplicación definida anteriormente es un cuerpo, llamado el cuerpo de los números complejos y se denota por* $\mathbb{C}$.
De otro modo, sean $z, u, w \in \mathbb{C}$, *entonces se cumple*

I *Suma.*

a $(z + u) + w = z + (u + w)$.

b $z + 0 = 0 + z = z$.

c $z + (-z) = 0$, *donde* $-z = (-a) + (-b)i$, *con* $z = a + bi$.

d $z + w = w + z$.

Notación: *denotamos por*

$$-(a + bi) = (-a) + (-b)i = -a - bi$$

II *Multiplicación.*

a $(zu)w = z(uw)$.

b $1z = z1 = z$.

c *Si* $z = a + bi \neq 0$, *entonces* $zw = 1$, *donde*

$$w = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i.$$

d $zw = wz$

Notación: *denotamos por*

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - bi).$$

III *Distributividad.*

$$z(u + w) = zu + zw,$$

Observación: Con las notaciones anteriores tenemos en particular que

$$\frac{a + bi}{c + di} = (a + bi)(c + di)^{-1} = \frac{1}{c^2 + d^2}(a + bi)(c - di).$$

Definición 4.1.3 La potencia multiplicativa esta definida por recurrencia, sea $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$ entonces

$$\begin{array}{rcl} z^0 & = & 1, \text{ con } z \neq 0 \\ z^1 & = & z \\ z^{n+1} & = & z^n \cdot z \end{array}$$

además si $z \neq 0$ entonces $z^{-n} = (z^{-1})^n$. $\Diamond$

Ejemplo 4.1.4 Simplificar $(1+2i)(1-3i)$

$$\begin{aligned}(1+2i)(1-3i) &= 1(1-3i)+2i(1-3i)\\ &= 1-3i+2i-6i^2\\ &= 1-3i+2i+6\\ &= 7-i.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.1.5 Simplificar $(3-5i)^2$

$$\begin{aligned}(3-5i)^2 &= 9-30i+25i^2\\ &= 9-30i-25\\ &= -16-30i\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.1.6 Simplificar $(a+bi)^2$

$$\begin{aligned}(a+bi)^2 &= (a+bi)(a+bi)\\ &= a^2+abi+bai+bibi\\ &= a^2+2abi+b^2i^2\\ &= a^2-b^2+2abi\end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.1.7 Calcular $(1-2i)^{-1}$

$$\begin{aligned}(1-2i)^{-1} &= \tfrac{1}{(1)^2+(-2)^2}-\tfrac{-2}{(1)^2+(-2)^2}i\\ &= \tfrac{1}{1+4}+\tfrac{2}{1+4}i\\ &= \tfrac{1}{5}+\tfrac{2}{5}i\end{aligned}$$

□

Ejercicios

Comprobar que $(3-5i)^3=-198-10i$

4.2 Ecuaciones lineales y Cuadráticas

El problema que se abordar en esta sección es resolver las ecuaciones del siguiente tipo

$$Az^2+Bz+C=0$$

en $\mathbb{C}$, donde $A,B,C\in\mathbb{C}$.

4.2.1 Ecuación de Primer Grado

La ecuación de primer grado con $B \in \mathbb{C}^{*}, C \in \mathbb{C}$ tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned} Bz &= C \\ z &= B^{-1}C \end{aligned}$$

Y en el conjunto de los números complejos, siempre tiene solución única.

Veamos los siguientes ejemplos

Ejemplo 4.2.1 Resolver:

$$2(z+3i)+i(1-3z)=5i.$$

□

Solución 1.

$$\begin{aligned} 2(z+3i)+i(1-3z) &= 5i \\ 2z+6i+1i-3zi &= 5i \\ 2z-3zi+6i+i &= 5i \\ (2-3i)\,z &= -2i \\ z &= (2-3i)^{-1}(-2i) \\ z &= (-2i)\left(\tfrac{2}{13}+\tfrac{3}{13}i\right) \\ z &= \tfrac{6}{13}-\tfrac{4}{13}i \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.2 Resolver:

$$(1+i)\,(2z+3i)+(2-i)\,(4+z)=5+2i.$$

□

Solución 2.

$$\begin{aligned} (1+i)\,(2z+3i)+(2-i)\,(4+z) &= 5+2i \\ 2z+3i+2iz-3+8+2z-4i-iz &= 5+2i \\ 4z-i+iz+5 &= 5+2i \\ (4+i)\,z &= 3i \\ z &= 3i\left(\tfrac{4}{17}-\tfrac{1}{17}i\right) \\ z &= \tfrac{3}{17}+\tfrac{12}{17}i \end{aligned}$$

