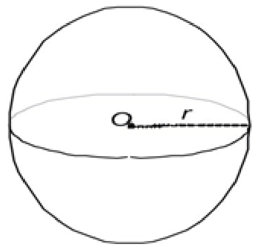
11.5: Esfera[1]

Objetivos de Aprendizaje
- Encontrar el área de la superficie de una esfera.
- Encontrar el volumen de una esfera.

Introducción
Una esfera es una figura tridimensional que tiene la forma de una bola.



Las esferas se pueden caracterizar en tres formas.
- Una esfera es el conjunto de todos los puntos del espacio que están a una distancia fija r desde un punto central individual O.
- Una esfera es la superficie que resulta cuando un círculo es rotado sobre cualquiera de sus diámetros.

- Una esfera resulta cuando construyes un poliedro con un infinito número de caras que son infinitamente pequeñas. Para ver porque esto es cierto, recuerda los poliedros regulares.

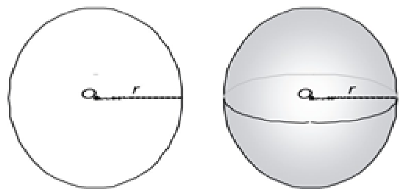
A medida que el número de caras en la figura se incrementan, cada cara se hace más pequeña en área y la figura se parece más a una esfera. Cuando imaginas una figura con un número *infinito* de caras, se miraría como (y sería como!) una esfera.

.

[1] https://www.ck12.org/book/CK-12-Geometr%25C3%25ADa-en-Espa%25C3%25B1ol/section/11.7/

Partes de una Esfera

Como se describe arriba, una esfera es la superficie que es el conjunto de todos del espacio los puntos a una distancia fija desde el centro O. La terminología para esferas es similar a la de los círculos. La distancia desde O a la superficie de la esfera es r, el radio.



El **diámetro**, d, de una esfera es la longitud del segmento conectando dos puntos cualquiera en la superficie de la esfera que pasan a través de O. Nota que tú puedes encontrar un diámetro (de hecho un número infinito de diámetros) en cualquier plano dentro de la esfera. Dos diámetros son mostrados en cada esfera en el diagrama de abajo.

El área de la superficie de una esfera está dado por $A=4\pi r^2$

Ejemplo 1

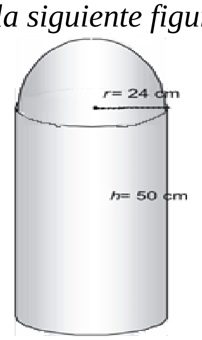
Encontrar el área de la superficie de una esfera con un radio de 14 pies.

Usar la fórmula.

$$A = 4\pi r^2 = 4\pi(14)^2 = 4\pi(196) = 784\pi = 2461.76 \text{ pies}^2$$

Ejemplo 2

Encontrar el área de la superficie de la siguiente figura en términos de π.



La figura está hecha de media esfera o hemisferio, y un cilindro sin su parte superior.

A(mitad de la esfera) = (1/2) A(esfera)=$(1/2)\cdot 4\pi r^2 = 2\pi(576) = 1152\pi \text{ cm}^2$

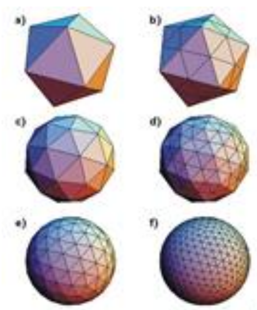
Ahora encontrar el área del cilindro sin su tapa.

$$\begin{aligned} A(\text{cilindro sin parte superior}) &= A(\text{cilindro}) - A(\text{parte superior}) \\ &= 2(\pi r^2) + 2\pi rh - \pi r^2 \\ &= \pi r^2 + 2\pi rh \\ &= \pi(576) + 2\pi(24)(50) \\ &= 2976\pi \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Así que, el área total de la superficie es $1152\pi + 2976\pi = 4128\pi$ cm^2

Volumen de una Esfera

Una esfera puede ser pensada como un poliedro regular con un número infinito de caras de polígonos congruentes. Una serie de poliedros con un número de caras incrementándose es mostrado:

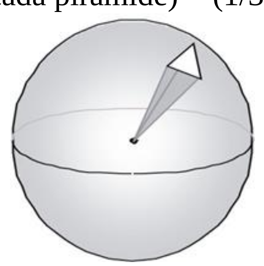


Como n, el número de caras se incrementa a un número infinito, la figura se aproxima a convertirse en una esfera.

Entonces una esfera puede ser un poliedro con un infinito número de caras. Cada una de esas caras es la base de una pirámide cuyo vértice está localizado en O, el centro de la esfera. Esto se muestra a continuación.