Observación: Tenga presente que, resolver una ecuación de primer grado, le permite también resolver sistema de ecuaciones lineales como por ejemplo

Ejemplo 4.2.3 Resolver el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2z-iw &=& 3 \\ iz-2w &=& i \end{array}\right|$$

□

Solución 3. Usaremos el método de sustitución. En la primera ecuación tenemos que

$$z=\frac{1}{2}\,(3+iw)$$

reemplazando en la segunda ecuación tenemos

$$\begin{aligned} i\tfrac{1}{2}(3+iw)-2w &= i \\ \tfrac{3}{2}i-\tfrac{1}{2}w-2w &= i \\ \tfrac{3}{2}i-\tfrac{5}{2}w &= i \\ w &= \tfrac{1}{5}i \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación que hemos despejado tenemos

$$\begin{aligned} z &= \tfrac{1}{2}\left(3+i\tfrac{1}{5}i\right) \\ z &= \tfrac{7}{5} \end{aligned}$$

luego la solución es

$$w=\frac{1}{5}i \quad , \quad z=\frac{7}{5}$$

Ejemplo 4.2.4 Resolver el siguiente sistema

$$\begin{array}{lcl} (2+i)\,z+(1-i)\,w &=& 9+i \\ (1+2i)\,z+(-2-i)\,w &=& 4+2i \end{array}$$

$\square$

Solución 4. Usaremos el método de sustitución. En la primera ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} (2+i)\,z+(1-i)\,w &= (9+i) \\ (2+i)\,z &= (9+i)-(1-i)\,w \\ z &= \left(\tfrac{2}{5}-\tfrac{1}{5}i\right)[(9+i)-(1-i)\,w] \\ z &= \left(\tfrac{19}{5}-\tfrac{7}{5}i\right)+\left(-\tfrac{1}{5}+\tfrac{3}{5}i\right)w \end{aligned}$$

Reemplazando en la segunda ecuación

$$\begin{aligned} (1+2i)\,z+(-2-i)\,w &= 4+2i \\ (1+2i)\left[\left(\tfrac{19}{5}-\tfrac{7}{5}i\right)+\left(-\tfrac{1}{5}+\tfrac{3}{5}i\right)w\right]+(-2-i)\,w &= 4+2i \\ \left[\tfrac{33}{5}+\tfrac{31}{5}i-\tfrac{7}{5}w+\tfrac{1}{5}iw\right]+(-2-i)\,w &= 4+2i \\ [33+31i-7w+iw]+5\,(-2-i)\,w &= 5\,(4+2i) \\ (-17-4i)\,w &= (20+10i)-(33+31i) \\ w &= (-17-4i)^{-1}(-13-21i) \\ w &= 1+i \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación que hemos despejado tenemos

$$\begin{aligned} z &= \left(\tfrac{19}{5}-\tfrac{7}{5}i\right)+\left(-\tfrac{1}{5}+\tfrac{3}{5}i\right)w \\ z &= \tfrac{1}{5}(19-7i)+\tfrac{1}{5}(-1+3i)(1+i) \\ z &= \tfrac{1}{5}[(19-7i)+(-1+3i)(1+i)] \\ z &= \tfrac{1}{5}(15-5i)=3-i \end{aligned}$$

luego la solución es

$$w=1+i, \qquad z=3-i$$

4.2.2 Ecuación de Segundo Grado

El problema general, es resolver la siguiente ecuación

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

en $\mathbb{C}$, donde $A, B, C \in \mathbb{C}$ con $A \neq 0$.

1er Etapa Veremos el caso $B = 0$

Consideremos el siguiente ejemplo

$$z^2 = 1 + 2i,$$

Sea $z = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$ entonces reemplazando tenemos

$$\begin{aligned} (a+bi)^2 &= 1+2i \\ a^2 + 2abi + b^2i^2 &= 1+2i \\ a^2 - b^2 + 2abi &= 1+2i. \end{aligned}$$

Entonces $a^2 - b^2 = 1 \wedge 2ab = 2$.

Como $ab \neq 0$, luego $a \neq 0 \wedge b \neq 0$, por tanto de la segunda igualdad obtenemos

$$a = \frac{1}{b},$$

reemplazando en la primera igualdad se obtiene que $1 - b^4 = b^2$, que al reescribir se tiene $b^4 + b^2 - 1 = 0$, y es una ecuación de segundo grado en la variable b^2, cuya solución positiva es

$$b^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},$$

de donde deducimos que

$$b = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}},$$

por lo cual se obtiene que

$$a = \pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}}.$$

Finalmente la soluciones son

$$\begin{aligned} z &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{2}{\sqrt{5}-1}} + \sqrt{\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}}i\right] \\ z &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{\sqrt{5}+1}{2}} + \sqrt{\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}}i\right] \end{aligned}$$

Caso General

La solución de la ecuación $z^2 = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, es

$$z = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + \mathrm{sg}(b)\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}i\right]$$

donde $\mathrm{sg}(b) = \frac{|b|}{b}$ y se extiende o acepta que $\mathrm{sg}(0) = 1$.

La formula anterior se obtiene de considerar $(x + yi)^2 = a + bi$, que al igualar se tiene

$$x^2 - y^2 = a \quad \wedge \quad 2xy = b$$

Si $b = 0$, entonces depende del signo de a para finalizar, es decir, $z = \sqrt{a}, a > 0$ o bien $z = \sqrt{|a|}i, a < 0$.

Si $b \neq 0$, entonces despejando y y reemplazando obtenemos

$$4x^4 - 4ax^2 - b^2 = 0$$

cuyo discriminante es $16a^2 + 16b^2$ siempre positivo, luego siempre tiene solución la ecuación de segundo grado, de este modo se tiene que

$$x^2 = \frac{4a \pm 4\sqrt{a^2 + b^2}}{8} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}$$

La otra solución no es posible en los reales, por lo tanto

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}}$$

reemplazando en el despeje de y se obtiene

$$y = \pm b\sqrt{\frac{2}{4(\sqrt{a^2 + b^2} + a)}} = \pm b\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2b^2}} = \pm\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}$$

Ejemplo 4.2.5 Resolver

$$z^2 = 3 - 4i$$

□

Solución 1. Notemos que $a = 3$ y $b = -4$, luegosg$(b) = \mathrm{sg}(-4) = -1$

$$\begin{aligned} z &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}+3}{2}} - \sqrt{\tfrac{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}-3}{2}}i\right] \\ z &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{5+3}{2}} - \sqrt{\tfrac{5-3}{2}}i\right] = \pm\left[\sqrt{\tfrac{8}{2}} - \sqrt{\tfrac{2}{2}}i\right] \\ &= \pm[2 - i] \end{aligned}$$

2^{da} **Etapa**

Consideremos la siguiente ecuación

$$z^2 + 2z + 1 + i = 0,$$

luego

$$\begin{aligned} z^2 + 2z + 1 + i &= 0 \\ z^2 + 2z &= -1 - i \\ z^2 + 2z + 1 &= -1 - i + 1 \\ (z + 1)^2 &= -i \\ z + 1 &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}i\right] \\ z &= -1 \pm\left[\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{\tfrac{1}{2}}i\right] \end{aligned}$$

Caso General

Consideremos la ecuación

$$z^2 + (a + bi)z + (c + di) = 0,$$

luego

$$\begin{aligned} z^2 + (a + bi)z + (c + di) &= 0 \\ \left(z + \left(\tfrac{a+bi}{2}\right)\right)^2 &= \left(\tfrac{a+bi}{2}\right)^2 - (c + di) \\ \left(z + \left(\tfrac{a+bi}{2}\right)\right)^2 &= \left(\tfrac{a^2-b^2}{4} - c\right) + \left(\tfrac{ab}{2} - d\right) i \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables $w = z + \left(\frac{a+bi}{2}\right)$ tenemos

$$\begin{aligned} w^2 &= \left(\tfrac{a^2-b^2}{4} - c\right) + \left(\tfrac{ab}{2} - d\right) i \\ w^2 &= u + vi \end{aligned}$$

con $u = \frac{a^2-b^2}{4} - c$ y $v = \frac{ab}{2} - d$ es decir

$$w_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{u^2 + v^2} + u}{2}} + \mathrm{sg}(v)\sqrt{\frac{\sqrt{u^2 + v^2} - u}{2}} i$$

Donde $u^2 + v^2 = \left(\frac{a^2-b^2}{4} - c\right)^2 + \left(\frac{ab}{2} - d\right)^2$