Cada una de las pirámides que forma la esfera sería congruente a la pirámide mostrada. El volumen de esta pirámide está dado por:

$$V(\text{cada pirámide}) = (1/3)Bh$$



Para encontrar el volumen de la esfera, tú simplemente necesitas sumar los volúmenes de un número infinito de pequeñas pirámides.

$$\begin{aligned} V(\text{todas las pirámides}) &= V1 + V2 + V3 + \ldots + Vn \\ &= (1/3)B_1h + (1/3)B_2h + (1/3)B_3h + \ldots + (1/3)B_nh \\ &= (1/3)h(B_1 + B_2 + B_3 + \ldots + B_n) \end{aligned}$$

Ahora, debería ser obvio que la suma de todas las bases de las pirámides es simplemente el área de la superficie de la esfera. Ya que sabes que el área de la superficie de la esfera es $4\pi r^2$, puedes sustituir esta cantidad en la ecuación de arriba.

$$V(\text{todas las pirámides}) = (1/3)\,(B_1+B_2+B_3+\ldots+B_n) = (1/3)h(4\pi r^2)$$

Finalmente, como n se incrementa y la superficie de la figura llega a ser más "redondeada" h, la altura de cada pirámide llega a ser igual a r, el radio de la esfera. Entonces podemos sustituir r por h. Esto da:

$$V(\text{todas las pirámides}) = (1/3)\, r\, (4\pi r^2) = (4/3)\pi r^3$$

Podemos escribir esto como una fórmula.

Volumen de una Esfera

Dada una esfera que tiene un radio r

$$V=(4/3)\pi r^3$$

Ejemplo 3

Encontrar el volumen de una esfera con radio 6.25m.

Usa el postulado de arriba.

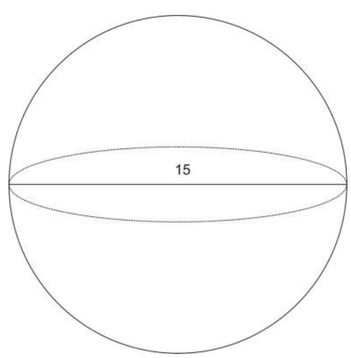
$$V(\text{esfera}) = (4/3)\pi r^3 = (4/3)\,(3.14)\,(6.25)\,(6.25)\,(6.25) = 1022.14\ m^3$$

Ejercicios de Repaso

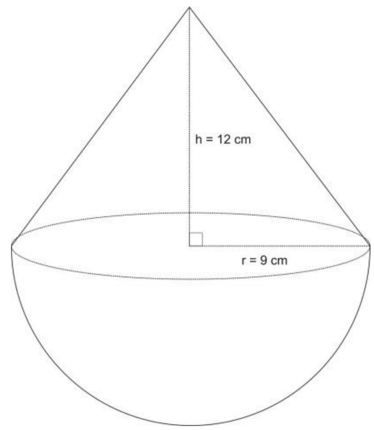
1. Encontrar el radio de la esfera que tiene un volumen de $335cm^3$.

Determinar el área de la superficie y volumen de las siguientes figuras:

2.



3.



4. El radio de una esfera es 4. Encontrar su volumen y área total de superficie.
5. Una esfera tiene un radio de 5. Un cilindro recto, teniendo el mismo radio tiene el mismo volumen. Encontrar la altura y el área total de la superficie del cilindro.

En los problemas 6 y 7 encontrar la dimensión faltante.

6. Esfera: volumen=296cm^3. Diámetro = _________

7. Esfera: área de superficie es 179in^2. Radio = _________

8. Las pelotas de tenis con un diámetro de 3.5pulgadas son vendidas en latas de tres. La lata es un cilindro. Asumir que las bolas tocan la lata en los lados, parte superior y parte inferior. ¿Cuál es el volumen del espacio no ocupado por las bolas de tenis?

9. Una esfera tiene un área de superficie de 36πpulg2. Encontrar su volumen.

10. Una pala gigante, operada por una grúa, tiene la forma de la mitad de una esfera de radio=21pulgadas. La pala es llenada con acero caliente derretido. Cuando el acero es derramado en un tanque de almacenamiento cilíndrico que tiene un radio de 28pulgadas, a cuantas pulgadas de altura subirá el acero derretido?

Respuestas

1. Radio=4.39cm
2. Área de la superficie=2544.69cm^3
3. Área de la superficie = Área de superficie del hemisferio + Área superficie del cono
   = 678.58pulg^2
   Volumen=2544.69pulg^3
4. Volumen=268.08unidades^3.
   Área de la superficie=201.06 unidades^2
5. Altura=20/3unidades de área total de superficie = 366.52unidades^2
6. Diámetro=8.27pulgadas
7. Radio=3.77pulgadas

8. Volumen del cilindro = $32.16\pi pulg^3$
   Volumen de las pelotas de tenis=$21.44\pi pulg^3$
   Volumen del espacio no ocupado por pelotas de tenis = $33.67 pulg^3$
9. Volumen=$113.10 pulg^3$
10. Altura del acero fundido en el cilindro será 7.88pulgadas