Así tenemos la solución dada por:

$$\begin{aligned} z + \left(\tfrac{a+bi}{2}\right) &= \pm w_0 \\ z &= -\left(\tfrac{a+bi}{2}\right) \pm w_0. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.2.6 Resolver la siguiente ecuación

$$z^2 + (1 - 2i)\, z - (2 + 4i) = 0.$$

□

Solución 2. Completando cuadrado tenemos

$$\begin{aligned} z^2 + (1 - 2i)\, z - (2 + 4i) &= 0 \\ \left(z + \tfrac{1}{2}(1 - 2i)\right)^2 - \tfrac{1}{4}(1 - 2i)^2 - (2 + 4i) &= 0 \\ \left(z + \tfrac{1}{2}(1 - 2i)\right)^2 &= \tfrac{5}{4} + 3i \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable

$$w^2 = \frac{5}{4} + 3i$$

luego

$$\begin{aligned} w &= \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 3^2} + \left(\frac{5}{4}\right)}{2}} + \mathrm{sg}(3)\sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 3^2} - \left(\frac{5}{4}\right)}{2}} i \\ w &= \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{169}{16}} + \left(\frac{5}{4}\right)}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{\frac{169}{16}} - \left(\frac{5}{4}\right)}{2}} i \\ w &= \sqrt{\frac{\frac{13}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)}{2}} + \sqrt{\frac{\frac{13}{4} - \left(\frac{5}{4}\right)}{2}} i = \sqrt{\frac{18}{8}} + \sqrt{\frac{8}{8}} i \\ w &= \tfrac{3}{2} + i \end{aligned}$$

luego la ecuación tiene la solución

$$\begin{aligned}\left(z+\tfrac{1}{2}(1-2i)\right)^2 &= \tfrac{5}{4}+3i\\ z+\tfrac{1}{2}(1-2i) &= \pm\left(\tfrac{3}{2}+i\right)\\ z &= -\tfrac{1}{2}(1-2i)\pm\left(\tfrac{3}{2}+i\right)\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}z_1 &= -\tfrac{1}{2}(1-2i)+\left(\tfrac{3}{2}+i\right) \quad\vee\quad z_2=-\tfrac{1}{2}(1-2i)-\left(\tfrac{3}{2}+i\right)\\ z_1 &= 1+2i \quad\vee\quad z_2=-2\end{aligned}$$

De modo de facilitar la escritura podemos introducir las siguiente notación

Definición 4.2.7 Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$ donde $a, b \in \mathbb{R}$

1 La **parte real** de $a + bi$ es el número a, y lo denotamos por

$$Re(z) = Re(a + bi) = a.$$

2 La **parte imaginaria** de $a + bi$ es el número b, el que denotamos por:

$$Im(z) = Im(a + bi) = b.$$

3 El **conjugado** de $a + bi$ es el número $a - bi$, y se denota por:

$$\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

4 El **módulo** o norma de $a + bi$ es el número $\sqrt{a^2 + b^2}$, y se denota por

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$\Diamond$

La solución de la ecuación $z^2 = C$, con $C \in \mathbb{C}$, es

$$z = \pm\left[\sqrt{\frac{|C| + Re(C)}{2}} + \operatorname{sg}(Im(C))\sqrt{\frac{|C| - Re(C)}{2}}\,i\right]$$

Proposición 4.2.8 *Sean $A, B, C \in \mathbb{C}$ con $A \neq 0$, entonces la ecuación de segundo grado*

$$Az^2 + Bz + C = 0$$

tiene solución en $\mathbb{C}$, para ello sea $\delta^2 = B^2 - 4AC$ entonces las soluciones son

$$z = \frac{-B \pm \delta}{2A}$$

Ejemplo 4.2.9 Resolver la siguiente ecuación

$$iz^2 + (2 - 3i)\,z + (5i - 1) = 0.$$

$\square$

Solución 3. Resolvamos directamente la ecuación

$$iz^2 + (2-3i)\,z + (5i-1) = 0.$$

Sea

$$\delta^2 = \triangle = (2-3i)^2 - 4i\,(5i-1) = 15-8i$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\delta &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{\sqrt{225+64}+15}{2}} - \sqrt{\tfrac{\sqrt{225+64}-15}{2}}\,i\right]\\
\delta &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{\sqrt{289}+15}{2}} - \sqrt{\tfrac{\sqrt{289}-15}{2}}\,i\right]\\
\delta &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{17+15}{2}} - \sqrt{\tfrac{17-15}{2}}\,i\right]\\
\delta &= \pm\,[4-i]
\end{aligned}$$

Así tenemos que

$$z = \frac{-(2-3i) \pm (4-i)}{2i}$$

o bien

$$z = 2+3i \qquad z = 1-i$$

Ejemplo 4.2.10 Resolver la siguiente ecuación

$$z^2 + (1-2i)\,z + (2+4i) = 0.$$

□

Solución 4. Resolvamos directamente la ecuación

$$z^2 + (1-2i)\,z + (2+4i) = 0.$$

Sea

$$\delta^2 = \triangle = (1-2i)^2 - 4\,(2+4i) = -11-20i$$

es decir,

$$\begin{aligned}
\delta &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{\sqrt{121+400}-11}{2}} - \sqrt{\tfrac{\sqrt{121+400}+11}{2}}\,i\right]\\
\delta &= \pm\left[\sqrt{\tfrac{\sqrt{521}-11}{2}} - \sqrt{\tfrac{\sqrt{521}+11}{2}}\,i\right]
\end{aligned}$$

así tenemos que

$$z = \frac{-(1-2i) \pm \left[\sqrt{\tfrac{\sqrt{521}-11}{2}} - \sqrt{\tfrac{\sqrt{521}+11}{2}}\,i\right]}{2}$$

Ahora veremos algunas propiedades, de los elementos definidos
Proposición 4.2.11 *Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:*

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
3. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.
4. $z + \overline{z} = 2Re(z)$.
5. $z - \overline{z} = 2Im(z) \cdot i$.
6. $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.
7. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
8. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, con $w \neq 0$.
9. $|z + w| \leq |z| + |w|$.
10. $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Ejemplo 4.2.12 Simplificar

$$Z = \frac{\overline{(1-2i)} + |1-3i|}{(1+i)^2}$$

□

Solución 5.

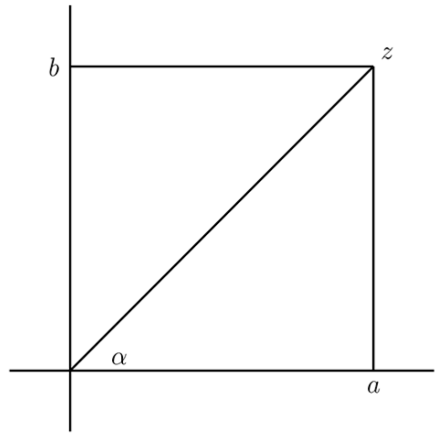
$$\begin{aligned} Z &= \frac{\overline{(1-2i)}+|1-3i|}{(1+i)^2} \\ &= \frac{1+2i+\sqrt{10}}{2i} \\ &= 1 + \left(\frac{1+\sqrt{10}}{2i}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1+\sqrt{10}}{2} i\right) \end{aligned}$$

4.3 Forma Polar de un Complejo

Ahora veremos un interpretación del módulo, para ellos sea $z = a + bi$,

$>$Todo numero complejos z es el par ordenado (a, b), luego el módulo de z es la distancia desde el origen al punto (a, b).

Sea $z = a + bi$, luego tenemos el siguiente gráfico



Recordando que
$\cos(\alpha) = \frac{\text{cat ady}}{\text{hip}}$.
Lo que es equivalente a decir:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Re}(z)}{|z|}.$$

$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cat op}}{\text{hip}}$.
Lo que es equivalente a:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{Im}(z)}{|z|}.$$

La forma polar de un complejo $z = a + bi$ esta dada por:

$$z = |z|\cos(\alpha) + (|z|\,\text{sen}(\alpha))i = |z|[\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha].$$

Notación:

$$\cos(\alpha) + i\,\text{sen}(\alpha) = cis(\alpha)$$

Ejemplo 4.3.1 Transformar a su forma polar

a $z = i = |i|cis(\pi/2) = cis(\pi/2)$.

b $z = 3cis(\pi/4) = 3\cos(\pi/4) + 3i\,\text{sen}(\pi/4) = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i$.

□

Ejemplo 4.3.2 Calcular en forma polar

1. $|cis\alpha| = |\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha| = \sqrt{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha} = 1$.
2. $(cis\alpha)^{-1} = cis(-\alpha)$.

□

Propiedades:
Consideremos $z = |z|cis(\alpha), w = |w|cis(\beta) \in \mathbb{C}$, entonces se cumple

1. $z \cdot w = |z \cdot w|cis(\alpha + \beta)$.

2. $z : w = \left|\frac{z}{w}\right| cis(\alpha - \beta)$, con $w \neq 0$.
3. $z^n = |z|^n cis(n\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$.

Observación: Recordemos alguna identidades trigonometrías básicas

1. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.
2. $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$.
3. $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$.
4. $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha)$.
5. $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$.
   $\operatorname{sen}(\alpha + 2k\pi) = \operatorname{sen}(\alpha)$, $k \in \mathbb{Z}$

Demostración. La multiplicación compleja en forma binomial

$$\begin{aligned}(cis\alpha)\cdot(cis\beta) &= (\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)(\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta + i\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - i\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha\\ &= [\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta] + i[\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta]\\ &= \cos(\alpha+\beta) + i\operatorname{sen}(\alpha+\beta)\\ &= cis(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}z\cdot w &= |z|cis(\alpha)\cdot|w|cis(\beta)\\ &= |z||w|cis(\alpha)cis(\beta)\\ &= |zw|cis(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

Además notemos que

$$\begin{aligned}\overline{cis}(\alpha) &= \overline{\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha}\\ &= \cos\alpha - i\operatorname{sen}\alpha\\ &= \cos(-\alpha) + i\operatorname{sen}(-\alpha)\\ &= cis(-\alpha)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z \div w &= |z|cis(\alpha) \div |w|cis(\beta)\\ &= |z|cis(\alpha)\cdot\tfrac{1}{|w|}\overline{cis(\beta)}\\ &= |z|\cdot\tfrac{1}{|w|}cis(\alpha)cis(-\beta)\\ &= \left|\tfrac{z}{w}\right| cis(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

■

Ejemplo 4.3.3 Calcular $(1-i)^{50}$. □

Solución 1. Reescribiendo en forma polar el número complejo tenemos

$$1 - i = \sqrt{2}cis(-\pi/4),$$

Aplicando la propiedad

$$\begin{aligned}(1-i)^{50} &= (\sqrt{2})^{50} cis\left(\tfrac{-50\pi}{4}\right)\\ &= (2)^{25} cis\left(\tfrac{-25\pi}{2}\right)\\ &= (2)^{25} cis\left(-(\pi/2+12\pi)\right)\\ &= (2)^{25}\overline{cis(\pi/2)}\\ &= (2)^{25}\overline{[0+i]}\\ &= -2^{25} i.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.3.4 Simplificar

$$A = \frac{(1+i)^{20}\left(\sqrt{3}+i\right)^{18}}{\left(\sqrt{3}i+1\right)^{24}}$$

$\square$

Solución 2. Transformando a la forma polar tenemos que

$$\begin{aligned}A &= \tfrac{(1+i)^{20}\left(\sqrt{3}+i\right)^{18}}{\left(\sqrt{3}i+1\right)^{24}}\\ A &= \tfrac{\left(\sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{20}\left(2cis\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{18}}{\left(2cis\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^{24}}\\ A &= \tfrac{2^{10}cis\left(\frac{20\pi}{4}\right)2^{18}cis\left(\frac{18\pi}{6}\right)}{2^{24}cis\left(\frac{24\pi}{3}\right)}\\ A &= 2^4 cis\left(\tfrac{20\pi}{4}+\tfrac{18\pi}{6}-\tfrac{24\pi}{3}\right)\\ A &= 2^4 cis\left(5\pi+3\pi-8\pi\right) = 2^4 cis\left(0\right) = 2^4.\end{aligned}$$

Propiedades de la raíz n-ésima:

Sea $w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, entonces:

$$z^n = w = |w|cis(\alpha),$$

tiene n soluciones y son

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\cdot cis\left(\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right), \quad k \in \mathbb{J}_{n-1}.$$

Ejemplo 4.3.5 Encontrar las soluciones de la ecuación

$$z^2 = i = cis(\pi/2),$$

$\square$

Solución 3. Aplicando la propiedad tenemos

$$z_k = \sqrt{1}cis\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right), \quad k \in \{0,1\},$$

de donde

$$\begin{aligned}&z_0\sqrt{1}cis\left(\tfrac{\pi/2+0}{2}\right)\\ &= cis(\pi/4)\\ &= \tfrac{\sqrt{2}}{2}+i\tfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{1} cis \left(\tfrac{\pi/2+2\pi}{2} \right) \\ &= cis(5\pi/4) \\ &= -\tfrac{\sqrt{2}}{2} - i\tfrac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

De donde $z_0 = -z_1$.

Ejercicios

Resolver

$$z^4 = \frac{(1-i)^{20} \left(\sqrt{3}-i\right)^{15}}{\left(1-\sqrt{3}i\right)^{24}}$$

4.4 Guía Ejercicios

1. Expresar los siguientes complejos en la forma cartesiana $a + bi$

    a $(2+3i)+(-1-2i)$

    b $(-1+i)(3-2i)$

    c $(1+i)(1-i)$

    d $\dfrac{1}{i}$

    e $\dfrac{1}{1-i}$

    f $\dfrac{3-i}{2+\sqrt{2}i}$

    g $\dfrac{11-i}{11+i}$

    h $\dfrac{1+i}{1+2i} + \dfrac{1-i}{1-2i}$

    i $\left(\dfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\right)^5$

    j $\dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i}$

    k $\dfrac{1-i}{1+i}$

    l $i^{13} - i^9$

    m $\left(\dfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\right)^5$

n $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^9$

o $(-1+i)^{15}$

p $\dfrac{1+ri}{2r+(r^2-1)i}, \quad \text{con } r \in \mathbb{R}$

2. Resolver las siguientes ecuaciones

   a $2iz = 3 - i$. Respuesta: $z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

   b $(1+i)\,z = 1+2i$. Respuesta: $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$

   c $(1-i)\,(z+i) = 2+i$. Respuesta: $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

   d $(2-3i)\,(z+i) + (1-2i)\,(z-1+2i) = 1+4iz = -\frac{5}{34} - \frac{31}{34}i$

   e $\frac{1}{3}(2-i)\left(\frac{1}{5}z+5i\right) + \frac{3}{2}(1-i)\left(\frac{1}{5}z+1-3i\right) = 1+4i$. Respuesta: $z = -\frac{129}{29} + \frac{337}{29}i$

3. Resolver los siguientes sistema

   a
   $$\left.\begin{array}{rcl} 2z+iw &=& 3 \\ iz+2w &=& i \end{array}\right|$$
   Respuesta : $w = -\frac{1}{5}i, z = \frac{7}{5}$

   b
   $$\left.\begin{array}{rcl} (2+i)\,z+iw &=& 4 \\ (1-i)\,z+2w &=& 1+i \end{array}\right|$$
   Respuesta : $z = \frac{13}{5} - \frac{6}{5}i, w = -\frac{1}{5} + \frac{12}{5}i$

   c
   $$\left.\begin{array}{rcl} (1+i)\,z+(2i-1)\,w &=& 1+i \\ (2-i)\,z+(2+3i)\,w &=& 4+i \end{array}\right|$$
   Respuesta : $z = -5+2i, w = -4i$

   d
   $$\left.\begin{array}{rcl} (1+i)\,z+(2i-1)\,w &=& -9+4i \\ (2+3i)\,z+(1-3i)\,w &=& 7+4i \end{array}\right|$$
   Respuesta : $w = 2+3i, z = 1+2i,$

   e
   $$\left.\begin{array}{rcl} (1-2i)\,z+(3-2i)\,w &=& 7-14i \\ (2-i)\,z+(1-3i)\,w &=& 3-14i \end{array}\right|$$
   Respuesta : $z = 2-i, w = 3-i$

4. Determinar todos los complejos tales que satisfacen

   a $z^2 = 3-4i$. Respuesta son : $z_1 = -2+i, z_2 = 2-i$

   b $z^2 = -8-6i$. Respuesta son : $z_1 = -1+3i, z_2 = 1-3i$

c $z^2 = -2$. Respuesta son : $z_1 = i\sqrt{2}, z_2 = -i\sqrt{2}$

d $z^2 + 2z + 8 = 0$. Respuesta son : $z_1 = -1 + i\sqrt{7}, z_2 = -1 - i\sqrt{7}$

5. Hallar los conjugados de

   a $\dfrac{1}{i} + i$. Respuesta: 0

   b $|1 - i| + i$. Respuesta: $\sqrt{2} - i$

   c $||1 + i| + i| + i$. Respuesta : $\sqrt{3} - i$

   d $1 + i + i^2 + ... + i^{21}$. Respuesta: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

   e $(1 + 2i)(2 - i)(1 + i)$. Respuesta: $1 - +7i$

6. Hallar los módulo en los siguientes casos:

   a -1. Respuesta : 1

   b $-1 - i$. Respuesta : $\sqrt{2}$

   c $1 - \sqrt{2}i$. Respuesta : $\sqrt{3}$

   d i^{17}. Respuesta : 1

   e $\dfrac{2 - i}{i - 2}$. Respuesta : 1

   f $\dfrac{2}{1 - i\sqrt{2}}$. Respuesta : $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

   g $\dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Respuesta : 1

   h $\dfrac{|1 - i| - i}{|1 - i| + i}$. Respuesta : 1

   i $10^6 \left[\dfrac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\right]$. Respuesta : 1000 000

7. Expresar los siguientes complejos en la forma polar $r\,\mathrm{cis}(\alpha)$

   a) -1

   b) $-1 - i$

   c) $\sqrt{3} - i$

   d) $i^{13} - i^8$

   e) $4 + 5i$

8. Completar las siguientes Afirmaciones

   a $z = (1 + i)^2$ entonces $\mathrm{Re}(z) =$.........................

   b $z = (2 + 3i)(1 + i)$ entonces $\mathrm{Im}(z) =$.........................

c $z = \dfrac{(1+i)^2}{\|1-i\|}$ entonces $\text{Im}(z) =$.........................

d $z = \dfrac{(1+2i)^2}{\|1-i\|}$ entonces $\text{Re}(z) =$.........................

e $(3+i)z = \overline{(1+2i)}$ entonces la forma binomial de $z =$.........................

f $(3+i)z = \overline{(4+i)}$ entonces la forma binomial de $z =$.........................

g $1 + (3+i)z + 2z^2 = 0$ entonces las soluciones en forma binomial son

$$z_1 = \text{.............................} z_2 = \text{.............................}$$

h $z^2 + (1+3i)z - 2 + i = 0$ entonces las soluciones en forma binomial son

$$z_1 = \text{.............................} z_2 = \text{.............................}$$

9. Resolver los siguientes sistemas

a
$$\left.\begin{array}{rcl} z + (2+i)\,w &=& 1+i \\ iz + (1+2i)w &=& 1-i \end{array}\right|$$

b
$$\left.\begin{array}{rcl} iz + 3w &=& 1+i \\ 2z + (1-2i)w &=& 1 \end{array}\right|$$

c
$$\left.\begin{array}{rcl} (1+i)z + 2iw &=& 1+2i \\ iz + (1+2i)w &=& 1-i \end{array}\right|$$

d
$$\left.\begin{array}{rcl} iz + 2w &=& 2+1 \\ iz + (1+2i)w &=& 1-i \end{array}\right|$$

e
$$\left.\begin{array}{rcl} 3z + (2-i)\,w &=& 1+i \\ iz + (1+i)w &=& 1-i \end{array}\right|$$

f
$$\left.\begin{array}{rcl} iz + 3w &=& 1+i \\ 2z + (1-2i)w &=& 1 \end{array}\right|$$

10. Resolver las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $z^2 - iz + 6 = 0$

b) $z^2 - 3z + 2iz - 6i = 0$

c) $z^2 - z - 5iz - 8 + i = 0$

d) $z^2 - 4z + 6iz - 5 - 10i = 0$

e) $6z^2 - 5z + 16iz - 7 - 6i = 0$

f) $(7+i)\,z^2 + (16i-3)\,z - 7 - 6i = 0$

11. Resolver la ecuación $z^n = w$ en cada caso

 a $w = i, \qquad n = 4$

 b $w = 1+i, \qquad n = 6$

 c $w = 1+\sqrt{3}i, \qquad n = 5$

 d $w = 1-\sqrt{3}i, \qquad n = 8$

 e $w = \sqrt{3}-i, \qquad n = 6$

 f $w = \dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}, \qquad n = 8$

12. Sea n un número natural. Calcular

 a $\sum\limits_{k=0}^{n} i^k$

 b $\prod\limits_{k=0}^{n} i^k$

13. Determinar el conjunto solución de la ecuación

$$z^6 = \frac{(1+i)^4(\sqrt{3}+i)^{15}}{(-3+3i)^2}$$

$$z^5 = \frac{(1+i)^7(\sqrt{3}-i)^{15}}{(3-3i)^2}$$

14.

$$z^5 = \frac{(1-i)^7(\sqrt{3}-i)^{15}}{(3+3i)^8}$$

15.

$$(z-i)^3 = \frac{(i-1)^{10}(1+\sqrt{3}i)^{15}}{(\sqrt{3}-i)^6}$$

16. Hallar $z \in \mathbb{C}$ (en formar polar) tal que

$$4(i-z^2)^2 = (1+i)^4$$

17. Hallar $z \in \mathbb{C}$ (en formar polar) tal que

$$-2iz^3 + \overline{(1-i)} \cdot i = \bar{i} \cdot (1+i)$$

18. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Demostrar que si $z+w$ y zw son números reales entonces z y w son números reales